Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

Τεχνικές Ανάλυσης Διοικητικών Αποφάσεων

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

I_ Ανάλυση Δικτύων

3. Το Πρόβλημα της Ροής Ελάχιστου Κόστους

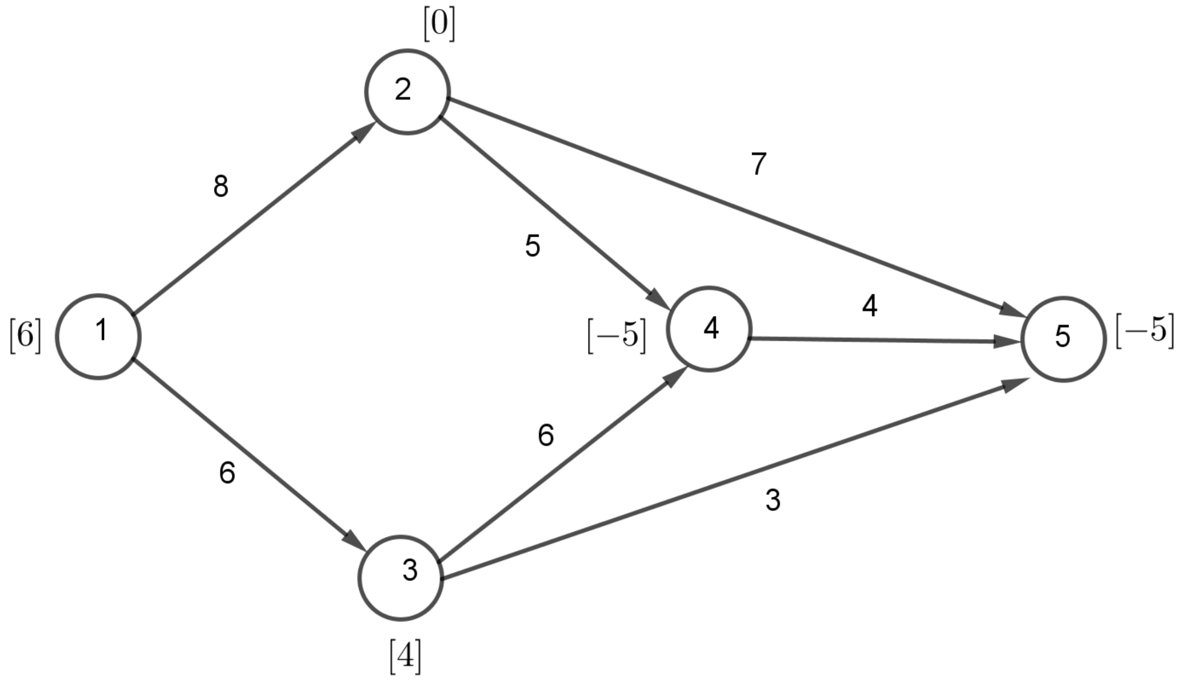
Υπεύθυνος Μαθήματος: Γιαννίκος Ιωάννης
Αναπληρωτής Καθηγητής
i.giannikos@upatras.gr

Επιμέλεια Φροντιστηρίου: Μανουσάκης Γεώργιος
Ε.ΔΙ.Π.
gemini@upatras.gr

2017 – 2018

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΡΟΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΚΟΣΤΟΥΣ

Ας θεωρήσουμε το παρακάτω δίκτυο:



Το δίκτυο αυτό έχει 5 κόμβους. Κάθε τόξο που συνδέει αυτούς τους κόμβους είναι εφοδιασμένο με έναν αριθμό c_{ij} που εκφράζει το κόστος που πληρώνουμε ανά μονάδα ροής στο τόξο αυτό. Π.χ. Για να δώσουμε μια μονάδα ροής από τον κόμβο 1 στον κόμβο 8, πρέπει να «πληρώσουμε» 8 «χρηματικές» μονάδες.

Επίσης σε κάθε κόμβο i αντιστοιχεί ένας αριθμός b_i που δηλώνει πόσες μονάδες «προϊόντος» είναι διαθέσιμες στον κόμβο i. Για παράδειγμα στον κόμβο 1 υπάρχουν 6 διαθέσιμες μονάδες για να μπουν στη ροή του δικτύου. Το αρνητικό πρόσημο σε κάποιους κόμβους, όπως στον κόμβο 5, δηλώνει ότι στον συγκεκριμένο κόμβο υπάρχει ζήτηση «προϊόντος». Είναι δηλαδή, κόμβος εξόδου ροής. Υπάρχει και ο κόμβος 2, ο οποίος έχει $b_2 = 0$, που σημαίνει ότι ο συγκεκριμένος κόμβος είναι ενδιάμεσος στο δίκτυο. Δεν «προσφέρει» ούτε «ζητά» ποσότητα προϊόντος.

Το δίκτυο είναι **ισορροπημένο** όταν οι συνολικές προσφερόμενες μονάδες προϊόντος ισούνται με τις συνολικές απαιτούμενες μονάδες. Το παραπάνω δίκτυο είναι ισορροπημένο, αφού οι κόμβοι παροχής 1 και 3 δίνουν $6+4=10$ μονάδες ενώ οι κόμβοι ζήτησης 4 και 5 απαιτούν $5+5=10$ μονάδες προϊόντος.

Το πρόβλημα συνίσταται στον προσδιορισμό των μονάδων x_{ij} που πρέπει να μεταφερθούν σε κάθε κλάδο για την μεταφορά 10 μονάδων από τους κόμβους παροχής στους κόμβους ζήτησης με το ελάχιστο συνολικό κόστος μεταφοράς.

Μέθοδος Simplex για δίκτυα

Το αντίστοιχο πρόβλημα Γραμμικού Προγραμματισμού για το παραπάνω δίκτυο είναι:

$$\min\ z=\sum\sum c_{ij}x_{ij}$$

με περιορισμούς (που αφορούν τις εισερχόμενες και εξερχόμενες μονάδες σε κάθε κόμβο):

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
x_{12} & +x_{13} & & & & & & & =6 \\
-x_{12} & & +x_{24} & +x_{25} & & & & & =0 \\
 & -x_{13} & & & +x_{34} & +x_{35} & & & =4 \\
 & & -x_{24} & & -x_{34} & & +x_{45} & & =-5 \\
 & & & -x_{25} & & -x_{35} & -x_{45} & & =-5
\end{array}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Οι περιορισμοί αυτοί είναι γραμμικά εξαρτημένοι.

Το δυϊκό πρόβλημα είναι:

$$\max\ \sum b_j w_j$$

με περιορισμούς

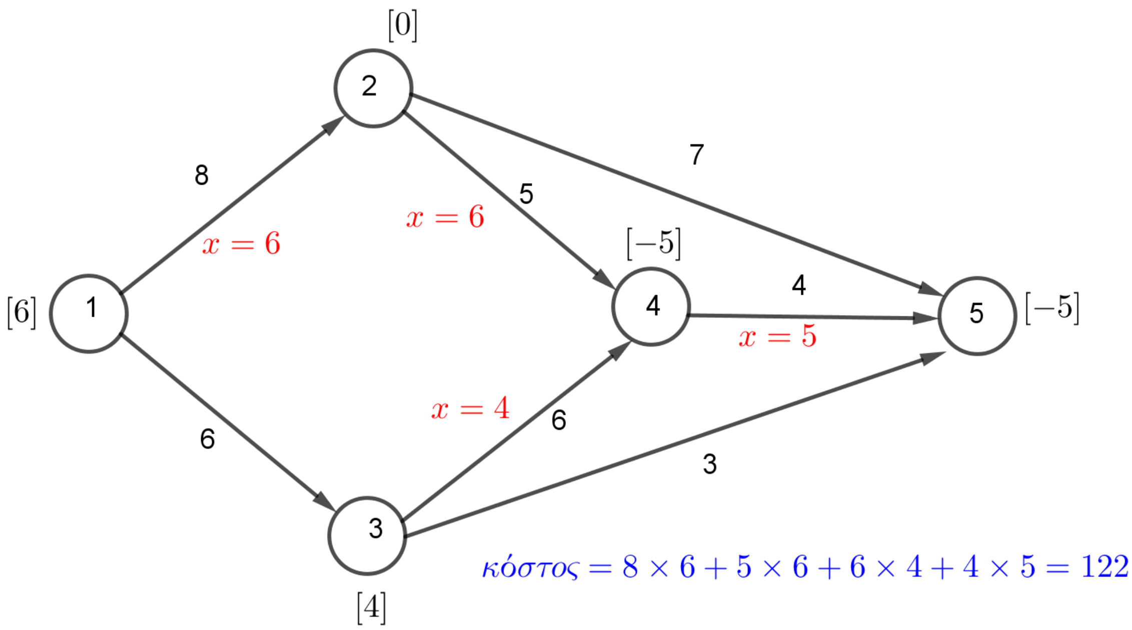
$$w_i - w_j \leq c_{ij}$$

$$w_j \text{ ελεύθερο προσήμου}$$

Αφού οι περιορισμοί του αρχικού προβλήματος είναι γραμμικά εξαρτημένοι, θα πρέπει σε κάποια δυϊκή μεταβλητή να δώσουμε μια αυθαίρετη τιμή (συνήθως το μηδέν).

Για να λύσουμε το πρόβλημά μας ξεκινάμε από μια αρχική εφικτή ροή και στη συνέχεια ελέγχουμε αν αυτή είναι βέλτιστη.

Μια εφικτή ροή είναι η ακόλουθη:



Προσδιορίζουμε τις δυϊκές μεταβλητές, εξετάζοντας τους κλάδους που έχουν ενταχθεί στην τρέχουσα λύση, ξεκινώντας από την (αυθαίρετα επιλεγμένη)

$w_5 = 0$

$w_4 - w_5 = c_{45} \Rightarrow w_4 = c_{45} + w_5 \Rightarrow w_4 = 4 + 0 \Rightarrow w_4 = 4$

$w_3 - w_4 = c_{34} \Rightarrow w_3 = c_{34} + w_4 \Rightarrow w_3 = 6 + 4 \Rightarrow w_3 = 10$

$w_2 = c_{24} + w_4 \Rightarrow w_2 = 5 + 4 \Rightarrow w_2 = 9$

$w_1 = c_{12} + w_2 \Rightarrow w_1 = 8 + 9 \Rightarrow w_1 = 17$

Για τα μη βασικά τόξα εξετάζουμε τις ποσότητες $w_i - w_j - c_{ij}$

Για το τόξο $(1,3)$: $w_1 - w_3 - c_{13} = 17 - 10 - 6 = 1$

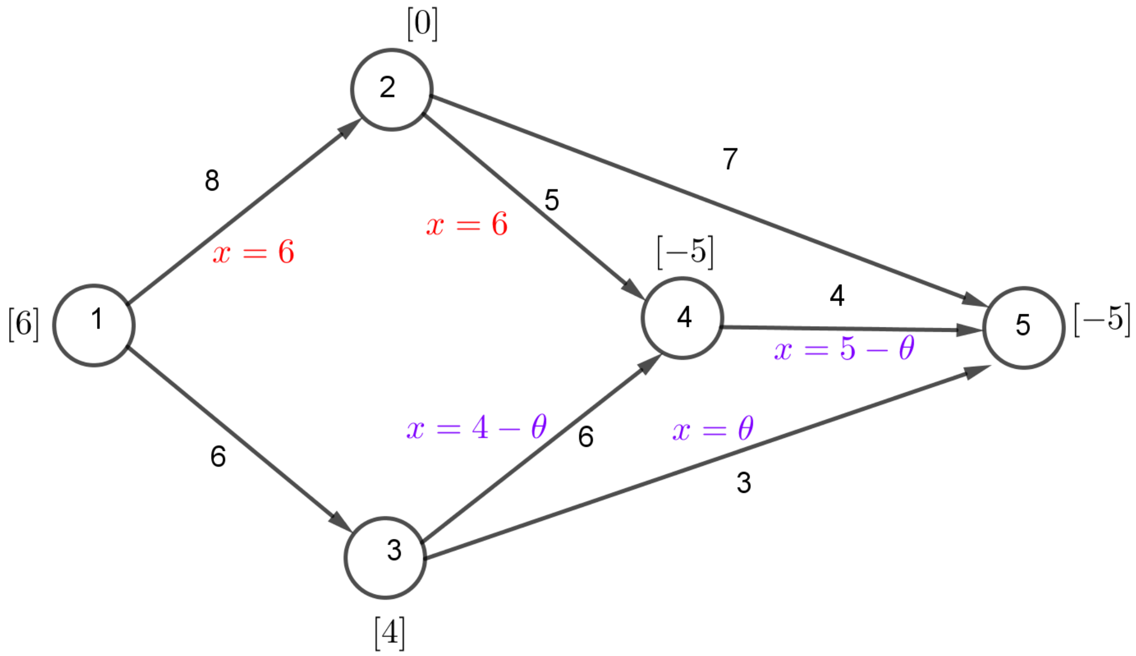
Για το τόξο $(2,5)$: $w_2 - w_5 - c_{25} = 9 - 0 - 7 = 2$

Για το τόξο $(3,5)$: $w_3 - w_5 - c_{35} = 10 - 0 - 3 = 7$

Αφού και οι τρεις αυτές ποσότητες είναι θετικές, η δυϊκή λύση που έχουμε δεν είναι εφικτή κι επομένως η λύση μας δεν είναι βέλτιστη.

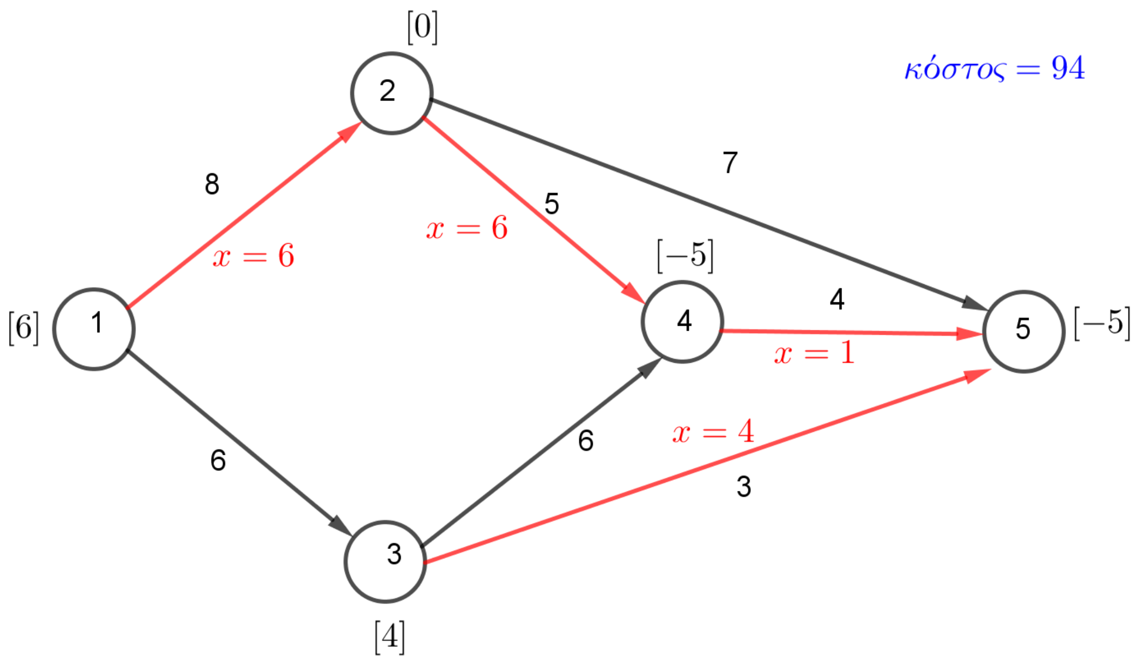
Μεγαλύτερη τιμή από τις παραπάνω είναι το 7, κι επομένως το τόξο $(3,5)$ (δηλ. η x_{35}) θα μπει στη βάση. Έστω $x_{35} = \theta$.

Τότε θα πρέπει να μειωθεί ισόποσα το υπάρχον μονοπάτι που πηγαίνει από τον κόμβο 3 στον κόμβο 5. Επομένως θα είναι $x'_{34} = x_{34} - \theta = 4 - \theta$ και $x'_{45} = x_{45} - \theta = 5 - \theta$.



Θα πρέπει $4 - \theta \geq 0 \Rightarrow \theta \leq 4$ και $5 - \theta \geq 0 \Rightarrow \theta \leq 5$, άρα η καλύτερη δυνατή τιμή είναι $\theta = 4$.

Έτσι έχουμε μια νέα λύση:



Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία.

Οι δυϊκές μεταβλητές θα είναι:

$w_5 = 0$, $w_4 = c_{45} + w_5 \Rightarrow w_4 = 4 + 0 \Rightarrow w_4 = 4$, $w_3 = c_{35} + w_5 \Rightarrow w_3 = 3 + 0 \Rightarrow w_3 = 3$,

$w_2 = c_{24} + w_4 \Rightarrow w_2 = 5 + 4 \Rightarrow w_2 = 9$, $w_1 = c_{12} + w_2 \Rightarrow w_1 = 8 + 9 \Rightarrow w_1 = 17$

Για τα μη βασικά τόξα εξετάζουμε τις ποσότητες $w_i - w_j - c_{ij}$

Για το τόξο $(1,3)$: $w_1 - w_3 - c_{13} = 17 - 3 - 6 = 8$

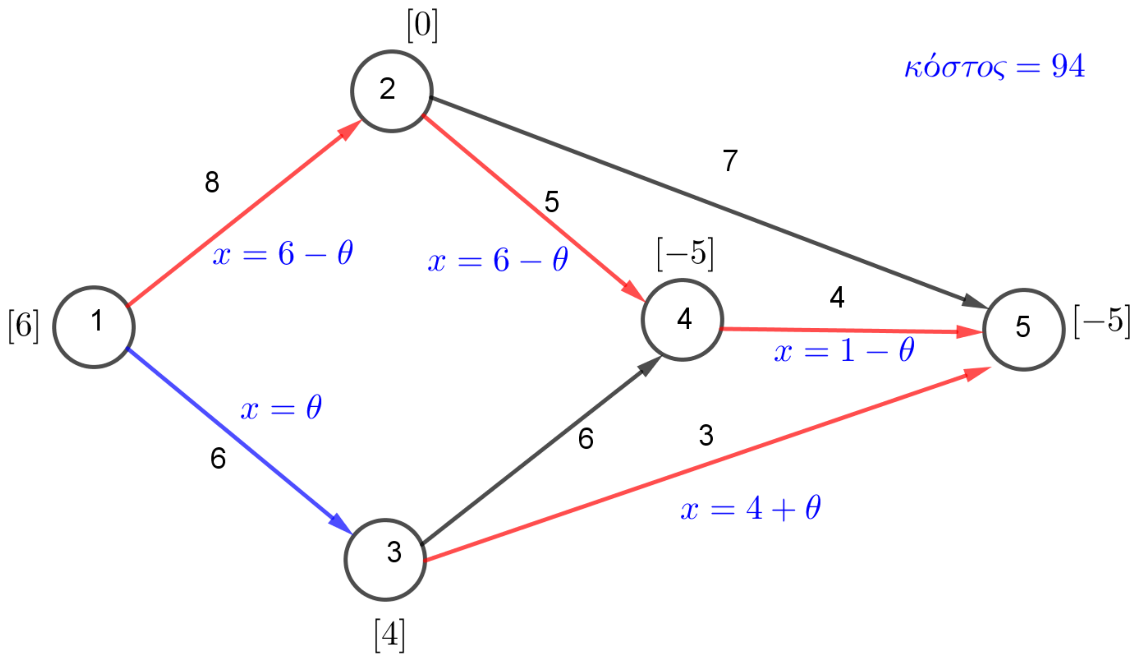
Για το τόξο $(2,5)$: $w_2 - w_5 - c_{25} = 9 - 0 - 7 = 2$

Για το τόξο $(3,4)$: $w_3 - w_4 - c_{34} = 3 - 4 - 6 = -7$

Υπάρχουν θετικές τιμές με μεγαλύτερη την 8.

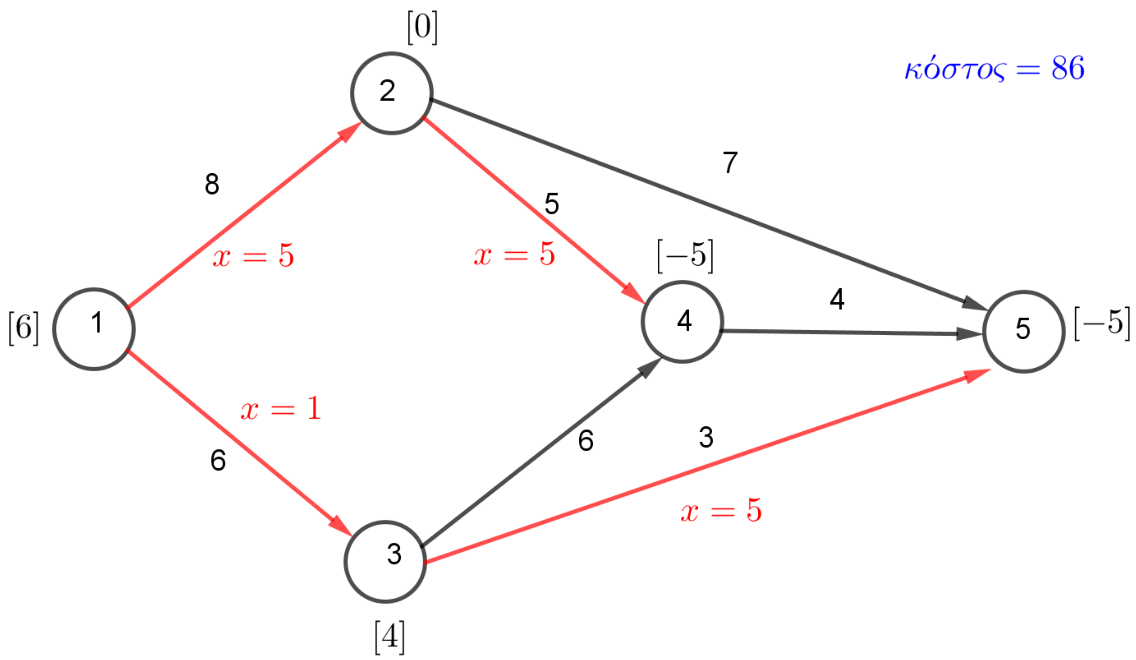
<u>3η επανάληψη</u>

Έστω $x_{13} = \theta$.



Θα πρέπει:

$6 - \theta \ge 0 \Rightarrow \theta \le 6$ και $1 - \theta \ge 0 \Rightarrow \theta \le 1$. Άρα $\theta = 1$. Οπότε έχουμε την λύση:



Οι δυϊκές μεταβλητές θα είναι:

$w_5 = 0$, $w_3 = c_{35} + w_5 \Rightarrow w_3 = 3 + 0 \Rightarrow w_3 = 3$, $w_1 = c_{13} + w_3 \Rightarrow w_1 = 6 + 3 \Rightarrow w_1 = 9$,

$w_1 - w_2 = c_{12} \Rightarrow w_2 = w_1 - c_{12} \Rightarrow w_2 = 9 - 8 = 1$ και $w_4 = w_2 - c_{24} \Rightarrow w_4 = 1 - 5 \Rightarrow w_4 = -4$

Για τα μη βασικά τόξα εξετάζουμε τις ποσότητες $w_i - w_j - c_{ij}$

Για το τόξο $(4,5)$: $w_4 - w_5 - c_{45} = -4 - 0 - 4 = -8$

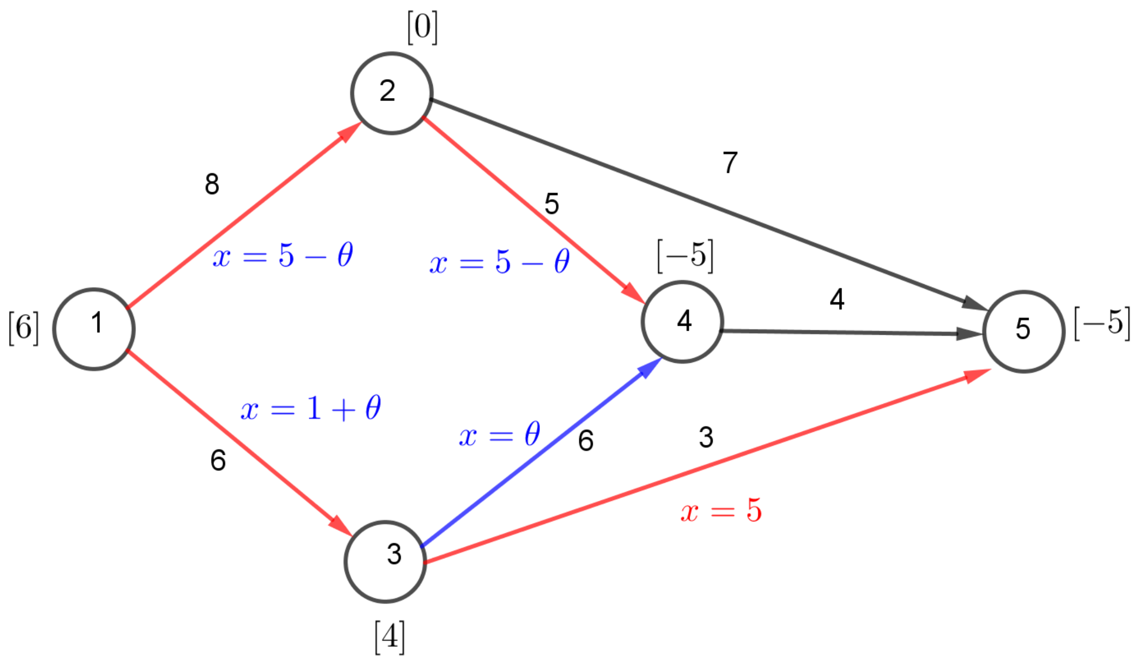
Για το τόξο $(2,5)$: $w_2 - w_5 - c_{25} = 1 - 0 - 7 = -6$

Για το τόξο $(3,4)$: $w_3 - w_4 - c_{34} = 3 + 4 - 6 = 1$

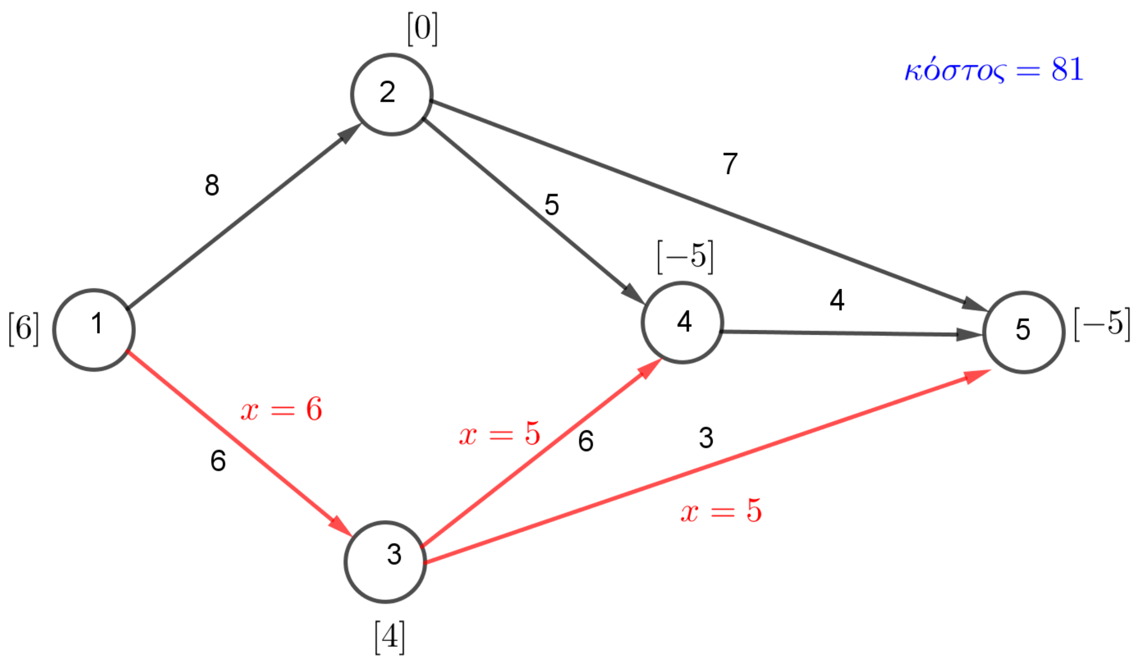
Μοναδική θετική τιμή το 1.

<u>4η επανάληψη</u>

Έστω $x_{34} = \theta$.



Θα πρέπει $5-\theta \geq 0 \Rightarrow \theta \leq 5$. Άρα $\theta = 5$. Οπότε έχουμε την λύση:



Οι δυϊκές μεταβλητές θα είναι:

$w_5 = 0$, $w_3 = c_{35} + w_5 \Rightarrow w_3 = 3+0 \Rightarrow w_3 = 3$, $w_1 = c_{13} + w_3 \Rightarrow w_1 = 6+3 \Rightarrow w_1 = 9$,

$w_4 = w_3 - c_{34} \Rightarrow w_4 = 3-6 \Rightarrow w_4 = -3$.

Για την w_2 μπορούμε να θεωρήσουμε ως βασικό το τόξο $(1,2)$ με $x_{12} = 0$, οπότε έχουμε:

$w_1 - w_2 = c_{12} \Rightarrow w_2 = w_1 - c_{12} \Rightarrow w_2 = 9-8 = 1$.

Για τα μη βασικά τόξα εξετάζουμε τις ποσότητες $w_i - w_j - c_{ij}$

Για το τόξο $(4,5)$: $w_4 - w_5 - c_{45} = -3 - 0 - 4 = -7$

Για το τόξο $(2,5)$: $w_2 - w_5 - c_{25} = 1 - 0 - 7 = -6$

Για το τόξο $(2,4)$: $w_2 - w_4 - c_{34} = 1 + 3 - 5 = -1$

Κι αφού όλα είναι αρνητικά, η λύση μας είναι βέλτιστη.

<u>Σχόλια</u>

1) Όταν δεν μπορώ να βρω μια αρχική εφικτή λύση, τότε μπορώ να θεωρήσω έναν εικονικό κόμβο και κλάδους με μεγάλα κόστη που να οδηγούν από κάθε κόμβο παροχής στον εικονικό και από τον εικονικό σε κάθε κόμβο ζήτησης.

2) Όταν οι κλάδοι έχουν περιορισμένοι χωρητικότητα, τότε το μόνο που αλλάζει είναι στον καθορισμό της τιμής θ με την οποία εισάγω την νέα μεταβλητή στη βάση, αφού αυτή θα πρέπει να πληρεί και τους περιορισμούς χωρητικότητας.