

## 2. Μετατροπές μεταξύ συστημάτων αρίθμησης

### 2.1 Μετατροπή αριθμών από άλλα συστήματα στο δεκαδικό

#### Εκπαιδευτικός στόχος

Ο στόχος των ασκήσεων που ακολουθούν είναι να κατανοήσουν οι φοιτητές τον τρόπο που γίνεται η μετατροπή αριθμών από άλλα συστήματα (π.χ. δυαδικό, οκταδικό, δεκαεξαδικό, κ.ά.) στο δεκαδικό.

#### Μεθοδολογία επίλυσης:

Όπως έχει αναφερθεί, η μετατροπή ενός αριθμού οποιουδήποτε αριθμητικού συστήματος στον αντίστοιχο αριθμό του δεκαδικού συστήματος γίνεται υπολογίζοντας την τιμή της παράστασης:

$$x = \alpha_{n-1} \times \beta^{n-1} + \alpha_{n-2} \times \beta^{n-2} + \dots + \alpha_1 \times \beta^1 + \alpha_0 \times \beta^0 + \alpha_{-1} \times \beta^{-1} + \dots + \alpha_{-m} \times \beta^{-m}$$

όπου «β» η βάση του συστήματος στο οποίο είναι ο συγκεκριμένος αριθμός. Έτσι:

Ο δυαδικός αριθμός 10011 στο δεκαδικό σύστημα έχει την τιμή

$$1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 = 16 + 2 + 1 = (19)_{10}.$$

Ο οκταδικός αριθμός (7123,35)<sub>8</sub> στο δεκαδικό σύστημα έχει την τιμή

$$7 \times 8^3 + 1 \times 8^2 + 2 \times 8 + 3 + 3 \times 8^{-1} + 5 \times 8^{-2} = 3584 + 64 + 16 + 3 + 0,375 + 0,078125 = (3667,453125)_{10}.$$

Ο δεκαεξαδικός αριθμός (FC27)<sub>16</sub> είναι ισοδύναμος με το δεκαδικό

$$15 \times 16^3 + 12 \times 16^2 + 2 \times 16 + 7 = 61440 + 3072 + 32 + 7 = (64551)_{10}.$$

#### 2.1.1 Εκφώνηση Άσκησης

Να μετατραπεί ο αριθμός (132,013)<sub>4</sub> του τετραδικού συστήματος σε αντίστοιχο αριθμό του δεκαδικού συστήματος.

#### Επίλυση

$$(132,013)_4 = 1 \times 4^2 + 3 \times 4^1 + 2 \times 4^0 + 0 \times 4^{-1} + 1 \times 4^{-2} + 3 \times 4^{-3} = \dots = (30,109375)_{10}$$

### 2.1.2 Εκφώνηση Άσκησης

Μετατρέψτε τον αριθμό  $(123,604)_8$  του οκταδικού συστήματος αρίθμησης στον αντίστοιχο αριθμό του δεκαδικού συστήματος.

#### Επίλυση

Η μετατροπή του αριθμού 123,604 του συστήματος αρίθμησης με βάση 8 σε αντίστοιχο αριθμό του δεκαδικού συστήματος είναι η ακόλουθη:

$$(123,604)_8 = 1 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 3 \times 8^0 + 6 \times 8^{-1} + 0 \times 8^{-2} + 4 \times 8^{-3} = 64 + 16 + 3 + 0.75 + 0,0078125 = (83,7578125)_{10}.$$

### 2.1.3 Εκφώνηση Άσκησης

Μετατρέψτε τον δυαδικό αριθμό  $(11111100)_2$  στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης με δεδομένο ότι αναπαριστά έναν μη προσημασμένο αριθμό οκτώ δυαδικών ψηφίων

#### Επίλυση

$$(11111100)_2 = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 0 + 0 = (252)_{10}$$

### 2.1.4 Εκφώνηση Άσκησης

Θεωρήστε έναν υπολογιστή με μήκος λέξης 8 δυαδικών ψηφίων στον οποίο τα 3 τελευταία ψηφία αφιερώνονται στο κλασματικό μέρος. Ποιοι δεκαδικοί αριθμοί είναι οι ακόλουθοι δυαδικοί αριθμοί στον εν λόγω υπολογιστή;

1. 0000 0010
2. 0100 0010
3. 0100 0111

#### Επίλυση

$$(00000,010)_2 = 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} = 0,25$$

$$(01000,010)_2 = 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 0 \times 2^{-3} = 8,25$$

$$(01000,111)_2 = 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = 8,875$$

## 2.2 Μετατροπή αριθμών από το δεκαδικό στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης

### Εκπαιδευτικός στόχος

Ο στόχος των ασκήσεων που ακολουθούν είναι να ξεκαθαρίσουν οι φοιτητές τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η μετατροπή αριθμών από το δεκαδικό στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.

### 2.2.1 Εκφώνηση Άσκησης

Μετατρέψτε τον δεκαδικό αριθμό  $(83,7578125)_{10}$  στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.

### Σκεπτικό Επίλυσης

Για τη μετατροπή ενός θετικού ακεραίου αριθμού του δεκαδικού συστήματος στο δυαδικό, εργαζόμαστε όπως περιγράφηκε στην παράγραφο 2.2.2. Πιο συγκεκριμένα, για να μετατρέψουμε το ακέραιο μέρος του αριθμού, το διαιρούμε με τη βάση του συστήματος και παίρνουμε ένα υπόλοιπο ( $Y$ ) και ένα πηλίκο ( $\Pi$ ). Το πηλίκο διαιρείται και πάλι με το  $\beta$  και παίρνουμε ένα νέο πηλίκο  $\Pi$  και ένα νέο υπόλοιπο  $Y$ . Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι το πηλίκο  $\Pi$  να γίνει 0. Η ζητούμενη αναπαράσταση είναι τα υπόλοιπα ( $Y$ ), με την αντίστροφη σειρά από εκείνη που τα βρήκαμε. Για τη μετατροπή του κλασματικού μέρους εργαζόμαστε ως εξής: πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό επί 2. Σημειώνουμε το ακέραιο μέρος του αποτελέσματος και με το κλασματικό μέρος επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία. Η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου βρούμε στο κλασματικό μέρος του αριθμού το 0 ή (αν αυτό δε γίνει) μέχρι να φτάσουμε στην επιθυμητή ακρίβεια (π.χ. 3 κλασματικά δυαδικά ψηφία). Για το αποτέλεσμα παίρνουμε τα ψηφία που βρήκαμε στο ακέραιο μέρος κάθε πράξης.

### Επίλυση

Η διαδικασία για το ακέραιο μέρος είναι η ακόλουθη:

83	
41	1
20	1
10	0
5	0
2	1
1	0

0	1
---	---

Ενώ η διαδικασία για το κλασματικό μέρος φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα

Αριθμός	Πολλαπλασιασμός επί 2	Αποτέλεσμα	Ακέραιο μέρος	Κλασματικό μέρος
0.7578125	×2	1.515625	1	0.515625
0.515625	×2	1.03125	1	0.03125
0.03125	×2	0.0625	0	0.0625
0.0625	×2	0.125	0	0.125
0.125	×2	0.25	0	0.25
0.25	×2	0.5	0	0.5
0.5	×2	1	1	0.0

Το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει παίρνοντας τα υπόλοιπα της διαίρεσης με την αντίστροφη σειρά για να σχηματίσουμε το ακέραιο μέρος, και τα ακέραια μέρη των πολλαπλασιασμών με τη σειρά που προκύπτουν για να σχηματίσουμε το μέρος μετά την υποδιαστολή (κλασματικό):

$$83,7578125 = (1010011,1100001)_2$$

### 2.2.2 Εκφώνηση Άσκησης

Μετατρέψτε τον δεκαδικό αριθμό  $(39,625)_{10}$  στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.

#### Επίλυση

Η διαδικασία για το ακέραιο μέρος είναι η ακόλουθη:

39	
19	1
9	1
4	1
2	0
1	0
0	1

Η διαδικασία για το κλασματικό μέρος φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

Αριθμός	Πολλαπλασιασμός επί 2	Αποτέλεσμα	Ακέραιο μέρος	Κλασματικό μέρος
0.625	×2	1.25	1	0.25
0.25	×2	0.5	0	0.5
0.5	×2	1.0	1	0.0

Το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει παίρνοντας τα υπόλοιπα της διαίρεσης με την αντίστροφη σειρά, για να σχηματίσουμε το ακέραιο μέρος, και τα ακέραια μέρη των πολλαπλασιασμών με τη σειρά που προκύπτουν, για να σχηματίσουμε το μέρος μετά την υποδιαστολή (κλασματικό):

$$39,625 = (100111,101)_2$$

## 2.3 Μετατροπή αριθμών μεταξύ του δυαδικού και του δεκαεξαδικού συστήματος αρίθμησης

### Εκπαιδευτικός στόχος

Ο στόχος των ασκήσεων που ακολουθούν είναι να ξεκαθαρίσουν οι φοιτητές τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η μετατροπή αριθμών από το δυαδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης και αντίστροφα.

### Μεθοδολογία επίλυσης

Η μετατροπή από το δυαδικό σύστημα στο δεκαεξαδικό δεν απαιτεί πράξεις. Χωρίζουμε τον δυαδικό από τα δεξιά προς τα αριστερά σε ομάδες των τεσσάρων ψηφίων (bits) και στη συνέχεια μετατρέπουμε καθεμία από αυτές στον αντίστοιχο δεκαεξαδικό αριθμό (βλέπε πίνακα αντιστοιχιών). Όταν υπάρχει υποδιαστολή (ο αριθμός έχει και κλασματικό μέρος), τότε ο χωρισμός ξεκινάει από την υποδιαστολή και αριστερά για το ακέραιο μέρος και από την υποδιαστολή και δεξιά για το κλασματικό.

Δυαδικό (BIN)	Δεκαδικό (DEC)	Δεκαεξαδικό (HEX)
0000	0	0
0001	1	1
0010	2	2
0011	3	3
0100	4	4
0101	5	5
0110	6	6
0111	7	7
1000	8	8
1001	9	9
1010	10	A
1011	11	B
1100	12	C
1101	13	D
1110	14	E
1111	15	F

Αντίστοιχα, η μετατροπή από το δεκαεξαδικό στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης γίνεται αντικαθιστώντας κάθε δεκαεξαδικό ψηφίο με την αντίστοιχη τετράδα δυαδικών ψηφίων (βλέπε πάλι σχετικό πίνακα αντιστοιχιών).

### 2.3.1 Εκφώνηση Άσκησης

Μετατρέψτε τον ακόλουθο αριθμό από το δεκαεξαδικό στο δυαδικό σύστημα:  $(FA43,329F)_{16}$

#### Επίλυση

Μετατρέπουμε ψηφίο-ψηφίο τον δεκαεξαδικό αριθμό  $FA43,329F$ , χρησιμοποιώντας τον πίνακα αντιστοίχισης των δεκαεξαδικών σε δυαδικούς. Έτσι έχουμε το αποτέλεσμα:

1111 1010 0100 0011, 0011 0010 1001 1111

### 2.3.1 Εκφώνηση Άσκησης

Μετατρέψτε τον δυαδικό αριθμό  $(1011010101,011010)_2$  στον αντίστοιχο του δεκαεξαδικό.

#### Επίλυση

Χωρίζουμε τον δυαδικό αριθμό σε τετράδες, ξεκινώντας από την υποδιαστολή προς τα αριστερά (για το ακέραιο μέρος) και από την υποδιαστολή προς τα δεξιά (για το κλασματικό μέρος) και έτσι έχουμε τον δυαδικό αριθμό:

0010 1101 0101, 0110 1000

Στη συνέχεια, με βάση τον πίνακα έχουμε το αποτέλεσμα:  $2D5,68$

Άρα  $(001011010101,01101000)_2 = (2D5,68)_{16}$ .

## 2.4 Μετατροπή αριθμών μεταξύ του δυαδικού και του οκταδικού συστήματος αρίθμησης

### Εκπαιδευτικός στόχος

Ο στόχος των ασκήσεων που ακολουθούν είναι να ξεκαθαρίσουν οι φοιτητές τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η μετατροπή αριθμών από το δυαδικό στο οκταδικό σύστημα αρίθμησης και αντίστροφα.

### Μεθοδολογία Επίλυσης

Η μετατροπή από το δυαδικό σύστημα στο οκταδικό (όπως και με το δεκαεξαδικό) δεν απαιτεί πράξεις: Χωρίζουμε τον δυαδικό από τα δεξιά προς τα αριστερά σε ομάδες των τριών ψηφίων (bits) και στη συνέχεια μετατρέπουμε κάθε μία από αυτές στον αντίστοιχο οκταδικό αριθμό (βλέπε πίνακα

αντιστοιχιών). Όταν υπάρχει υποδιαστολή (ο αριθμός έχει και κλασματικό μέρος), τότε ο χωρισμός ξεκινάει από την υποδιαστολή και αριστερά για το ακέραιο μέρος και από την υποδιαστολή και δεξιά για το κλασματικό.

Δυαδικό (BIN)	Δεκαδικό (DEC)	Οκταδικό (OCT)
000	0	0
001	1	1
010	2	2
011	3	3
100	4	4
101	5	5
110	6	6
111	7	7

Αντίστοιχα, η μετατροπή από το οκταδικό στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης, γίνεται αντικαθιστώντας κάθε οκταδικό ψηφίο με την αντίστοιχη τριάδα δυαδικών ψηφίων (βλέπε πάλι σχετικό πίνακα αντιστοιχιών).

#### 2.4.1 Εκφώνηση

Μετατρέψτε τον αριθμό  $(7443,32)_8$  του οκταδικού συστήματος αρίθμησης στον αντίστοιχο αριθμό του δυαδικού συστήματος.

##### Επίλυση

Μετατρέπουμε ψηφίο-ψηφίο τον οκταδικό αριθμό 7443,32 χρησιμοποιώντας τον πίνακα αντιστοίχισης των οκταδικών σε δυαδικούς και έτσι έχουμε τον δυαδικό αριθμό:

111 100 100 011, 011 010

#### 2.4.2 Εκφώνηση

Μετατρέψτε τον δυαδικό αριθμό  $(10110101,01)_2$  στον αντίστοιχο του οκταδικό.

##### Επίλυση

Χωρίζουμε τον δυαδικό αριθμό σε τριάδες, ξεκινώντας από την υποδιαστολή προς τα αριστερά (για το ακέραιο μέρος) και από την υποδιαστολή προς τα δεξιά (για το κλασματικό μέρος) και έτσι έχουμε τον: 010 110 101, 010

Στη συνέχεια, με βάση τον πίνακα έχουμε το αποτέλεσμα: 2 6 5, 2. Άρα  $(10110101,01)_2 = (265,2)_8$ .

## 2.5 Γενικές ασκήσεις εξοικείωσης

### Εκπαιδευτικός στόχος

Ο στόχος των ασκήσεων που ακολουθούν είναι να ξεκαθαρίσουν οι φοιτητές τον τρόπο με τον οποίο πραγματοποιείται η μετατροπή αριθμών μέσα από γενικές ασκήσεις.

#### 2.5.1 Εκφώνηση

Μετατρέψτε τον ακόλουθο αριθμό του συστήματος αρίθμησης με βάση 4  $(123,013)_4$  στον αντίστοιχο αριθμό του δεκαδικού συστήματος.

#### Επίλυση

Η μετατροπή του αριθμού 123,013 του συστήματος αρίθμησης με βάση 4 σε αντίστοιχο αριθμό του δεκαδικού συστήματος είναι η ακόλουθη:

$$(123,013)_4 = 1 \times 4^2 + 2 \times 4^1 + 3 \times 4^0 + 0 \times 4^{-1} + 1 \times 4^{-2} + 3 \times 4^{-3} = 16 + 8 + 3 + 0,0625 + 0,046875 = (27,109375)_{10}.$$

#### 2.5.2 Εκφώνηση

Μετατρέψτε τον αριθμό  $(7443,32)_8$  από το οκταδικό στο δεκαεξαδικό σύστημα με δύο τρόπους:

(α) μέσω του δυαδικού, (β) μέσω του δεκαδικού συστήματος.

#### Επίλυση

(α) Μετατρέπουμε ψηφίο-ψηφίο τον οκταδικό αριθμό  $(7443,32)_8$  σε δυαδικό αριθμό, χρησιμοποιώντας τον πίνακα αντιστοίχισης των οκταδικών σε δυαδικούς:

$$111\ 100\ 100\ 011, 011\ 010$$

Στη συνέχεια, γίνεται ομαδοποίηση ανά 4 bits (για να έχουμε στο κλασματικό μέρος πλήθος ψηφίων πολλαπλάσιο του 4, προσθέτουμε δύο μηδενικά στο τέλος):

$$1111\ 0010\ 0011, 0110\ 1000$$

Τέλος, μετατρέπουμε τον αριθμό, χρησιμοποιώντας τον πίνακα αντιστοίχισης των δυαδικών σε δεκαεξαδικούς.

Το τελικό αποτέλεσμα είναι  $(F23,68)_{16}$



(β) Η μετατροπή του οκταδικού αριθμού  $(7443,32)_8$  σε αντίστοιχο αριθμό του δεκαδικού συστήματος γίνεται ως εξής:

$$(7443,32)_8 = 7 \times 8^3 + 4 \times 8^2 + 4 \times 8^1 + 3 \times 8^0 + 3 \times 8^{-1} + 2 \times 8^{-2} =$$

$$3584 + 256 + 32 + 3 + 0,375 + 0,03125 = (3875,40625)_{10}$$

Το ακέραιο μέρος του δεκαδικού διαιρείται διαδοχικά με το 16 (βάση) και συγκεντρώνονται τα αντίστοιχα υπόλοιπα διαίρεσης, ενώ το κλασματικό μέρος πολλαπλασιάζεται διαδοχικά με το 16 και συγκεντρώνονται τα ακέραια ψηφία που προκύπτουν.

Ακέραιο μέρος = 3875

3875	
242	3
15	2
0	15

Κλασματικό μέρος = 0.40625

$$0,40625 \times 16 = 6,5$$

$$0,5 \times 16 = 8$$

και τελικά  $(3875,40625)_{10} = (\mathbf{F23,68})_{16}$