ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Ακαδημαϊκό Έτος: 2023-2024

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΙΙΙ

(Θεωρία Ουρών)

Υποδείξεις για τη Λύση των Ασκήσεων

Άσκηση 1

Σ' ένα κινηματογράφο υπάρχει ένα ταμείο. Ο ταμίας είναι σε θέση να εξυπηρετήσει κατά μέσο όρο 6 άτομα το λεπτό. Οι πελάτες καταφθάνουν τις ώρες αιχμής με μέσο ρυθμό 3 άτομα το λεπτό. Ας υποθέσουμε ότι οι αφίξεις ακολουθούν κατανομή Poisson και ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί εκθετική κατανομή.

(α) Πόσο είναι το μέσο πλήθος πελατών που αναμένουν στην ουρά;

(β) Πόσος είναι ο μέσος χρόνος αναμονής;

(γ) Πόσο είναι το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα;

(δ) Πόσος είναι ο μέσος χρόνος παραμονής του πελάτη στο σύστημα;

(ε) Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης που καταφθάνει να χρειαστεί να περιμένει;

(στ) Αν υποθέσουμε ότι το κόστος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα εξυπηρέτησης ανέρχεται στις 50 χρηματικές μονάδες το λεπτό και το κόστος εξυπηρέτησης ανέρχεται στις 200 χρηματικές μονάδες το λεπτό, υπολογίστε το λειτουργικό κόστος του συστήματος στη μονάδα του χρόνου.

Απάντηση

Πρόκειται για σύστημα με μία θέση εξυπηρέτησης (M/M/1) με ρυθμό αφίξεων λ = 3 άτομα ανά λεπτό και ρυθμό εξυπηρέτησης μ = 6 άτομα ανά λεπτό. Επομένως λ/μ < 1, δηλαδή υπάρχει κατάσταση ισορροπίας.

(α) Το μέσο πλήθος πελατών στην ουρά είναι:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{3^2}{6\cdot(6-3)} = 0,5 \text{ πελάτες}$$

(β) Ο μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά είναι:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0,5}{3} = \frac{1}{6} \text{ λεπτά}$$

(γ) Το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα είναι:

$$L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{3}{6-3} = 1 \text{ πελάτης}$$

(δ) Ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα είναι: $W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{3}$ λεπτά

(ε) Η πιθανότητα ένας πελάτης που καταφθάνει στο σύστημα να χρειαστεί να περιμένει είναι

$$P_w = 1 - P_0 = 1 - (1-\rho) = \rho = \frac{1}{2}$$

(στ) Το λειτουργικό κόστος του συστήματος είναι:

$TC = c_s \cdot s + c_w \cdot L = 200 \cdot 1 + 50 \cdot 1 = 250$ χ.μ. ανά λεπτό.

Άσκηση 2

Στην κουζίνα ενός τμήματος μιας φοιτητικής εστίας υπάρχουν δύο εστίες μαγειρέματος κι ένας καναπές 3 θέσεων. Στο τμήμα αυτό ζουν 8 φοιτητές και καθένας από αυτούς πάει κατά μέσο όρο κάθε 2 ώρες στην εστία για να μαγειρέψει (αν δεν μαγειρεύει ήδη). Ο ενδιάμεσος χρόνος κατανέμεται εκθετικά. Αν μόλις μπει στην κουζίνα οι δύο εστίες είναι κατειλημμένες, ο φοιτητής αναζητά θέση στον καναπέ. Αν και αυτός είναι κατειλημμένος, ο φοιτητής επιστρέφει στο δωμάτιό του και δοκιμάζει αργότερα. Οι φοιτητές ξοδεύουν έναν εκθετικά κατανεμημένο χρόνο για μαγείρεμα με μέση τιμή 1 ώρα.

1) Σχεδιάστε το διάγραμμα μετάβασης του συστήματος.

2) Γράψτε το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας. (Προσοχή! Δεν ζητείται η επίλυση του συστήματος)

Απάντηση:

Το σύστημα έχει έξι δυνατές καταστάσεις: $S_i,\ i = 0{,}1{,}2{,}3{,}4$ kai 5.

Ο ρυθμός άφιξης είναι λ, όπου

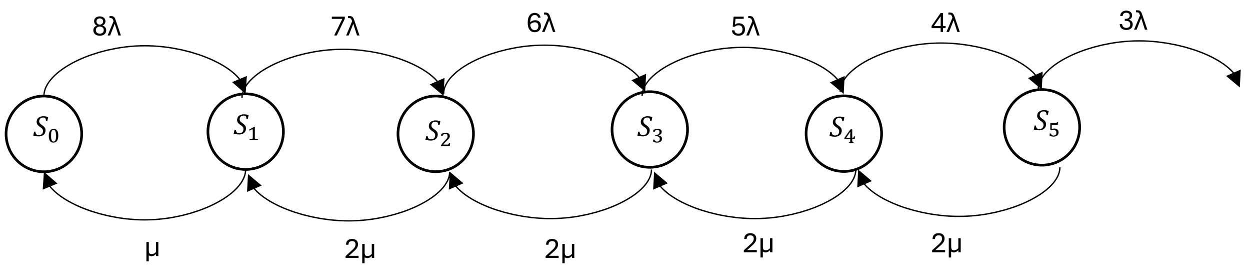
$$\frac{1}{\lambda} = 2 \Longrightarrow \lambda = 0.5$$

Ο ρυθμός εξυπηρέτησης σε κάθε έναν από τους δύο σταθμούς εξυπηρέτησης (εστίες) είναι μ, όπου

$$\frac{1}{\mu} = 1 \Longrightarrow \mu = 1$$

Ο πληθυσμός είναι πεπερασμένος (8) και η χωρητικότητα της ουράς είναι 3.

1) Το διάγραμμα μετάβασης είναι το εξής:



2) Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$8\lambda P_0 = \mu P_1$$
$$7\lambda P_1 = 2\mu P_2$$
$$6\lambda P_2 = 2\mu P_3$$
$$5\lambda P_3 = 2\mu P_4$$
$$4\lambda P_4 = 2\mu P_5$$
$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 1$$

Άσκηση 3

Στην αποθήκη εργαλείων μιας βιομηχανικής μονάδας προσέρχονται για να πάρουν κάποιο εργαλείο τεχνίτες με ρυθμό 0,80 ανά λεπτό ακολουθώντας κατανομή Poisson. Η αποθήκη εξυπηρετείται από s υπαλλήλους. Ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί για κάθε υπάλληλο εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1 λεπτό. Όταν όλοι οι υπάλληλοι είναι απασχολημένοι, οι τεχνίτες που φτάνουν προσχωρούν στην ουρά και εξυπηρετούνται με τη σειρά άφιξής τους, μόλις κάποιοι υπάλληλοι καταστούν διαθέσιμοι. Η αμοιβή των τεχνιτών και των υπαλλήλων της αποθήκης είναι 8 και 3 ευρώ την ώρα αντίστοιχα. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των υπαλλήλων που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο συνολικό ωριαίο κόστος από την απώλεια του παραγωγικού χρόνου των τεχνητών στην αποθήκη και από την αργία των υπαλλήλων της, όταν αυτοί δεν είναι απασχολημένοι.

Απάντηση:

Είναι $\lambda = 0{,}80\ {}^{\tau\varepsilon\chi\nu\acute{\iota}\tau\varepsilon\varsigma}/_{min}$ και $\frac{1}{\mu} = 1\ {}^{min}/_{\tau\varepsilon\chi\nu\acute{\iota}\tau\eta} \Rightarrow \mu = 1$.

Οπότε $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}80$.

Για να μπορεί να αποκατασταθεί ισορροπία πρέπει $\frac{\lambda}{s\mu} < 1 \Rightarrow s > 0.80 \Rightarrow s \geq 1$. Δηλαδή, πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένας υπάλληλος. Όμως αυτή δεν είναι η πιο οικονομική λύση.

Έστω $c_\Pi = 8\ {}^{€}/_{h}$ η αμοιβή κάθε τεχνίτη και $c_L = 3\ {}^{€}/_{h}$ η αμοιβή κάθε υπάλληλου. Το ανά ώρα αναμενόμενο κόστος είναι:

$$\overline{K}(s) = c_\Pi L + c_L(s-\rho)$$

όπου L ο αναμενόμενος αριθμός τεχνιτών στην αποθήκη και $s-\rho$ ο αναμενόμενος αριθμός υπαλλήλων σε αργία.

Είναι:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!}\cdot\frac{s}{s-\rho}}$$

$$L_q = \frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!\,(s-\rho)^2}P_0$$

$$L = L_q + \rho$$

Για τις διάφορες τιμές του s βρίσκουμε:

s	L_q	L	$c_\Pi L$	$s-\rho$	$c_L(s-\rho)$	$\overline{K}(s)$
1	3.2	4.8	38.4	0.2	0.6	39
2	0.153	0.953	7.624	1.2	3.6	11.224
3	0.014	0.819	6.552	2.2	6.6	13.112
4	0.005	0.805	6.44	3.2	9.6	16.04

Το ελάχιστο μέσο ωριαίο κόστος είναι 11,224 και επιτυγχάνεται με 2 υπαλλήλους.

(Σημείωση: Η παραπάνω λύση παρουσιάζεται συνοπτικά. Στις εργασίες έπρεπε να εξηγηθεί λεπτομερώς πώς προκύπτει κάθε αποτέλεσμα ή να υποβληθεί το σχετικό αρχείο Excel με τους υπολογισμούς).