Παράγωγα – Τιμολόγηση

Αναφέρουμε μερικά εισαγωγικά τα οποία θα χρησιμοποιηθούν μέσω των μαθηματικών εργαλείων σαν υπάρχουσα γνώση για την τιμολόγηση των παραγώγων.

Filtered spaces (Φιλτραρισμένοι Χώροι)
Ένας τέτοιος χώρος είναι ο (Ω,F,{F_n},P). Όπου (Ω,F,P) είναι ο χώρος πιθανοτήτων και {F_n, n≥0} είναι η ιστορία (Filtration) δηλαδή μια αύξουσα οικογένεια υπο-σ-άλγεβρων του F:
$F_0 \subseteq F_1 \subseteq ... \subseteq F$.
Ορίζουμε $F_\infty := \sigma\left(\bigcup_n F_n\right) \subseteq F$.
Διαισθητική ιδέα. Η πληροφορία για το ω του Ω διαθέσιμη σε εμάς σε χρόνο n αποτελείται ακριβώς από τις τιμές του Z(ω) για όλες τις F_n μετρήσιμες συναρτήσεις Z. Συνήθως, {F_n} είναι το natural Filtration $F_n = \sigma(W_0, W_1, ..., W_n)$ κάποιων (στοχαστικών) διαδικασιών $W = \left(W_n : n \in Z^+\right)$ και τότε η πληροφορία για το ω την οποία έχουμε σε χρόνο n αποτελείται από τις τιμές $W_0(\omega),...,W_n(\omega)$.

Adapted processes (Προσαρμοσμένες διαδικασίες)
Μια διαδικασία $X = (X_n : n \geq 0)$ καλείται adapted (ως προς το filtration {F_n}) αν για κάθε n X_n είναι F_n μετρήσιμη.
Διαισθητική ιδέα. Αν X είναι προσαρμοσμένη τότε η τιμή $X_n(\omega)$ είναι γνωστή σε εμάς σε χρόνο n. Συνήθως $F_n = \sigma(W_0, W_1, ..., W_n)$ και $X_n = f_n(W_0, W_1, ..., W_n)$ για κάποια B^{n+1}-μετρήσιμη συνάρτηση f_n στο R^{n+1}.

Martingale
Μια διαδικασία X καλείται Martingale (σχετικά με ({F_n},P)). Αν
(1) X είναι adapted
(2) $E(|X_n|) < \infty \forall n$
(3) $E[X_n / F_{n-1}] = X_{n-1}$ a.s. n>0

Previsible process (Προβλεπόμενη διαδικασία)
Καλούμε μια διαδικασία $C = (C_n : n \in N)$ προβλεπόμενη αν C_n είναι F_{n-1} μετρήσιμη, n>0. Έστω $X_n = \xi_1 + ... + \xi_n$ όπου ξ_n ανεξάρτητες ισόνομες με $P(\xi_n = 1) = \frac{1}{2} = P(\xi_n = -1)$ C_n ποσό που στοιχηματίζουμε τη χρονική στιγμή

n. $C_n(X_n - X_{n-1})=$καθαρό κέρδος τη n-οστή φορά. $Y_n = \sum_{k=1}^{n} C_k\left(X_k - X_{k-1}\right) = (C \bullet X)_n$ είναι το συνολικό καθαρό κέρδος μέχρι το χρόνο n.

Παράγωγα Προιόντα :Futures and Options

Future: Είναι μια συμφωνία να αγοράσεις ή να πουλήσεις μια συγκεκριμένη ποσότητα ενός αγαθού σε μια συγκεκριμένη μελλοντική ημερομηνία σε τιμή που έχει συμφωνηθεί σήμερα. Υπάρχουν τριών ειδών ανθρώπων που χρησιμοποιούν τα futures.
Hedger: αναζητά τη μείωση του ρίσκου.
Speculator: αναζητά το μέγιστο κέρδος.
Arbitrageur: αναζητά κέρδη χωρίς ρίσκο εκμεταλλευόμενος αναποτελεσματικότητες της αγοράς.
Παράδειγμα.
Speculator αγοράζοντας ένα future. Πιστεύει ότι οι τιμές θα ανέβουν και έχει στη διάθεσή του 1000 ευρώ. Για ένα July oil Future έχουμε τα εξής

	1 Απρίλη	21 Απρίλη
Cash	19 ευρώ	35
Future	20,5	30

Στην αγορά των future δεν κατατίθενται όλα τα λεφτά αλλά ένα margin 20%
Σενάριο 1 αγορά 1000/19=52 βαρελιών
Σενάριο 2 αγορά 5000/20,5=243 βαρελιών συμβολαίου Future (margin)
Όπως γίνεται κατανοητό ισχύουν τα εξής
Risk: limited but large
Reward: unlimited

Option: Είναι ένα συμβόλαιο το οποίο προσφέρει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσεις ή να πουλήσεις ένα αγαθό σε δοθέν τιμή σε ή πριν μια καθορισμένη ημερομηνία.
Το δικαίωμα να αγοράσεις λέγεται call option ενώ το δικαίωμα να πουλήσεις λέγεται put option. Premium ονομάζεται το κόστος του option.
Παράδειγμα.
Τρέχουσα τιμή πετρελαίου 600ε ο τόνος. Ο Speculator αναμένει ότι οι τιμές θα ανέβουν.
Πράξη 1 αγοράζει ένα τόνο με 600ε
Πράξη 2 αγοράζει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει ένα τόνο πετρελαίου σε 3 μήνες. Το δικαίωμα κοστίζει 5 ε.
3 μήνες αργότερα ο τόνος κοστίζει 700ε

Κέρδος από την πράξη 1 100ε (16,6%)
Κέρδος από την πράξη 2 95 ε (1900%)

Δίκαιη Τιμή (Fair Value) Μια πρώτη άποψη της χρονικής αξίας του χρήματος. Το παράδειγμα του zero-coupon Bond το οποίο εκφράζει το ποσό που πρέπει να δώσουμε σήμερα για να λάβουμε 1 νομισματική μονάδα μετά από χρόνο Τ.

T	B(0,T)
1	0,9560
2	0,9117
3	0,8685
4	0,8250

S(0) είναι η σημερινή τιμή, F(0,T) είναι η τιμή του future και ισχύει S(0)=F(0,T)B(0,T). Παρατηρούμε ότι F(0,T)>S(0) γιατί με τα future συνεχίζω να έχω λεφτά που τοκίζονται.
Συνθήκη Για το Ευρωπαικό call option το οποίο εξασκείται μόνο κατά την τελική ημερομηνία πρέπει να ισχύει το εξής $c(0) \geq \max\{0, S(0) - kB(0,T)\}$ όπου c(0): Time-zero value of a European call option, κ τιμή εξάσκησης. Υποθέτοντας τη μη ύπαρξη μερισμάτων αν δεν ισχύει η παραπάνω συνθήκη θα μπορούσαμε να αγοράσουμε το option και έπειτα θα αγοράζαμε ένα short future το οποίο θα λήγει την ίδια ημερομηνία με το option. Έτσι θα είχαμε κέρδος χωρίς ρίσκο.
Παράδειγμα Έστω B(0,T)=0,9 S(0)=98 K=70. Η συνθήκη λέει ότι c(0)>98-0,9*70=35. Αν c(0)=30 μπορούν να συμβούν τα ακόλουθα. Αγοράζουμε το option (-30) στη συνέχεια αγοράζουμε ένα short future το οποίο λήγει την ίδια ημερομηνία με το option. Η τιμή του θα είναι $F(0,T) = \frac{S(0)}{B(0,T)} = \frac{98}{0,9} = 108,88$ Διαφορετικά μπορούμε να πούμε ότι αγοράζουμε την υποχρέωση να πουλήσουμε την ίδια ημερομηνία στην τιμή των 108,88. Έτσι την ημερομηνία λήξης θα αγοράσουμε στα 70 και θα πουλήσουμε στα 108,88 οπότε το κέρδος είναι (108,88-70)-30/B(0,T)=5,55 ΧΩΡΙΣ ΡΙΣΚΟ.

Τιμολόγηση Παραγώγων σε Συνεχή Χρόνο

Συνεχείς Διαδικασίες Έχουν τρία χαρακτηριστικά. Πρώτον η τιμή μπορεί να αλλάξει σε οποιοδήποτε χρόνο και από στιγμή σε στιγμή, Δεύτερον κάθε πραγματικός αριθμός μπορεί να ληφθεί σαν τιμή και Τρίτον η διαδικασία αλλάζει συνεχώς και η τιμή δεν μπορεί να κάνει στιγμιαία άλματα. Με άλλα λόγια αν η τιμή αλλάζει από 2 σε 2,04 πρέπει να έχει περάσει από όλες τις ενδιάμεσες έστω και γρήγορα. Θα αποδείξουμε ότι η κίνηση Brown αποτελεί μια αξιοσημείωτη αποτελεσματική συνιστώσα για τη δημιουργία συνεχών διαδικασιών.

Τυχαίος Περίπατος $W_n(t)$

Για n θετικό ακέραιο αριθμό ορίζουμε τη διωνυμική διαδικασία $W_n(t)$ να έχει $W_n(0)=0$, τοποθέτηση κατά διαστήματα 1/n (layer spacing), άνω και κάτω άλματα μεγέθους $\frac{1}{\sqrt{n}}$ και μέτρο P τέτοιο ώστε οι πιθανότητες άνω και κάτω άλματος να ισοδυναμούν με ½.

Με άλλα λόγια αν $X_1, X_2, \ldots$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες δυωνυμικές τυχαίες μεταβλητές οι οποίες παίρνουν τιμές +1 ή –1 με ίση πιθανότητα τότε η τιμή του W_n για το ι βήμα ορίζεται από $W_n\left(\frac{i}{n}\right)=W_n\left(\frac{i-1}{n}\right)+\frac{X_i}{\sqrt{n}}\ \forall i \geq 1$. Θεωρούμε το παράδειγμα του $W_n(1)$ που παίρνει n+1 πιθανές τιμές από $-\sqrt{n}$ ως $\sqrt{n}$. Σύμφωνα με την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι $W_n(1)=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n}}$ το οποίο έχει μέση τιμή 0 και διακύμανση 1 λόγω της κατανομής των X. Όταν το n γίνεται μεγάλο το $W_n(1)$ τείνει σε N(0,1). Παρόμοια $W_n(t)=\sum_{i=1}^{nt}\frac{X_i}{\sqrt{n}}=\sqrt{t}\left(\sum_{i=1}^{nt}\frac{X_i}{\sqrt{nt}}\right)\sim N(0,t)$. Κάθε τυχαίος περίπατος της παραπάνω μορφής έχει την ιδιότητα ότι οι μελλοντικές του κινήσεις από μια συγκεκριμένη θέση είναι ανεξάρτητες από τη θέση αυτή και επιπλέον κάθε μελλοντική μετατόπιση $W_n(s+t)-W_n(s)$ κατανέμεται διωνυμικά με μέσο 0 και διακύμανση t. Σύμφωνα με την περιθώρια σύγκλιση και την υπό συνθήκη σύγκλιση η κατανομή του W_n συγκλίνει προς μία κίνηση Brown.

<u>Κίνηση Brown</u>

Μια διαδικασία $W=(W_t : t \geq 0)$ είναι P- κίνηση Brown αν και μόνο αν

1. W_t είναι συνεχής και $W_0=0$
2. η τιμή του W_t κατανέμεται κάτω από το μέτρο P σαν κανονική τυχαία μεταβλητή N(0,t).
3. Το διάστημα $W_{s+t}-W_s$~N(0,t) κάτω από το μέτρο P και είναι ανεξάρτητο του F_s

Επιπλέον η κίνηση Brown έχει τις εξής ιδιότητες

Α. είναι συνεχής παντού αλλά διαφορίσιμη πουθενά.

Β. Θα χτυπήσει κάθε αριθμό με πιθανότητα 1 και θα τον ξαναχτυπήσει πάλι.

Γ. Θα γυρίσει πίσω στο μηδέν με πιθανότητα 1

Δ. Η κίνηση Brown είναι fractal δηλαδή όποιο υποκομμάτι και να πάρουμε έχει την ίδια μορφή.

Η κίνηση Brown είναι πολύ σημαντική διότι με αυτή μπορούμε να αντιπροσωπεύσουμε ένα stock(π.χ. μετοχές). Για παράδειγμα $S_t = \sigma W_t + \mu t$ καλείται κίνηση Brown με drift μ και σταθερό παράγοντα θορύβου σ (volatility). Επιπλέον μπορούμε να έχουμε εκθετική κίνηση Brown της μορφής $S_t = \exp(\sigma W_t + \mu t)$.

Παίρνοντας συνεχώς ένα μικρό κομμάτι από διαφορίσιμη συνάρτηση στο τέλος καταλήγουμε σε μια ευθεία γραμμή. Γενικά οι διαφορίσιμες συναρτήσεις αποτελούνται από ευθείες γραμμές και για την επίλυσή τους χρησιμοποιούμε Newtonian Calculus. Έτσι μπορούμε να γράψουμε την αλλαγή της τιμής μια Newtonian συνάρτησης f για ένα απειροελάχιστο διάστημα dt ως $df_t = \mu_t dt$ όπου μ_t είναι το drift μεγενθυμένης ευθείας γραμμής στο t. Μοναδικότητα των Newtonian διαφορικών.

1. Αν f_t και $\widetilde{f}_t$ είναι δύο διαφορίσιμες συναρτήσεις που συμφωνούν στο 0 ($f_0 = \widetilde{f}_0$) και έχουν ισοδύναμα drifts ($df_t = d\widetilde{f}_t$) τότε οι διαδικασίες είναι ίσες. Δηλαδή η f είναι μοναδική δοθέν ενός drift μ_t και f_0.
2. Δοθέντος μιας διαφορίσιμης συνάρτησης f_t υπάρχει μόνο μία συνάρτηση drift μ_t η οποία ικανοποιεί την $f_t = f_0 + \int_0^t \mu_s ds \forall t$. Έτσι το μ είναι μοναδικό δοθέντος του f.

Ωστόσο μπορεί το drift να εξαρτάται από την τρέχουσα τιμή της συνάρτησης και θα έχουμε $df_t = \mu(f_t, t)dt$ η οποία καλείται ordinary differential equation(ODE). Μια διαφορίσιμη συνάρτηση f που ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση είναι η λύση της.

Όπως προαναφέρθηκε κάθε υποκομμάτι της κίνησης Brown εξακολουθεί να είναι κίνηση Brown. Έτσι μια στοχαστική διαδικασία X αποτελείται και από Newtonian όρο βασιζόμενο στο dt και από Brownian όρο βασιζόμενο στο dW_t. Ο Brownian όρος του X μπορεί να έχει ένα παράγοντα θορύβου σ_t και έτσι η απειροελάχιστη μεταβολή του X_t γράφεται $dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt$. Τέτοιες διαδικασίες όπως η X και σ των οποίων η τιμή σε χρόνο t μπορεί να εξαρτάται από το history F_s καλούνται adapted διαδικασίες.

<u>Στοχαστικές διαδικασίες</u>

Μια στοχαστική διαδικασία X είναι μια συνεχής διαδικασία ($X_t : t \geq 0$) τέτοια ώστε το X_t μπορεί να γραφεί ως $X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s dW_s + \int_0^t \mu_s ds$ όπου σ και μ είναι τυχαίες F-previsible διαδικασίες τέτοιες ώστε $\int_0^t \left(\sigma_s^2 + |\mu_s|\right) ds$ είναι πεπερασμένο για όλα τα t (με πιθανότητα 1). Ο διαφορικός τύπος αυτής της ισότητας γράφεται $dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt$

Μοναδικότητα των volatility και drift

1. Αν δύο διαδικασίες X_t και $\widetilde{X}_t$ συμφωνούν σε χρόνο μηδέν ($X_0 = \widetilde{X}_0$) και έχουν ισοδύναμα volatility drift τότε οι διαδικασίες είναι ίσες. Δηλαδή η X είναι μοναδική για δοθέν σ_t, μ_t και X_0.
2. Δοθέντος μιας διαδικασίας X υπάρχει μοναδικό ζεύγος από volatility,drift που ικανοποιεί την $X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_s dW_s + \int_0^t \mu_s ds$. Η μοναδικότητα των σ_t, μ_t προέρχεται από την Doob-Meyer decomposition των semimartingales.

Στην ειδική περίπτωση όπου τα σ και μ εξαρτώνται από το W μόνο μέσω του X_t όπως λόγου χάρη $\sigma_t = \sigma(X_t, t)$ όπου σ(χ,t) είναι κάποια ντετερμινιστική συνάρτηση, η ισότητα $dX_t = \sigma(X_t, t) dW_t + \mu(X_t, t) dt$ καλείται στοχαστική διαφορική εξίσωση για το X.

Itô Calculus

Αποτελεί το ανάλογο για να μπορέσουμε να λύσουμε διαφορικές εξισώσεις που περιέχουν όρο Brown. Έστω έχουμε τη συνάρτηση $f(W_t) = W_t^2$ χρησιμοποιώντας τη σειρά Taylor προκύπτει το εξής $df(W_t) = f'(W_t) dW_t + \frac{1}{2} f''(W_t)(dW_t)^2 + ...$ Αν χρησιμοποιούσαμε Newtonian calculus τότε θα έπρεπε $(dW_t)^2 = 0$ όμως δεν συμβαίνει αυτό. Χωρίζοντας το διάστημα [0,t] σε υποδιαστήματα {0,t/n,2t/n,…,t} θα έχουμε προσεγγιστικά $\int_0^t (dW_t)^2 = \sum_{i=1}^n \left(W\left(\frac{ti}{n}\right) - W\left(\frac{t(i-1)}{n}\right) \right)^2$. Θεωρούμε $Z_{n,i} = \dfrac{W\left(\frac{ti}{n}\right) - W\left(\frac{t(i-1)}{n}\right)}{\sqrt{\frac{t}{n}}}$ τότε για κάθε n η ακολουθία $Z_{n,1}, Z_{n,2}, ...$ είναι ένα σύνολο από ισόνομες ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές N(0,1) επειδή $W\left(\frac{ti}{n}\right) - W\left(\frac{t(i-1)}{n}\right) \sim N\left(0, t/n\right)$ λόγω της συνθήκης 3 της κίνησης Brown. Επομένως $\int_0^t (dW_s)^2 \approx t \sum_{i=1}^n \frac{Z_{n,i}^2}{n}$ αλλά $Z_{n,i}^2 \sim X_1^2$ οπότε σύμφωνα με τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών $\frac{\sum_{i=1}^{n} Z_{n,i}^2}{n} \to \mu = 1$ και έτσι $\int_0^t (dW_s)^2 = t$ και $(dW_t)^2 = dt$. Άρα η σειρά Taylor γίνεται $df(W_t) = f^{'}(W_t)dW_t + \frac{1}{2} f^{''}(W_t)dt + 0$ και ονομάζεται ito formula.

<u>Αλλαγή μέτρου</u>

Εκτός από τα εργαλεία που έχουμε στη διάθεσή μας για τον χειρισμό των στοχαστικών διαδικασιών χρειαζόμαστε και κάτι ανάλογο για το χειρισμό του μέτρου. Εξάλλου η κίνηση Brown έχει νόημα κάτω από κάποιο μέτρο P. Εδώ θα ασχοληθούμε με ισοδύναμα μέτρα.

Δύο μέτρα P,Q είναι ισοδύναμα αν λειτουργούν στον ίδιο δειγματικό χώρο και συμφωνούν στο τι είναι δυνατό. Αν A είναι ένα γεγονός του δειγματικού χώρου και $P(A) > 0 \Leftrightarrow Q(A) > 0$. Με άλλα λόγια αν A είναι πιθανό κάτω από το P τότε είναι πιθανό και κάτω από το Q και αν είναι απίθανο κάτω από το P είναι απίθανο και κάτω από το Q. Γενικά δύο μέτρα πρέπει να είναι ισοδύναμα πριν χρησιμοποιηθούν τα Radon-Nikodym παράγωγα.

Εκείνο που θέλουμε αρχικά είναι η από κοινού συνάρτηση πιθανοφάνειας $f_P^n(x_1,...,x_n)$ για τη διαδικασία που παίρνει τιμές $\{x_1,...,x_n\}$ σε χρόνους $\{t_1,...,t_n\}$.

<u>Από κοινού συνάρτηση πιθανοφάνειας για κίνηση Brown</u>

Αν λάβουμε t_0, x_0 να είναι μηδέν και γράψουμε $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ τότε δοθέντος της συνθήκης 3 της κίνησης Brown που λέει ότι $\Delta W_i = W(t_i) - W(t_{i-1})$ είναι αμοιβαία ανεξάρτητα μπορούμε να γράψουμε

$$f_P^n(x_1,...,x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi \Delta t_i}} \exp\left(- \frac{(\Delta x_i)^2}{2\Delta t_i} \right)$$

<u>Radon-Nikodym derivative περίπτωση συνεχής.</u>

Υποθέτουμε δύο ισοδύναμα μέτρα P,Q. Δοθέντος ενός μονοπατιού ω για κάθε ταξινομημένο χρονικό πλέγμα $\{t_1,...,t_n\}$ με $t_n = T$ ορίζουμε x_i να είναι $W_{t_i}(\omega)$, και τότε το παράγωγο $\frac{dQ}{dP}$ για χρόνο T και πριν ορίζεται να είναι το όριο του λόγου πιθανοφανειών $\frac{dQ}{dP}(\omega) = \lim_{n \to \infty} \frac{f_Q^n(x_1,...x_n)}{f_P^n(x_1,...,x_n)}$ και το πλέγμα γίνεται πυκνό στο διάστημα [0,T]. Επίσης ισχύουν $E_Q(X_T) = E_P(\frac{dQ}{dP} X_T)$ και $E_Q(X_t / F_s) = \varsigma_s^{-1} E_P(\zeta_t X_t / F_s), s \le t \le T$ όπου ζ_t είναι η διαδικασία $E_P(\frac{dQ}{dP} / F_t)$ και X_t οποιαδήποτε διαδικασία προσαρμοσμένη στο history F_t.

C-M-G Αντίστροφο
Αν W_t είναι μία P-κίνηση Brown και Q είναι ένα μέτρο ισοδύναμο του P τότε υπάρχει μια F-previsible διαδικασία γ_t τέτοια ώστε $\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$ είναι Q-Brownian Motion. Επιπροσθέτως το Radon-Nikodym παράγωγο του Q σε αντιστοιχία του P είναι $\exp\left(-\int_0^T \gamma_t dW_t - \frac{1}{2}\int_o^T \gamma_t^2 dt\right)$ σε χρόνο T.
Γενικά το C-M-G θεώρημα είναι ένα ισχυρό εργαλείο για τον έλεγχο του drift οποιασδήποτε διαδικασίας.
Παράδειγμα.
Έστω η στοχαστική διαδικασία X τέτοια ώστε $dX_t = \sigma_t dW_t + \mu_t dt$ όπου W είναι P κίνηση Brown. Θέλουμε να βρούμε ένα μέτρο Q τέτοιο ώστε το drift της διαδικασίας X να μεταβληθεί σε $v_t dt$. Ξαναγράφουμε ως εξής $dX_t = \sigma_t\left(dW_t + \left(\frac{\mu_t - v_t}{\sigma_t}\right)dt\right) + v_t dt$ και θέτουμε $\gamma_t = \frac{\mu_t - v_t}{\sigma_t}$ τότε το γ ικανοποιεί το 3 του C-M-G θεωρήματος και πράγματι υπάρχει ένα νέο μέτρο Q τέτοιο ώστε $\widetilde{W}_t = W_t + \int_0^t \frac{\mu_s - v_s}{\sigma_s} ds$ είναι Q Brownian Motion. Το διαφορικό γίνεται $dX_t = \sigma_t d\widetilde{W}_t + v_t dt$. Όπως παρατηρούμε η αλλαγή γίνεται μόνο στο drift και η volatility παραμένει η ίδια.

Martingale Representation Theorem
Υποθέτουμε ότι M_t είναι μια Q-Martingale διαδικασία της οποίας η volatility σ_t ικανοποιεί τον όρο ότι είναι πάντα μη μηδενική. Αν N_t είναι μια άλλη Q-Martingale τότε υπάρχει F-previsible διαδικασία φ τέτοια ώστε $\int_0^T \phi_t^2 \sigma_t^2 dt < \infty$ με πιθανότητα 1 και η N μπορεί να γραφεί ως $N_t = N_0 + \int_0^t \phi_s d\mathrm{M}_s$. Επιπλέον η φ είναι μοναδική.

Κατασκευή Στρατηγικής
Έχοντας στη διάθεσή μας τα προηγούμενα μαθηματικά εργαλεία θα κατασκευάσουμε το απλούστερο οικονομικό μοντέλο για τιμολόγηση παραγώγων αυτό των Black- Scholes.
Χαρτοφυλάκιο
Ένα χαρτοφυλάκιο είναι ένα ζευγάρι από διαδικασίες ϕ_t, ψ_t οι οποίες περιγράφουν αντίστοιχα τις μονάδες security (είναι κάτι τυχαίο π.χ. μετοχές) και Bond (δεν περιέχει τυχαιότητα π.χ. μετρητά) τις οποίες

διαθέτουμε σε χρόνο t. Οι διαδικασίες μπορούν να πάρουν είτε θετικές είτε αρνητικές τιμές. Επίσης η φ πρέπει να είναι F-previsible.

Ένα χαρτοφυλάκιο είναι self-financing όταν η αλλαγή της αξίας του εξαρτάται μόνο από τη μεταβολή της τιμής του προιόντος (asset).
Γενικά αν (ϕ_t, ψ_t) είναι ένα χαρτοφυλάκιο με τιμή stock S_t και τιμή Bond B_t τότε $(\phi, \psi_{t\,t})$ είναι self-financing $\Leftrightarrow dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t$.

<u>Replicating Strategy</u>
Υποθέτουμε ότι είμαστε σε μια αγορά με B χωρίς ρίσκο και S με ρίσκο και θεωρούμε ένα παράγωγο που λήγει σε χρόνο T. Μια replicating Strategy για το X είναι ένα self –financing χαρτοφυλάκιο (φ,ψ) τέτοιο ώστε $\int_0^T \sigma_t^2 \phi_t^2 dt < \infty$ και $V_T = \phi_T S_T + \psi_T B_T = X$.

<u>Black-Scholes Μοντέλο</u>
Θεωρούμε ένα Bond της μορφής $B_t = \exp(rt)$ και ένα stock της μορφής $S_t = S_0 \exp(\sigma W_t + \mu t)$ όπου r το επιτόκιο. Προεξοφλούμε τα πάντα μέσω της προεξοφλητικής διαδικασίας B_t^{-1} επειδή είμαστε σε χρόνο 0 και έχουμε discounted stock $Z_t = B_t^{-1} S_t$ discounted claim $B_T^{-1} X$. Επομένως η στοχαστική διαφοροεξίσωση θα είναι $dZ_t = Z_t(\sigma dW_t + \left(\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt)$

<u>Βήμα 1</u>
Ψάχνουμε μέτρο Q τέτοιο ώστε η Z να είναι Martingale. Επικαλούμαστε το C-M-G θεώρημα και εισάγουμε ένα drift $\frac{\left(\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma}$ στην υπάρχουσα κίνηση Brown. Έτσι υπάρχει ένα ισοδύναμο μέτρο Q τέτοιο ώστε $\widetilde{W}_t$ Q-Brownian Motion και συνεπώς Martingale. Ομοίως και Z Martingale αφού $dZ_t = \sigma Z_t d\widetilde{W}_t$.

<u>Βήμα 2</u>
Χρειαζόμαστε μια διαδικασία που να τυχαιοποιεί το προεξοφλημένο παράγωγο και να είναι επίσης Q-Martingale. Έτσι σχηματίζουμε τη διαδικασία $E_t = E_Q\left(B_T^{-1} X / F_t\right)$.

<u>Βήμα 3</u>
Βρίσκουμε μια διαδικασία φ τέτοια ώστε $dE_t = \phi_t dZ_t$. Αυτή προκύπτει από το Martingale Representation Theorem αφού Z_t, E_t είναι Q-Martingale.

Βήμα 4

Κατασκευάζουμε το χαρτοφυλάκιο $V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t$ έχοντας ϕ_t μονάδες stock σε χρόνο t και $\psi_t = E_t - \phi_t Z_t$ μονάδες Bond. Οπότε προκύπτει ότι $V_t = B_t E_t$.

Βήμα 5

Από το παραπάνω αποδεικνύεται ότι V_t είναι self-financing

Βήμα 6

Αποδεικνύεται επίσης ότι είναι και replicating.

Βήμα 7

Κατασκευάζουμε το $V_0 = E_0 = E_Q(X)$

Επίσης έχουμε ότι $V_t = B_t E_Q\left(B_T^{-1} X / F_t\right) = e^{-r(T-t)} E_Q(X / F_t)$

Τιμολόγηση ενός call option.

Θεωρούμε $\max(S_T - k, 0) = (S_T - k)^+$. Το call option εξασκείται μόνο όταν αυτό είναι θετικό. Επομένως σύμφωνα με την προηγούμενη formula ισχύει $V_0 = e^{-rT} E_Q\left((S_T - k)^+\right)$. Όμως χρησιμοποιώντας την Q-Brownian Motion προκύπτει ότι $S_t = s\exp\left(\sigma \widetilde{W}_t + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right), s = S_0$. Γνωρίζουμε ότι $\widetilde{W}_T \sim N(0,T) \Rightarrow \sigma\widetilde{W}_T \sim N(0, \sigma^2 T)$ κάτω από το μέτρο Q, επομένως $Z = -\frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\widetilde{W}_T \sim N\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T\right)$ οπότε γράφουμε $V_0 = e^{-rT} E\left(\left(se^{(Z+rT)} - k\right)^+\right)$ το οποίο είναι ίσο με $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_{\log\left(k/s\right)-rT}^{\infty} \left(se^x - ke^{-rT}\right)\exp\left(-\frac{\left(x + \frac{1}{2}\sigma^2 T\right)^2}{2\sigma^2 T}\right)dx$. Το κάτω όριο του ολοκληρώματος οφείλεται στο ότι πρέπει $se^{(Z+rT)} - k > 0$. Γνωρίζουμε επίσης από την κανονική κατανομή ότι $\Phi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right)dy$ συνεπώς η τελική μορφή του Black-Scholes είναι η εξής

$$V(s,T) = s\Phi\left(\frac{\log\frac{s}{k} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\log\frac{s}{k} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε s=20,r=0.06,T=2 και σ=0.18 προκύπτει $V_0 = 1.221$ (Premium).

Τιμολόγηση Παραγώγων σε Διακριτό Χρόνο

Θα δούμε τώρα τι συμβαίνει στη διακριτή περίπτωση.
Έστω S ένα σύνολο δύο σημείων {-1,1} και Σ το σύνολο των υποσυνόλων του S. μ είναι το μέτρο πιθανότητας στο (S,Σ) με μ({1})=ρ=1-μ({-1}).

Έστω $N \in \mathrm{N}$, ορίζουμε $(\Omega, F, P) = (S, \Sigma, \mu)^N$ έτσι ώστε ένα τυπικό στοιχείο του Ω είναι $\omega = (\omega_1, \ldots \omega_N), \omega_k \in \{-1,1\}$. Ορίζουμε $\varepsilon_k : \Omega \to R$ με $\varepsilon_k(\omega) = \omega_k$ έτσι ώστε $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$ είναι ισόνομες ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέτρο μ. Για $0 \le n \le N$ ορίζουμε $Z_n = \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon_k - 2p + 1)$ και

$$F_n = \sigma(Z_0, \ldots, Z_n) = \sigma(\varepsilon, \ldots, \varepsilon_n) \text{ ενώ } E(\varepsilon_k) = 1p + (-1)(1-p) = 2p - 1$$

οπότε προκύπτει ότι το Z είναι Martingale.

<u>Λήμμα</u>
Αν M είναι Martingale στο $(\{F_n : 0 \le n \le N\}, P)$ τότε υπάρχει μοναδική previsible διαδικασία H τέτοια ώστε

$$M = M_0 + H \bullet Z \Rightarrow M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} H_k (Z_k - Z_{k-1})$$

<u>Τιμολόγηση Option Black-Scholes</u>
Είμαστε σε μια οικονομία και υποθέτουμε ότι οι αξίες των μονάδων stock και Bond μεταβάλλονται απότομα σε χρόνους 1,2,…,N. Για n=0,1,…,N γράφουμε $B_n = (1+r)^n B_0, S_n$ για την αξία μιας μονάδας Bond και μιας μονάδας stock αντίστοιχα καθ' όλη τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος (n,n+1).
Σε χρόνο 0 ξεκινάμε με μια περιουσία χ που αποτελείται από A_0 μονάδες stock και V_0 μονάδες Bond έτσι ώστε $x = A_0 S_0 + V_0 B_0$. Μεταξύ των χρόνων 0 και 1 επενδύουμε τις μονάδες (π.χ. στοίχημα) και έτσι ελάχιστα πριν το χρόνο 1 αυτές έχουν μετατραπεί σε A_1, V_1 ενώ η περιουσία παραμένει η ίδια $x = A_1 S_0 + V_1 B_0$. Παρόμοια ελάχιστα πριν το χρόνο n η περιουσία είναι $X_{n-1} = A_n S_{n-1} + V_n B_{n-1}$ ενώ ακριβώς μετά το χρόνο n γίνεται $X_n = A_n S_n + V_n B_n$. Η μεταβολή της είναι $X_n - X_{n-1} = A_n(S_n - S_{n-1}) + V_n(B_n - B_{n-1})$ (1) αλλά $B_n - B_{n-1} = rB_{n-1}$ και $S_n - S_{n-1} = R_n S_{n-1}$ όπου R_n είναι το τυχαίο επίπεδο επιτοκίου για το stock σε χρόνο n. Οπότε ξαναγράφουμε την (1) ως εξής
$X_n - X_{n-1} = A_n R_n S_{n-1} - rV_n B_{n-1}$ αλλά $rV_n B_{n-1} = rX_{n-1} - rA_n S_{n-1}$ συνεπώς η (1) γίνεται $X_n - X_{n-1} = rX_{n-1} + A_n S_{n-1}(R_n - r)$

Θέτουμε $Y_n = (1+r)^{-n} X_n$ (2) και $Y_n - Y_{n-1} = (1+r)^{-(n-1)} A_n S_{n-1}(R_n - r)$ (3) το

Y_n είναι η προεξοφλημένη αξία της περιουσίας σε χρόνο n έτσι ώστε η εξέλιξη (3) γίνεται κεντρικού ενδιαφέροντος.
Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε και το μέτρο πιθανότητας όπως ορίστηκε προηγουμένως. Κατασκευάζουμε ένα μοντέλο στο οποίο κάθε R_n παίρνει μόνο τιμές a,b στο $(-1,\infty)$, όπου a<r<b θέτοντας $R_n = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\varepsilon_n$ το οποίο είναι τυχαία μεταβλητή εφόσον ε_n τυχαία μεταβλητή. Άρα αφού το R_n παίρνει δύο τιμές a, b μπορεί να θεωρηθεί σαν μια τυχαία μεταβλητή Bernoulli και εφόσον r σταθερό η πιο λογική τιμή που μπορεί να πάρει είναι $E(R_n) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}(2p-1)$ συνεπώς

$R_n - r = \frac{1}{2}(b-a)(\varepsilon_n - 2p + 1) = \frac{1}{2}(b-a)(Z_n - Z_{n-1})$ (4)

Μπορούμε τώρα να επιλέξουμε $p = \frac{r-a}{b-a} = P(R_n \le E(R_n))$ της ομοιόμορφης γιατί p συνεχής στο (0,1). Από (3) και (4) παρουσιάζεται το Y σαν στοχαστικό ολοκλήρωμα σε σχέση με το Z.

Περιεχόμενα

Βιβλιογραφία

- Hull J. (1993) . Options futures and other derivatives.
Prentice-Hall.

- Baxter M and Rennie A. (1996) Financial Calculus.
Cambridge University Press.

- David Williams (1990) Probability with Martingales
Cambridge University Press.