Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

Τεχνικές Ανάλυσης Διοικητικών Αποφάσεων

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΙΙ_Θεωρία Ουρών

Υπεύθυνος Μαθήματος: Γιαννίκος Ιωάννης

Αναπληρωτής Καθηγητής

i.giannikos@upatras.gr

Επιμέλεια Φροντιστηρίου: Μανουσάκης Γεώργιος

Ε.ΔΙ.Π.

gemini@upatras.gr

2018 – 2019

ΟΡΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

Με τον όρο ***Σύστημα Αναμονής*** εννοούμε την ***Γραμμή Αναμονής*** (***ουρά***) και το ***Σύστημα Εξυπηρέτησης***.

$N(t)$: ο αριθμός των πελατών στο σύστημα την χρονική στιγμή t (***κατάσταση του συστήματος***).

$L(t)$: ο αριθμός των πελατών στην ουρά την χρονική στιγμή t.

s: ο αριθμός των εξυπηρετητών (σταθμών εξυπηρέτησης).

$V(t)$: ο απαιτούμενος χρόνος για την εξυπηρέτηση όλων των πελατών που υπάρχουν στο σύστημα τη χρονική στιγμή t.

W: ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα, δηλαδή ο χρόνος που μεσολαβεί από την στιγμή που ο πελάτης αυτός προσχωρεί στην ουρά, μέχρι την στιγμή που θα αναχωρήσει από το σύστημα μετά την εξυπηρέτησή του.

W_q: ο χρόνος παραμονής ενός πελάτη στην ουρά, δηλαδή ο χρόνος που μεσολαβεί από την στιγμή που ο πελάτης αυτός προσχωρεί στην ουρά, μέχρι την στιγμή που θα εισέλθει σε κάποιον από τους σταθμούς εξυπηρέτησης.

S_m: ο χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη m.

$P_n(t)$: η πιθανότητα ύπαρξης n πελατών στο σύστημα την χρονική στιγμή t υπό την προϋπόθεση, ότι το σύστημα άρχισε να λειτουργεί την χρονική στιγμή t=0.

λ_n: ο ρυθμός των αφίξεων, δηλαδή ο ανά μονάδα χρόνου αριθμός των αφικνούμενων πελατών, όταν υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα.

μ_n: ο ρυθμός των αποχωρήσεων, δηλαδή ο ανά μονάδα χρόνου αριθμός των εξυπηρετούμενων πελατών, όταν υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα.

Όταν το λ_n είναι σταθερό (ανεξάρτητο από τον αριθμό n των πελατών στο σύστημα) συμβολίζεται με λ. Όταν το σύστημα εξυπηρέτησης αποτελείται από r παράλληλους σταθμούς, σε καθέναν από τους οποίους έχουμε τον ίδιο σταθερό ρυθμό μ εξυπηρέτησης και επιπλέον $n \geq r$, οπότε όλοι οι σταθμοί είναι απασχολημένοι, τότε $\mu_n = r\mu$.

Τα μεγέθη της μόνιμης κατάστασης λειτουργίας ενός συστήματος αναμονής είναι:

$\bar{W}$: ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα.

$\bar{W}_q$: ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στην ουρά.

L: ο αναμενόμενος αριθμός πελατών στο σύστημα.

L_q: ο αναμενόμενος αριθμός πελατών στην ουρά (εξαιρούνται οι πελάτες που εξυπηρετούνται).

$f_{\Pi}(t)$: η συνάρτηση πυκνότητας του χρόνου παραμονής τυχαίου πελάτη στο σύστημα.

$f_W(t)$: η συνάρτηση πυκνότητας του χρόνου παραμονής τυχαίου πελάτη στην ουρά.

$\bar{B}$: η αναμενόμενη περίοδος συνεχούς απασχόλησης ενός σταθμού.

$\bar{I}$: η αναμενόμενη περίοδος αργίας ενός σταθμού.

P_n: η πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα.

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$: η ένταση της κυκλοφορίας

$u = \frac{\rho}{r}$: ο βαθμός χρησιμοποίησης του συστήματος στην περίπτωση που αποτελείται από r σταθμούς.

Άσκηση 1

Υποθέτουμε ότι πρόσφυγες φτάνουν σε ένα νησιωτικό χωριό του Αιγαίου σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ=1 άτομο ανά μέρα.

α) Ποιος ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι να φτάσει ο δέκατος πρόσφυγας;

β) Ποια είναι η πιθανότητα ο ενδιάμεσος χρόνος ανάμεσα στην δέκατη και την ενδέκατη άφιξη να ξεπερνά τις δύο ημέρες;

Λύση

Αν $X(t)$ είναι ο αριθμός των προσφύγων που φτάνουν στο χωριό μέχρι τον χρόνο t, η X ακολουθεί κατανομή Poisson με ρυθμό λ=1 άτομο/ημέρα.

Οι χρόνοι ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο $\frac{1}{\lambda}$.

α) Ο χρόνος Y_{10} κατά τον οποίο φτάνει ο δέκατος κάτοικος είναι ένα άθροισμα εκθετικών κατανομών, άρα ακολουθεί κατανομή Erlang (Γάμμα) $\Gamma\left(10, \frac{1}{\lambda}\right)$. Η μέση τιμή σε μια κατανομή $\Gamma(\alpha, \beta)$ είναι $EX = \alpha\beta$. Άρα ο αναμενόμενος χρόνος μέχρι την άφιξη του δέκατου πρόσφυγα είναι $E(T_{10}) = 10 \cdot \frac{1}{\lambda} = 10 \cdot \frac{1}{1} = 10$ ημέρες.

β) Ο ενδιάμεσος χρόνος ακολουθεί εκθετική κατανομή. Επομένως

$P(T > 2) = 1 - P(T \le 2) = 1 - 1 + e^{-2\lambda} = e^{-2\cdot 1} = e^{-2} \simeq 0,13$.

Άσκηση 2

Σε ένα πρατήριο βενζίνης φθάνουν κατά μέσο όρο 20 πελάτες την ώρα με διαδικασία Poisson. Ποια η πιθανότητα:

α) Σε 15 λεπτά να φτάσει ένας μόνο πελάτης

β) μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων να περάσουν 1) τουλάχιστον 3 λεπτά

2) από 2 μέχρι 4 λεπτά.

Λύση

Έχουμε μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda = 20\,{}^{\pi\varepsilon\lambda}\!/_{h} = \frac{20}{60}\,{}^{\pi\varepsilon\lambda}\!/_{\min} = \frac{1}{3}\,{}^{\pi\varepsilon\lambda}\!/_{\min}$ (αφού ο ρυθμός λ είναι ο μέσος αριθμός των γεγονότων στην μονάδα του χρόνου).

Με $\mathrm{X}(t),\ t \geq 0$ παριστάνουμε τον αριθμό των πελατών που φτάνουν στο πρατήριο βενζίνης σε χρόνο t, τότε:

α) $P\left(X(15)=1\right) = e^{-\frac{1}{3}\cdot 15}\dfrac{15\cdot\frac{1}{3}}{1!} = 5e^{-5}$.

β) Έστω T_{κ} ο χρόνος ανάμεσα στην άφιξη του (κ-1)-οστού και του κ-οστού πελάτη,

1) $P\left(T_{\kappa} \geq 3\right) = 1 - P\left(T_{\kappa} < 3\right) = 1 - 1 + e^{-\frac{1}{3}\cdot 3} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

2) $P\left(2 < T_{\kappa} < 4\right) = \int_{2}^{4} \lambda e^{-\lambda t}dt = \dfrac{1}{3}\int_{2}^{4} e^{-\frac{t}{3}}dt = -3\cdot\dfrac{1}{3}\left[e^{-\frac{t}{3}}\right]_{2}^{4} = -e^{-\frac{4}{3}} + e^{-\frac{2}{3}} = e^{-\frac{2}{3}} - e^{-\frac{4}{3}}$.

Άσκηση 3

Ένας μηχανικός μπορεί να επισκευάζει αυτοκίνητα με εκθετικό ρυθμό δύο ημερησίως. Αν οι πελάτες πρέπει να περιμένουν κατά μέσο όρο μια μέρα πριν ξαναπάρουν τα αυτοκίνητά τους, τότε καθορίστε τον εκθετικό ρυθμό με τον οποίο χαλάνε τα αυτοκίνητα.

<u>Λύση</u>

Πρόκειται για ένα M/M/1 σύστημα ουράς με $\mu = 2 {}^{\alpha\upsilon\tau.}\!/_{\eta\mu.}$, ενώ το λ είναι άγνωστο και πρέπει να προσδιοριστεί.

Το ότι κάθε πελάτης πρέπει να περιμένει, κατά μέσο όρο, 1 ημέρα για να ξαναπάρει το αυτοκίνητό του, είναι ισοδύναμο με το ότι ο μέσος χρόνος παραμονής $\bar{W}$ ενός πελάτη στο σύστημα είναι ίσος με 1.

$$\bar{W} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\mu - \lambda} = 1 \Rightarrow \mu - \lambda = 1 \Rightarrow \lambda = 1$$

Άρα ο εκθετικός ρυθμός με τον οποίο χαλάνε τα αυτοκίνητα είναι 1 ημερησίως.

Άσκηση 4

Οι μηχανές σε ένα εργοστάσιο χαλάνε με εκθετικό ρυθμό έξι ανά ώρα. Υπάρχει ένας μηχανικός που επισκευάζει τις μηχανές με εκθετικό ρυθμό 8 ανά ώρα. Το κόστος λόγω απώλειας παραγωγής που υφίσταται όταν οι μηχανές δεν λειτουργούν είναι 1000 ευρώ ανά μηχανή ανά ώρα. Ποιος είναι ο μέσος ρυθμός κόστους που οφείλεται στις μηχανές που χαλάνε;

<u>*Λύση*</u>

Πρόκειται για ένα M/M/1 σύστημα ουράς με $\lambda = 6 \, {}^{\mu\eta\chi.}\!/_{h}$ και $\mu = 8 \, {}^{\mu\eta\chi.}\!/_{h}$.

Ο μέσος αριθμός των χαλασμένων μηχανών, δηλαδή ο μέσος αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{6}{8-6} = 3 \text{ μηχανές.}$$

Άρα το μέσο κόστος για το εργοστάσιο είναι:

$$\mathrm{K} = 3 \cdot 1000 = 3000 \text{ ευρώ ανά ώρα.}$$

Άσκηση 5

Σ' έναν τηλεφωνικό θάλαμο βρέθηκε ότι οι αφίξεις γίνονται σύμφωνα με την διαδικασία Poisson με μέση τιμή 12 την ώρα. Ο χρόνος διάρκειας κάθε τηλεφωνήματος ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 2 λεπτά. Ποια είναι η πιθανότητα να βρει κάποιος το τηλέφωνο πιασμένο; Ποιο είναι το μέσο μήκος της ουράς, όταν υπάρχει ουρά; Είναι πολιτική του Ο.Τ.Ε. να τοποθετεί επιπλέον συσκευές όταν ο πελάτης χρειάζεται να περιμένει κατά μέσο όρο 3 λεπτά για το τηλεφώνημα. Πόσο πρέπει να αυξηθεί η μέση τιμή των αφίξεων για να χρειαστεί η εγκατάσταση κι άλλης συσκευής;

<u>Λύση</u>

Πρόκειται για ένα M/M/1 σύστημα ουράς με $\lambda = 12 {}^{\alpha\tau.}\!/_{h} = \frac{12}{60} {}^{\alpha\tau.}\!/_{\min} = \frac{1}{5} {}^{\alpha\tau.}\!/_{\min} = 0,2 {}^{\alpha\tau.}\!/_{\min}$ και $\frac{1}{\mu} = 2 \Rightarrow \mu = \frac{1}{2}$. Άρα $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{5} = 0,4$

.

Η πιθανότητα να βρει κάποιος το τηλέφωνο πιασμένο είναι ίση με το να υπάρχει ένα τουλάχιστον άτομο στο σύστημα. Δηλαδή

$$P(N>0) = 1 - P(N \le 0) = 1 - P(N=0) = 1 - (1-\rho) = \rho = 0,4.$$

Το μέσο μήκος της ουράς, δεδομένου ότι υπάρχει ουρά είναι:

$$L_q' = E[L \mid L \neq 0] = \frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{1-0,4} = 1,67$$

Η μέση τιμή του χρόνου αναμονής

$$\bar{W}_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\lambda}{0,5(0,5-\lambda)}$$

Θέλουμε $\bar{W}_q \ge 3 \Rightarrow \frac{\lambda}{0,5(0,5-\lambda)} \ge 3 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \lambda \ge 0,3$.

Δηλαδή, για να εγκατασταθεί κι άλλη συσκευή, πρέπει να έρχονται $0,3 \cdot 60 = 18$ πελάτες την ώρα.

Άσκηση 6

Σ' ένα βενζινάδικο στην αντλία με την αμόλυβδη 95, η μέση τιμή του χρόνου εξυπηρέτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή (μ). Η διαδικασία αφίξεων παρατηρήθηκε ότι είναι Poisson με μέση τιμή λ αυτοκίνητα ανά ώρα. Το κόστος που στοιχίζει στο βενζινάδικο η αναμονή στην ουρά είναι κ_1 ευρώ ανά αυτοκίνητο ανά ώρα. Το κόστος του αυτοκινήτου που εξυπηρετείται είναι $\mu\kappa_2$ ευρώ ανά ώρα. Προσδιορίστε τον χρόνο εξυπηρέτησης, για τον οποίο το κόστος είναι ελάχιστο.

Λύση

Πρόκειται για ένα M/M/1 σύστημα ουράς.

Ο μέσος αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι $L = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda}$, άρα το κόστος για το βενζινάδικο σε κατάσταση ισορροπίας είναι:

$$\mathrm{K} = \frac{\lambda \kappa_1}{\mu - \lambda} + \mu \kappa_2$$

Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το Κ. Έχουμε ότι:

$$\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \mu} = -\frac{\lambda \kappa_1}{\left(\mu - \lambda\right)^2} + \kappa_2 = 0 \Rightarrow \left(\mu - \lambda\right)^2 = \frac{\lambda \kappa_1}{\kappa_2} \Rightarrow \mu = \lambda \pm \sqrt{\frac{\lambda \kappa_1}{\kappa_2}}$$

Για να έχουμε κατάσταση ισορροπίας θα πρέπει $\mu > \lambda$, που σημαίνει ότι αποδεκτή είναι μόνο η τιμή $\mu = \lambda + \sqrt{\dfrac{\lambda \kappa_1}{\kappa_2}}$. Γι' αυτήν την τιμή του μ έχουμε

$\dfrac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial \mu^2} = \dfrac{2\lambda \kappa_1}{\left(\mu - \lambda\right)^3} = \dfrac{2\kappa_2}{\sqrt{\dfrac{\lambda \kappa_1}{\kappa_2}}} > 0$, δηλαδή, πράγματι το κόστος ελαχιστοποιείται όταν ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης είναι $\mu = \lambda + \sqrt{\dfrac{\lambda \kappa_1}{\kappa_2}}$.

Άσκηση 7

Θέλουμε να συγκρίνουμε την απόδοση ενός συστήματος με έναν επεξεργαστή και ενός συστήματος με δύο επεξεργαστές. Υποθέτουμε ότι οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων εργασιών κατανέμονται εκθετικά με παράμετρο λ.

Στο σύστημα με τον έναν επεξεργαστή, ο χρόνος εξυπηρέτησης κατανέμεται εκθετικά με μέση τιμή 0.5 sec.

1. Για έναν μέσο χρόνο διαχείρισης 2.5 sec (συνολικό χρόνο της εργασίας στο σύστημα) πόσες εργασίες ανά δευτερόλεπτο μπορούν να ολοκληρωθούν;

2. Για μία αύξηση του λ κατά 10% πόσο θα αυξηθεί ο χρόνος διαχείρισης;

3. Υπολογίστε το μέσο χρόνο αναμονής, το μέσο αριθμό των πελατών στον εξυπηρετητή και την απασχόληση του εξυπηρετητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο εξυπηρετητής να είναι ελεύθερος;

Ας συγκρίνουμε το παραπάνω σύστημα με αυτό δύο φθηνότερων επεξεργαστών, καθένας εκ των οποίων έχει μέσο χρόνο εξυπηρέτησης 1 sec.

1. Πόσες εργασίες μπορούν να διαχειριστούν ανά δευτερόλεπτο με μέσο χρόνο διαχείρισης 2.5 sec;

2. Για μία αύξηση του λ κατά 10% πόσο θα αυξηθεί ο χρόνος διαχείρισης;

3. Υπολογίστε το μέσο χρόνο αναμονής, το μέσο αριθμό των πελατών στον εξυπηρετητή και την απασχόληση του εξυπηρετητή. Ποια είναι η πιθανότητα και οι δύο εξυπηρετητές να είναι απασχολημένοι;

Λύση

Ας θεωρήσουμε πρώτα το σύστημα με τον ένα επεξεργαστή. Εφόσον δεν έχουμε πληροφορία για τη χωρητικότητα του buffer και υπάρχει χρόνος αναμονής, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο buffer έχει άπειρη (επαρκή) χωρητικότητα.

Επομένως έχουμε ένα τυπικό M/M/1 σύστημα. Ο μέσος αριθμός των εργασιών σε ένα M/M/1 σύστημα είναι:

$$\bar{N} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda/2}{1-\lambda/2} = \frac{\lambda}{2-\lambda}$$

αφού $\mu = \frac{1}{\mathrm{E}(\mathrm{T})} = \frac{1}{0.5} = 2$. Από τον τύπο του Little, έχουμε:

$$\overline{\mathrm{T}}_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{\overline{\mathrm{N}}}{\lambda} = \frac{1}{2-\lambda} \Rightarrow 2.5 = \frac{1}{2-\lambda} \Rightarrow \lambda = 1.6.$$

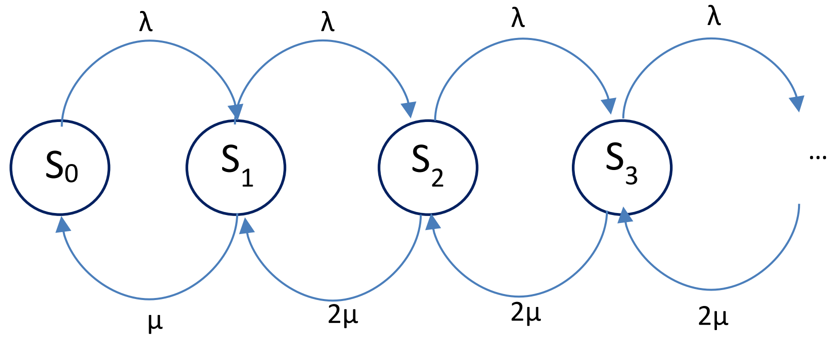
Υποθέτουμε τώρα ότι ο ρυθμός αφίξεων αυξάνεται κατά 10%. Ο νέος ρυθμός θα είναι $\hat{\lambda} = 1.1 \cdot 1.6 = 1.76$. Αυτό θα μεταβάλλει το φορτίο του συστήματος σε $\hat{\rho} = \frac{\hat{\lambda}}{\mu} = \frac{1.76}{2} = 0.88$. Ο χρόνος απόκρισης θα είναι:

$$\hat{\mathrm{T}}_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{1}{\mu - \hat{\lambda}} = \frac{1}{2-1.76} = 4.1666\,\mathrm{sec}$$

Επομένως, η αύξηση είναι $\frac{1.166-2.5}{2.5} = 66.66\%$.

Για το αρχικό $(\lambda = 1.6)$ σύστημα, ο μέσος χρόνος αναμονής είναι $\bar{W} = \bar{T}_{\sigma\upsilon\sigma\tau} - E(T) = \bar{T}_{\sigma\upsilon\sigma\tau} - \frac{1}{\mu} = 2\,\mathrm{sec}$, ο μέσος αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι $\overline{\mathrm{N}} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0.8}{0.2} = 4$ και η πιθανότητα άδειου εξυπηρετητή είναι $1-\rho = 0.2$. Η απασχόληση είναι ρ και ισούται με τον μέσο αριθμό των πελατών στον εξυπηρετητή.

Ας θεωρήσουμε τώρα το δεύτερο σύστημα. Αυτό έχει δύο επεξεργαστές με $\mu = 1$, επομένως μισό ρυθμό εξυπηρέτησης. Το φορτίο του συστήματος είναι $\rho = \frac{\lambda}{1} = \lambda$. Το διάγραμμα των καταστάσεων του συστήματος είναι το εξής:



Πρόκειται για ένα σύστημα M/M/2. Ας δούμε αναλυτικά τις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \Rightarrow P_1 = \rho P_0$$

$$\lambda P_1 = 2\mu P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{1}{2}\rho P_1 = \frac{\rho^2}{2} P_0$$

$$\lambda P_2 = 2\mu P_3 \Rightarrow P_3 = \frac{1}{2}\rho P_2 = \frac{\rho^3}{4} P_0$$

…………………………………..

$$\lambda P_{k-1} = 2\mu P_k \Rightarrow P_k = \frac{\rho^k}{2^{k-1}} P_0$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις και την εξίσωση κανονικότητας παίρνουμε:

$$P_0\left(1+\rho\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^{k-1}}{2^{k-1}}\right)=1 \Rightarrow P_0 = \frac{2-\rho}{2+\rho}$$

Υπολογίζουμε το μέσο αριθμό των πελατών στο σύστημα από την κατανομή των καταστάσεων:

$$\bar{\mathrm{N}} = \sum_{k=1}^{\infty} kP_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{\rho^k}{2^{k-1}}\frac{2-\rho}{2+\rho} = \cdots = \frac{4\rho}{(2+\rho)(2-\rho)} = \frac{4\lambda}{(2+\lambda)(2-\lambda)}$$

Από τον τύπο του Little υπολογίζουμε τον μέσο χρόνο στο σύστημα:

$$\bar{\mathrm{T}}_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{\bar{\mathrm{N}}}{\lambda} = \frac{4}{(2+\lambda)(2-\lambda)} \Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{6}{2.5}} \approx 1.54919$$

Αυτός είναι ο μέγιστος επιτρεπτός ρυθμός αφίξεων, ώστε να μπορούμε να εγγυηθούμε τον επιθυμητό χρόνο των 2.5 sec στο σύστημα. Παρατηρούμε ότι είναι μικρότερος του 1.6, επομένως το δεύτερο σύστημα είναι χειρότερο από το πρώτο, αφού για την ίδια απόδοση μπορεί να δεχτεί μικρότερο εισερχόμενο φορτίο.

Τώρα, αυξάνουμε το λ κατά 10%, επομένως $\hat{\lambda} = 1.704$. Ο μέσος χρόνος στο σύστημα θα είναι

$$\hat{\mathrm{T}}_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{4}{(2+1.704)(2-1.704)} = \cdots = 3.65 \text{ sec}$$

Επομένως η αύξηση είναι $\frac{3.65-2.5}{2.5} = 46\%$.

Σημειώνεται ότι για να είναι δίκαια η σύγκριση με το προηγούμενο σύστημα, θα έπρεπε να υπολογίσουμε το χρόνο για $\lambda = 1.76$. Αυτός προκύπτει να είναι:

$$\hat{\mathrm{T}}_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{4}{(2+1.76)(2-1.704)6} = \cdots = 4.4326 \text{ sec}$$

ο οποίος, όπως αναμενόταν, είναι μεγαλύτερος από τον 4.1666 του προηγούμενου συστήματος.

Ο μέσος χρόνος αναμονής μπορεί να βρεθεί από

$$\bar{W} = \sum_{k=2}^{\infty} P_k = 1 - P_0 - P_1 = \cdots$$

αλλά μπορεί, πιο απλά, να δοθεί ως $\bar{\mathrm{T}}_{\sigma\upsilon\sigma\tau} - \frac{1}{\mu} = 1.5$ sec.

Ο μέσος αριθμός των πελατών στους εξυπηρετητές (και στους δύο) είναι: $\bar{\mathrm{N}}_{\varepsilon\xi\upsilon\pi} = P_1 + 2(1 - P_0 - P_1) = \cdots$

Η απασχόληση ενός οποιουδήποτε εξυπηρετητή είναι: $U = 0 \cdot P_0 + \frac{1}{2} P_1 + 1 \cdot (1 - P_0 - P_1)$, αφού στην κατάσταση S_1 ένας εξυπηρετητής χρησιμοποιείται με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Εναλλακτικά, μπορούμε να διαιρέσουμε το προσφερόμενο φορτίο, το οποίο είναι και το πραγματικό φορτίο, με τον αριθμό των εξυπηρετητών.

Η πιθανότητα να είναι και οι δύο εξυπηρετητές απασχολημένοι είναι: $1 - P_0 - P_1$.

Άσκηση 8

Πόσους διαδρόμους πρέπει να έχει ένα αεροδρόμιο, ώστε η πιθανότητα αναμονής ενός αεροσκάφους κατά την προσγείωση, επειδή δεν υπάρχει ελεύθερος διάδρομος, να είναι μικρότερη από 10%; Δίνεται ότι οι αφίξεις ακολουθούν κατανομή Poisson με ρυθμό 27 αεροσκάφη την ώρα, ενώ ο χρόνος απασχόλησης κάθε διαδρόμου ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή 2 λεπτά.

<u>Λύση</u>

Είναι $\lambda = 27$, $\mu = \dfrac{60}{2} = 30$, $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{27}{30} = 0.9$.

Έστω s ο αριθμός των διαδρόμων. Για κάθε s είναι $\dfrac{\rho}{s} < 1$, επομένως η συνθήκη για αποκατάσταση ισορροπίας πληρείται.

Ένα αεροσκάφος περιμένει, όταν όλοι οι διάδρομοι είναι κατειλημμένοι.

$$P(W > 0) = P(M = s) = \frac{\rho^s}{s!}\frac{s}{s-\rho}P_0$$

όπου M ο αριθμός των απασχολημένων σταθμών και $P_0 = \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\dfrac{\rho^n}{n!} + \dfrac{\rho^s}{s!}\dfrac{s}{s-\rho}}$.

Οπότε:

Για $s = 2$: $P(W > 0) = 0.278$

Για $s = 3$: $P(W > 0) = 0.070 = 7\% < 10\%$

Άσκηση 9

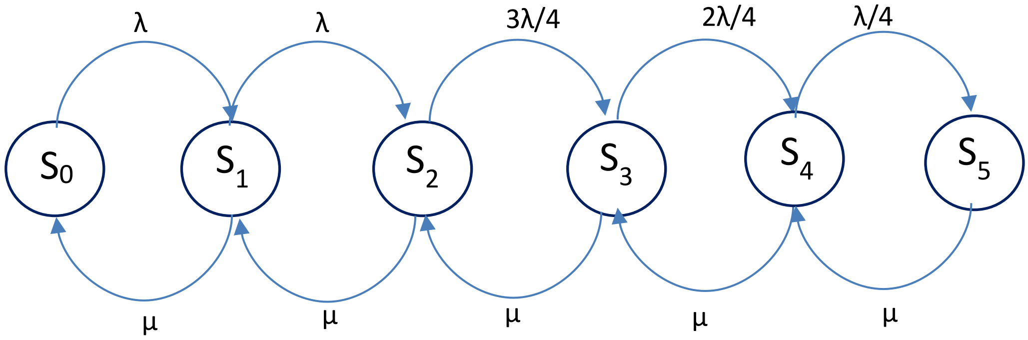
Θεωρούμε ένα Μαρκοβιανό σύστημα στο οποίο φτάνουν πελάτες με διαδικασία Poisson με ένταση ένας πελάτης ανά 7 λεπτά. Ο πελάτης παρατηρεί την ουρά. ΔΕΝ μπαίνει στην ουρά με πιθανότητα l_k αν δει k πελάτες στην ουρά. $l_k = \frac{k}{4}$ αν $k < 4$, 0 σε άλλη περίπτωση. Ο χρόνος εξυπηρέτησης κατανέμεται εκθετικά με μέση τιμή 6 λεπτά.

1. Προσδιορίστε τον μέσο αριθμό των πελατών στο σύστημα.

2. τον αριθμό των πελατών που εξυπηρετούνται σε διάστημα 100 λεπτών.

Λύση

Έχουμε ένα σύστημα με 6 καταστάσεις S_k, $k = 0,1,2,3,4,5$. Το διάγραμμα του συστήματος είναι το εξής:



Εξισώσεις ισορροπίας συστήματος:

$$\lambda P_0 = \mu P_1$$

$$\lambda P_1 = \mu P_2$$

$$\frac{3\lambda}{4} P_2 = \mu P_3$$

$$\frac{\lambda}{2} P_3 = \mu P_4$$

$$\frac{\lambda}{4} P_4 = \mu P_5$$

$$\sum_{k=1}^{5} P_k = 1$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα προκύπτει ότι $P_0 \approx 0.3$ και από αυτό υπολογίζονται και οι υπόλοιπες πιθανότητες. Ο μέσος αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι:

$$\mathrm{E}(\mathrm{N}) = \sum_{k=0}^{5} k \cdot P_k = \cdots \approx 1.43$$

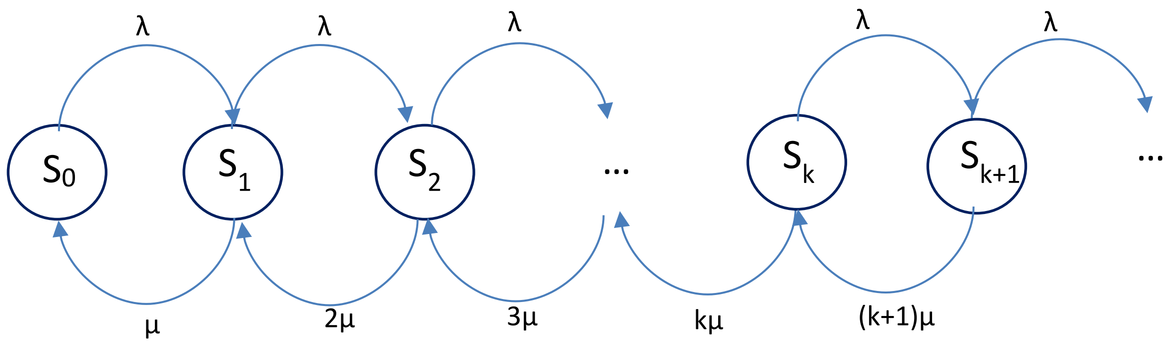
Έχουμε ένα σύστημα με διαφορετικούς ρυθμούς άφιξης σε κάθε κατάσταση. Τέτοια συστήματα ονομάζονται ***μη ομογενή***. Ωστόσο, ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι σταθερός. Ο σταθμός είναι απασχολημένος με πιθανότητα $1-P_0$. Όταν είναι απασχολημένος εξυπηρετεί πελάτες. Ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι $\mu = \frac{1}{6}$. Επομένως σε 100 λεπτά, ο σταθμός μπορεί κατά μέσο όρο να εξυπηρετήσει $100 \cdot \mu \cdot (1-P_0)$ πελάτες.

Άσκηση 10

Ένα σύστημα ουράς έχει έναν εξυπηρετητή και άπειρη χωρητικότητα ουράς. Ο αριθμός των πελατών στο σύστημα είναι μια διαδικασία γεννήσεων-θανάτων με $\lambda_k = \lambda$ και $\mu_k = k\mu$, $k = 0,1,2,\dots$, δηλαδή, ο εξυπηρετητής αυξάνει την ταχύτητα εξυπηρέτησης ανάλογα με τον αριθμό των πελατών στο σύστημα. Υπολογίστε τον μέσο αριθμό των πελατών στο σύστημα σαν συνάρτηση του $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Λύση

Το διάγραμμα του συστήματος είναι:



Πρέπει να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας του συστήματος:

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \Rightarrow P_1 = \rho P_0$$

$$\lambda P_1 = 2\mu P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{1}{2}\rho P_1 = \frac{\rho^2}{2} P_0$$

$$\lambda P_2 = 3\mu P_3 \Rightarrow P_3 = \frac{1}{3}\rho P_2 = \frac{\rho^3}{2\cdot 3} P_0$$

……………………………………..

$$\lambda P_{k-1} = k\mu P_k \Rightarrow P_k = \frac{1}{k}\rho P_{k-1} = \cdots = \frac{\rho^k}{k!} P_0$$

……………………………………..

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} P_0 = 1 \Rightarrow P_0 \cdot e^{\rho} = 1 \Rightarrow P_0 = e^{-\rho}$$

κι επομένως

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho}$$

Παρατηρούμε ότι η κατανομή των καταστάσεων είναι Poisson, κι επομένως ο μέσος αριθμός των πελατών θα είναι η μέση τιμή της Poisson, δηλαδή,

$$\bar{\mathrm{N}} = \rho$$

<u>Σχόλιο</u>

Από τον τύπο του Little μπορούμε να υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο στο σύστημα:

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{T}_{o\lambda}\right) = \frac{\bar{\mathrm{N}}}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

Βλέπουμε ότι οι πελάτες παραμένουν στο σύστημα κατά μέσο όρο χρόνο ίσο με τον μέσο χρόνο εξυπηρέτησης. Αυτό είναι ισοδύναμο με την περίπτωση στην οποία δεν υπάρχει ουρά και κάθε πελάτης εξυπηρετείται παράλληλα με τους υπόλοιπους. Με άλλα λόγια το σύστημα είναι ισοδύναμο με ένα σύστημα M/M/∞.