# Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

## Τεχνικές Ανάλυσης Διοικητικών Αποφάσεων

## Φροντιστήριο

## I_ Ανάλυση Δικτύων

## 1. Το Πρόβλημα της Ελάχιστης Διαδρομής

**Υπεύθυνος Μαθήματος: Γιαννίκος Ιωάννης**

Καθηγητής

i.giannikos@upatras.gr

**Υπεύθυνος Μαθήματος: Μανουσάκης Γεώργιος**

Ε.ΔΙ.Π.

gemini@upatras.gr

**2023 – 2024**

# ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΔΙΑΔΡΟΜΗΣ

Δίνεται ένα προσανατολισμένο γράφημα με $N$ κόμβους (αριθμημένους από το 1 έως το $N$). Ονομάζουμε τον κόμβο 1 (αυθαίρετα) ως αφετηρία και τον κόμβο $N$ (επίσης αυθαίρετα) προορισμό ή τέλος του δικτύου που παριστάνει το γράφημα. Κάθε τόξο $(i, j)$ έχει ένα κόστος ή μήκος $\alpha_{ij}$. Το μήκος μιας διαδρομής (μονοπατιού) $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ είναι το άθροισμα των μηκών των τόξων που το απαρτίζουν: $\sum_{n=1}^{k-1} \alpha_{i_n i_{n+1}}$. Λέμε ότι μια διαδρομή είναι η ελάχιστη αν το μήκος της είναι το ελάχιστο, από όλα τα μονοπάτια που έχουν την ίδια αφετηρία $i_1$ και τον ίδιο προορισμό $i_k$.

Το πρόβλημα της ελάχιστης διαδρομής συνίσταται στην εύρεση του μονοπατιού ελάχιστου μήκους που συνδέει την αφετηρία με οποιονδήποτε άλλο κόμβο του δικτύου. Εναλλακτικά, μπορούμε να πούμε ότι αναζητούμε την ελάχιστη διαδρομή από τον κόμβο αφετηρίας προς τον κόμβο προορισμού.

Υποθέτουμε ότι πληρούνται οι παρακάτω προϋποθέσεις:

(1) Υπάρχει προσανατολισμένο μονοπάτι από την αφετηρία προς κάθε άλλο κόμβο του δικτύου.

(2) Όλα τα μήκη των τόξων είναι μη αρνητικοί αριθμοί.

Η δεύτερη υπόθεση, επιτρέπει το μήκος ενός τόξου να είναι μηδενικό, αλλά αποκλείει την περίπτωση αρνητικού μήκους. Ωστόσο, όπως θα δούμε αργότερα, υπάρχει η δυνατότητα αναζήτησης της ελάχιστης διαδρομής ακόμα και αν κάποια από τα τόξα έχουν αρνητικό μήκος.

Οι εφαρμογές του προβλήματος είναι πολλές. Ενδεικτικά:

- Εύρεση της διαδρομής ελάχιστου μήκους σε οδικά δίκτυα (βλ. προγράμματα πλοήγησης – navigators).
- Εύρεση της χρονικά συντομότερης διαδρομής.
- Εύρεση της διαδρομής ελάχιστου κόστους κατά τη μεταφορά ενός ατόμου ή αντικειμένου από ένα μέρος σε κάποιο άλλο, με συνδυασμό μέσων μεταφοράς και διαφορετικών διαδρομών.
- Εύρεση της ελάχιστης διαδρομής που ακολουθούν δεδομένα (data) σ' ένα δίκτυο.

- Εύρεση της διαδρομής του ηλεκτρικού ρεύματος από το σταθμό παραγωγής μέχρι τους τελικούς καταναλωτές ώστε να ελαχιστοποιούνται οι απώλειες ηλεκτρικής ενέργειας.

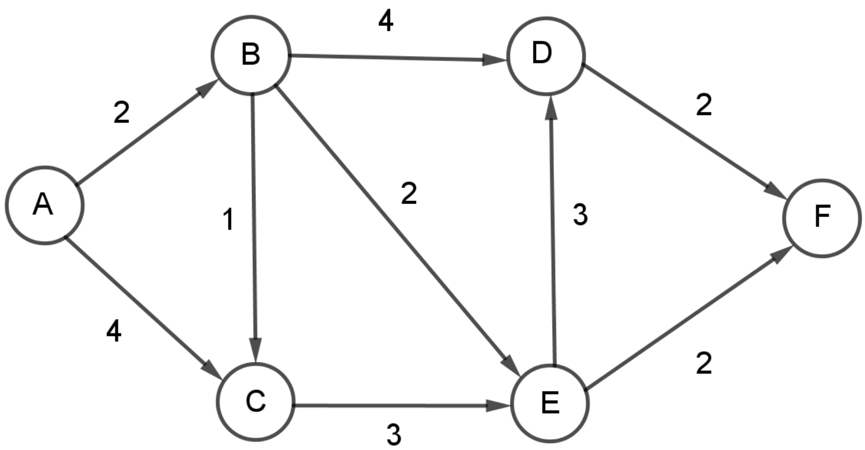
## Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ DIJKSTRA

Για την επίλυση του προβλήματος της ελάχιστης διαδρομής, όταν πληρούνται οι δύο υποθέσεις που αναφέρθηκαν χρησιμοποιείται συνήθως ο αλγόριθμος Dijkstra. Συνοπτικά πρόκειται για:

- Επαναληπτική διαδικασία που βρίσκει την ελάχιστη διαδρομή από έναν κόμβο (αφετηρία) προς κάθε άλλο κόμβο του γραφήματος.
- Δεν εφαρμόζεται σε γραφήματα με αρνητικά μήκη τόξων.
- Στηρίζεται σε τοπικά βέλτιστα.

**Πρότυπο παράδειγμα**

Θεωρούμε το παρακάτω δίκτυο, με αφετηρία τον κόμβο A και τέρμα τον κόμβο F. Αναζητούμε την ελάχιστη διαδρομή από το A στον F.




Σιγουρευόμαστε καταρχήν ότι δεν υπάρχουν τόξα με αρνητικά μήκη, γιατί τότε θα έπρεπε να εφαρμοστεί άλλος αλγόριθμος.

Για κάθε κορυφή μας ενδιαφέρει το μήκος της διαδρομής από την αφετηρία A προς την κορυφή αυτή.

**Συμβολισμοί**

Συμβολίζουμε με $V$ το σύνολο όλων των κόμβων του δικτύου.

$$V = \{A, B, C, D, E, F\}$$

Συμβολίζουμε με $E$ το σύνολο όλων των τόξων του δικτύου.

$$E = \{(A,B),(A,C),(B,C),(B,D),(B,E),(C,E),(D,F),(E,D),(E,F)\}.$$

Για κάθε τόξο $(i,j) \in E$, συμβολίζουμε με $d_{ij}$ το μήκος του τόξου $(i,j)$.

$$d_{AB} = 2, d_{AC} = 1, \dots, d_{EF} = 2.$$

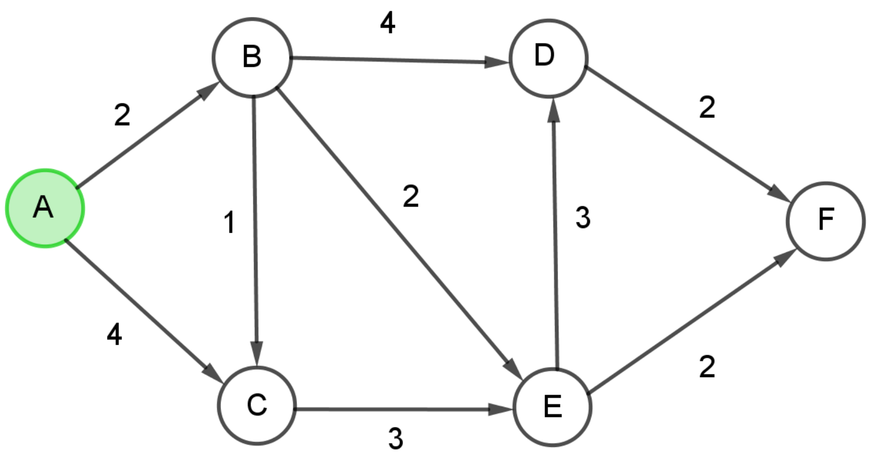
Ένας κόμβος $i$ χαρακτηρίζεται ως ***λυμένος*** (permanent) όταν έχει υπολογιστεί το μονοπάτι της ελάχιστης διαδρομής από την αφετηρία έως αυτόν τον κόμβο. Το πεπερασμένο μήκος αυτού του μονοπατιού, δηλαδή, η ελάχιστη απόσταση του κόμβου $i$ από την αφετηρία, συμβολίζεται με $D(i)$. Αν δεν έχει υπολογιστεί τέτοιο μονοπάτι, ο κόμβος χαρακτηρίζεται ως ***μη λυμένος*** και θεωρούμε $D(i) = \infty$. Συμβολίζουμε με $P$ το σύνολο των λυμένων κόμβων και με $U$ το σύνολο των μη λυμένων κόμβων.

$$U = V - P$$

<u>**Αρχικοποίηση**</u>: **Θεωρούμε το μήκος της διαδρομής από το Α έως το Α μηδέν και το μήκος κάθε άλλης διαδρομής από το Α ίσο με άπειρο.**

$$P = \{A\}, \quad D(A) = 0$$

$$U = \{B, C, D, E, F\} \text{ και } D(i) = \infty \text{ για κάθε κόμβο } i \in U.$$




Έτσι, αρχικά, ο μόνος λυμένος κόμβος είναι ο Α.

Εφόσον έχει υπολογιστεί το μονοπάτι ελάχιστης διαδρομής από την αφετηρία προς έναν κόμβο $j$, συμβολίζουμε με $b(j)$ τον προηγούμενο κόμβο του $j$ πάνω σε αυτό το ελάχιστο μονοπάτι.

Για κάθε άλυτο κόμβο $j \in U$ που είναι άμεσα συνδεδεμένος με έναν ή περισσότερους λυμένους κόμβους $i \in P$, υπολογίζουμε το μήκος της ελάχιστης διαδρομής από τον κόμβο αφετηρίας μέχρι τον κόμβο $j$:

$$D(j) = \min_{i \in P}\{D(i) + d_{ij}\}, (i,j) \in E.$$

Συμβολίζουμε με $Temp$ το σύνολο των διαθέσιμων προς επίλυση κόμβων, δηλαδή, των άλυτων κόμβων που είναι άμεσα συνδεδεμένοι με κάποιον λυμένο κόμβο.

Στην n-οστή επανάληψη είσοδος είναι το σύνολο των λυμένων κόμβων. Για κάθε λυμένο κόμβο γνωρίζουμε την ελάχιστη διαδρομή και το μήκος της από την αφετηρία. Για κάθε μη λυμένο κόμβο που είναι άμεσα συνδεδεμένος με κάποιον λυμένο κόμβο, υπολογίζουμε την απόστασή του από την αφετηρία, προσθέτοντας στην ελάχιστη απόσταση του λυμένου κόμβου το μήκος της ακμής που συνδέει τον λυμένο με τον μη λυμένο κόμβο. Επιλέγουμε τον μη λυμένο κόμβο που παρουσιάζει την ελάχιστη απόσταση από την αφετηρία και τον προσθέτουμε στο σύνολο $P$ των λυμένων κόμβων (ταυτόχρονα τον αφαιρούμε από τα σύνολα $U$ και $Temp$. Αν αυτός ο κόμβος είναι ο κόμβος προορισμού, ο αλγόριθμος τερματίζει.

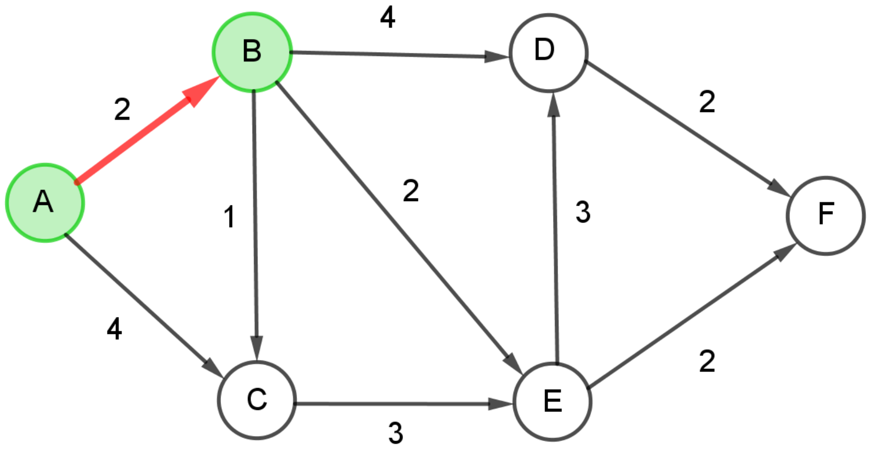
<u>1η Επανάληψη</u>

Ο μόνος λυμένος κόμβος είναι ο A, ο οποίος έχει $D(A)=0$ και $b(A) = \emptyset$. Αυτός γειτονεύει με τους κόμβους B και C, δηλαδή, $Temp = \{B, C\}$ .

Για τον κόμβο B είναι: $D(A) + d_{AB} = 0 + 2 = 2 < +\infty = D(B)$.

Για τον κόμβο C είναι: $D(A) + d_{AC} = 0 + 4 = 4 < +\infty = D(C)$.

Αφού η μικρότερη από αυτές τις αποστάσεις είναι 2, θεωρούμε ως νέο λυμένο κόμβο τον B και θέτουμε $D(B) = 2$ με . Επίσης είναι $D(C) = 4$ με $b(B) = \{A\}$ και $b(C) = \{A\}$.




2η επανάληψη

Τώρα είναι:

$$P = \{A, B\}, U = \{C, D, E, F\}, Temp = \{C, D, E\}$$

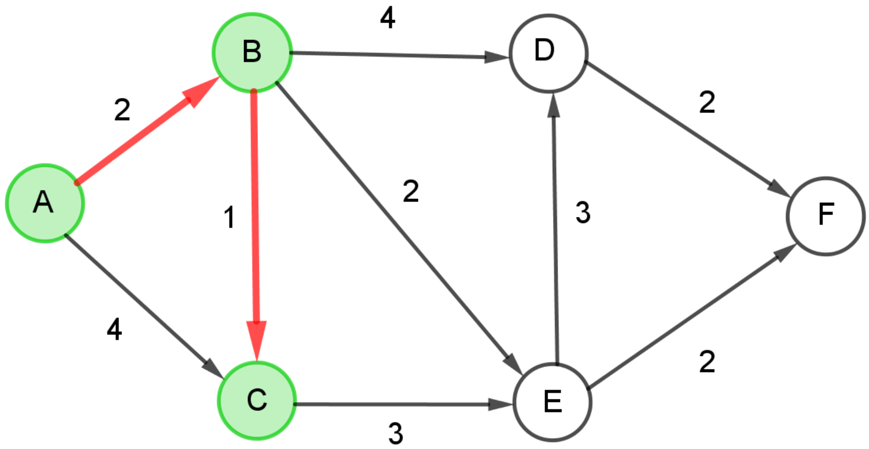
Για τη νέα λυμένη κορυφή B, γειτονικές κορυφές είναι οι C, D και E.

$D(B) + d_{BC} = 2 + 1 = 3 < 4 = D(C)$

$D(B) + d_{BD} = 2 + 4 = 6 < +\infty = D(D)$

$D(B) + d_{BE} = 2 + 2 = 4 < +\infty = D(E)$

Επομένως επόμενος λυμένος κόμβος θα είναι ο C που συνδέεται με τον B.



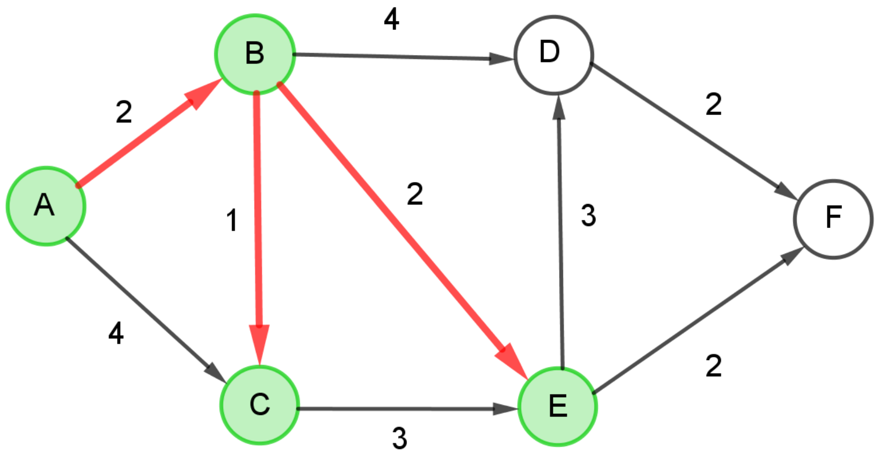
3η επανάληψη

Για τη νέα λυμένη κορυφή C, γειτονική μη λυμένη κορυφή είναι μόνο η E.

$D(C) + d_{CE} = 3 + 3 = 6 > 4 = D(E)$

Επομένως η απόσταση του κόμβου E δεν θα αλλάξει.

Επομένως επόμενος λυμένος κόμβος θα είναι ο E που συνδέεται με τον B.




4η επανάληψη

Για τη νέα λυμένη κορυφή E, γειτονικές μη λυμένες κορυφές είναι οι D και F.

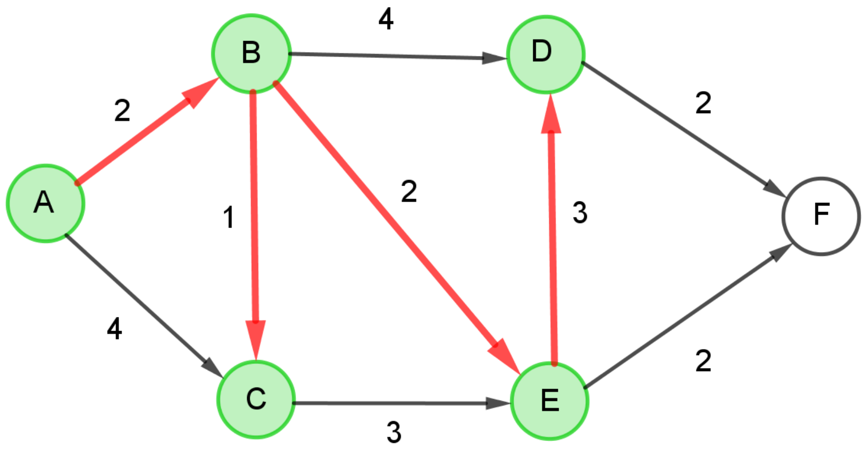
$D(E) + d_{ED} = 4 + 3 = 7 < 6 = D(D)$

$D(E) + d_{EF} = 4 + 2 = 6 < +\infty = D(F)$

Επομένως θα αλλάξει μόνο η απόσταση του κόμβου F.

Βλέπουμε ότι ως επόμενο λυμένο κόμβο μπορούμε να επιλέξουμε είτε τον D είτε τον F. Η επιλογή είναι αυθαίρετη.

Λεξικογραφικά επιλέγουμε τον κόμβο D.




<u>5η επανάληψη</u>

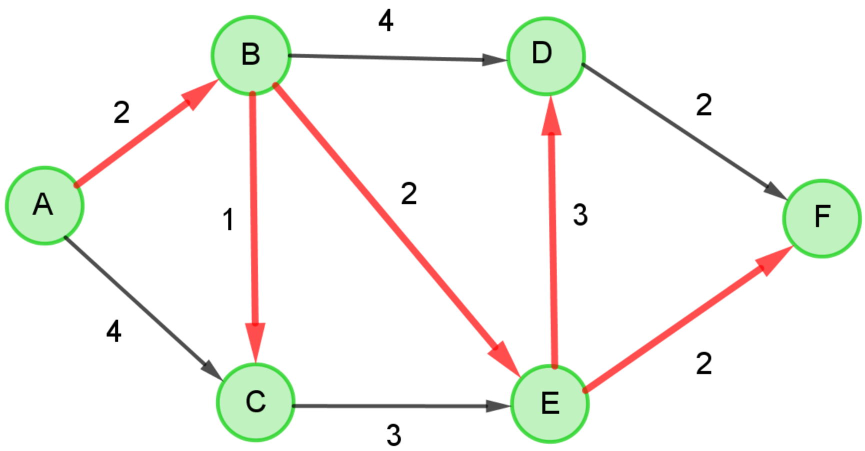
Για τη νέα λυμένη κορυφή D, γειτονική μη λυμένη κορυφή είναι μόνο η F.

$D(D) + d_{DF} = 6 + 2 = 8 > 6 = D(F)$

Επομένως η απόσταση του κόμβου F δεν θα αλλάξει.

Επόμενος λυμένος κόμβος θα είναι ο F που συνδέεται με τον E.

Αφού φτάσαμε στην τελική κορυφή, ο αλγόριθμος έχει ολοκληρωθεί και ελάχιστο μήκος από τον A στον F είναι 6.

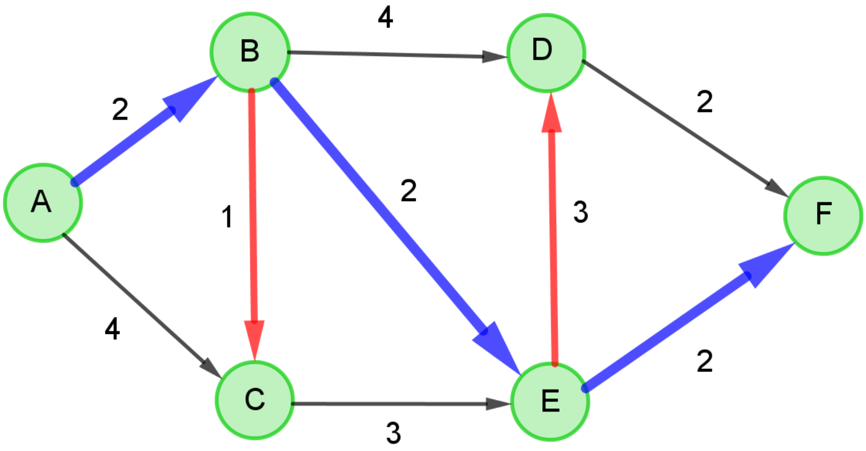


Συνοπτικά οι επαναλήψεις φαίνονται παρακάτω:

| **Επανάληψη** | **Λυμένος Κόμβος** | **Γειτονικός μη λυμένος** | **Απόσταση από αρχή** | **Ελάχιστη Απόσταση** | **Νέος Λυμένος Κόμβος** | **Σύνδεση** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | A | B | 2 | 2 | B | AB |
| | | C | 4 | | | |
| 2 | A | C | 4 | | | |
| | B | C | 3 | 3 | C | BC |
| | | D | 6 | | | |
| | | E | 4 | | | |
| 3 | B | D | 6 | | | |
| | | E | 4 | 4 | E | BE |
| | C | E | 6 | | | |
| 4 | B | D | 6 | 6 | D | BD |
| | E | D | 7 | | | |
| | | F | 6 | 6 | | |
| 5 | D | F | 8 | 6 | F | EF |
| | E | F | 6 | | | |

Η συντομότερη διαδρομή εντοπίζεται στην τελευταία στήλη, από το τέλος προς την αρχή:

F ← E ← B ← A με μήκος 6.




Συνοπτικά τα βήματα του αλγόριθμου σε ψευδοκώδικα:

***Αλγόριθμος Dijkstra***

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $D(A) = 0$ | Θέτουμε την ελάχιστη απόσταση της αφετηρίας ίση με μηδέν |
| 2 | $b(A) = \emptyset$ | Η αφετηρία δεν έχει προηγούμενο κόμβο |
| 3 | $P = \{A\}$ | Το αρχικό σύνολο των λυμένων κόμβων περιέχει μόνο την αφετηρία |
| 4 | $U = V - P$ | Ορίζουμε το σύνολο των μη λυμένων κόμβων |
| 5 | Για κάθε $j \in U, D(j) = +\infty$ | Για κάθε μη λυμένο κόμβο, θέτουμε την ελάχιστη απόστασή του από την αρχή ίση με άπειρο. |
| 6 | Αν $U \neq \emptyset$ προχώρησε στο βήμα 7, αλλιώς πήγαινε στο βήμα 12 | Αρχή επανάληψης |
| 7 | $Temp = \{j \in U \mid \exists \in P \;\; \mu\varepsilon \; (i,j) \in E\}$ | Θεωρούμε το σύνολο όλων των μη λυμένων κόμβων που είναι άμεσα συνδεδεμένοι με κάποιον λυμένο. |
| 8 | Για κάθε $j \in Temp$ υπολογίζουμε:<br>$D(j) = \min_{i \in P}\{D(i) + d_{ij}\}, (i,j) \in E$ | |

| | | |
|---|---|---|
| | Επιλέγουμε το $j \in Temp$ με $\min_{j \in Temp} \{D(j)\}$ | Επιλέγουμε τον μη λυμένο κόμβο που γειτονεύει με κάποιον λυμένο κόμβο και έχει τη μικρότερη ελάχιστη απόσταση από την αφετηρία. |
| 9 | $b(j) = i$ | Προηγούμενος του $j$ είναι ο κόμβος $i$ του βήματος 8 |
| 10 | $P = P \cup \{j\}$ και $U = U - \{j\}$ | Ο $j$ προστίθεται στο σύνολο των λυμένων κόμβων και αφαιρείται από το σύνολο των μη λυμένων |
| 11 | Πήγαινε στο βήμα 6 | Τέλος επανάληψης |
| 12 | Για κάθε $i \in V$, επέστρεψε $D(i)$ και $b(i)$ | Output: Για κάθε κόμβο, ο προηγούμενος κόμβος και η ελάχιστη απόστασή του από την αφετηρία. |

## Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ FLOYD

Ο αλγόριθμος αυτός προσδιορίζει τη συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο οποιωνδήποτε κόμβων ενός δικτύου.

Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί την αναπαράσταση ενός δικτύου $n$ κόμβων με έναν τετραγωνικό πίνακα $n \times n$. Η τιμή του κελιού $(i, j)$ του πίνακα δίνει την απόσταση $d_{ij}$ της διαδρομής από τον κόμβο $i$ μέχρι τον κόμβο $j$.

Η ιδέα του αλγορίθμου Floyd είναι η εξής: Αν θεωρήσουμε τρεις κόμβους $i, j$ και $k$, συγκρίνουμε την απόσταση $d_{ij}$ με το άθροισμα των αποστάσεων $d_{ik}$ και $d_{kj}$, και αν

$$d_{ik} + d_{kj} < d_{ij}$$

συμπεραίνουμε ότι είναι συντομότερο να προσεγγίσουμε τον κόμβο $j$ από τον κόμβο $i$ δια μέσου του κόμβου $k$. Δηλαδή, σε αυτήν την περίπτωση αντικαθιστούμε την άμεση διαδρομή $i \rightarrow j$ με την έμμεση διαδρομή $i \rightarrow k \rightarrow j$.

Τα βήματα του αλγορίθμου είναι τα εξής:

**Βήμα 0:** Ορίζουμε τον αρχικό πίνακα αποστάσεων $D_0$ και τον πίνακα αλληλουχίας κόμβων $B_0$:

$$\begin{array}{c|cccccc|}
\boldsymbol{D_0} & 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & n \\
\hline
1 & 0 & d_{12} & \cdots & d_{1j} & \cdots & d_{1n} \\
2 & d_{21} & 0 & \cdots & d_{2j} & \cdots & d_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
i & d_{i1} & d_{i2} & \cdots & d_{ij} & \cdots & d_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
n & d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nj} & \cdots & 0 \\
\hline
\end{array}$$

$$
\begin{array}{c|cccccc|}
\boldsymbol{B_0} & 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & n \\
\hline
1 & 0 & 2 & \cdots & j & \cdots & n \\
2 & 1 & 0 & \cdots & j & \cdots & n \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
i & 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & n \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
n & 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Θέτουμ $k = 1$ε.

**Βήμα k:** Δημιουργούμε τους πίνακες $D_k$ και $B_k$ ως εξής:

Αρχικά θεωρούμε $D_k = D_{k-1}$ και $B_k = B_{k-1}$.

Ορίζουμε την $k$ γραμμή και την $k$ στήλη του πίνακα $D_{k-1}$ ως γραμμή και στήλη οδηγό, αντίστοιχα.

Για κάθε στοιχείο $d_{ij}$ του $D_{k-1}$, αν

$$d_{ik} + d_{kj} < d_{ij},\ i,j \neq k,\ i \neq j$$

θέτουμε στον πίνακα $D_k$ το στοιχείο $d_{ij}$ ίσο με $d_{ik} + d_{kj}$.

Σε αυτήν την περίπτωση, στον πίνακα $B_k$ αντικαθιστούμε το στοιχείο $b_{ij}$ με το $k$.

Θέτουμε $k = k + 1$.

Αν $k = n + 1$ ο αλγόριθμος σταματάει, αλλιώς επαναλαμβάνουμε το βήμα $k$.

Σχηματικά:

$$
\begin{array}{l|ccccccc|}
 & & \text{Στήλη } j & & \text{Στήλη οδηγός } k & & \text{Στήλη } q & \\
\hline
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\text{Γραμμή } i & \cdots & d_{ij} & \leftarrow & \boldsymbol{d_{ik}} & \rightarrow & d_{iq} & \cdots \\
 & & \uparrow & & \vdots & & \uparrow & \\
\text{Γραμμή οδηγός } k & \cdots & \boldsymbol{d_{kj}} & \cdots & & \cdots & \boldsymbol{d_{kq}} & \cdots \\
 & & \downarrow & & \vdots & & \downarrow & \\
\text{Γραμμή } p & \cdots & d_{pj} & \leftarrow & \boldsymbol{d_{pk}} & \rightarrow & d_{pq} & \cdots \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\hline
\end{array}
$$

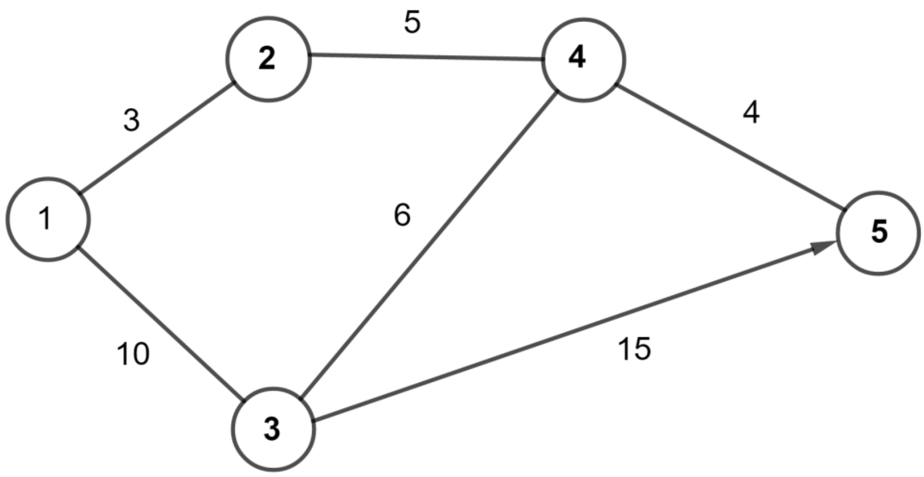
Μόλις ολοκληρωθούν ακριβώς $n$ επαναλήψεις του αλγορίθμου, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη συντομότερη διαδρομή ανάμεσα σε οποιουσδήποτε δύο κόμβους $i$ και $j$:

Στον πίνακα $D_n$, το στοιχείο $d_{ij}$ δίνει το μήκος της συντομότερης διαδρομής ανάμεσα στους κόμβους $i$ και $j$.

Από τον πίνακα $B_n$, βρίσκουμε τον ενδιάμεσο κόμβο $k = b_{ij}$, που υποδεικνύει ως βέλτιστη τη διαδρομή $i \rightarrow k \rightarrow j$. Αν $b_{ik} = k$ και $b_{kj} = j$, η διαδικασία σταματά, και έχουν βρεθεί όλοι οι ενδιάμεσοι κόμβοι. Αλλιώς, η διαδικασία επαναλαμβάνεται ανάμεσα στους κόμβους $i$ και $k$ και ανάμεσα στους $k$ και $j$.

**Παράδειγμα**

Στο παρακάτω δίκτυο, να βρεθούν οι συντομότερες διαδρομές ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε κόμβους.




*Λύση*

**Αρχικοποίηση:**

Οι πίνακες $D_0$ και $B_0$ είναι:

| D0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3 | 10 | ∞ | ∞ |
| 2 | 3 | 0 | ∞ | 5 | ∞ |
| 3 | 10 | ∞ | 0 | 6 | 15 |
| 4 | ∞ | 5 | 6 | 0 | 4 |
| 5 | ∞ | ∞ | ∞ | 4 | 0 |

| B0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 1 | X | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 1 | 2 | X | 4 | 5 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | X | 5 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | X |

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας $D_0$ είναι συμμετρικός, εκτός από το στοιχείο $d_{53} = \infty$, επειδή δεν επιτρέπεται η κυκλοφορία από τον κόμβο 5 προς τον κόμβο 3.

**1η Επανάληψη:**

Θέτουμε $k = 1$. Η γραμμή οδηγός και η στήλη οδηγός (σημειώνονται με κίτρινο χρώμα) είναι η πρώτη γραμμή και η πρώτη στήλη του πίνακα $D_0$. Τα κελιά $d_{23}$ και $d_{32}$ (σημειώνονται με ροζ χρώμα) είναι τα μόνα που μπορούν να βελτιωθούν, αφού όλα τα άλλα έχουν τιμή μικρότερη ή ίση από τουλάχιστον μία από τις τιμές της γραμμής ή της στήλης οδηγού.

Διαμορφώνουμε τους πίνακες $D_1$ και $B_1$ ως εξής:

$d_{21} + d_{13} = 3 + 10 = 13 < d_{23}$. Οπότε θέτουμε $d_{23} = 13$ και $b_{23} = 1$.

$d_{31} + d_{12} = 10 + 3 = 13 < d_{32}$. Οπότε θέτουμε $d_{32} = 13$ και $b_{32} = 1$.

(Οι αλλαγές σημειώνονται με κόκκινο χρώμα)

| D1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3 | 10 | ∞ | ∞ |
| 2 | 3 | 0 | 13 | 5 | ∞ |
| 3 | 10 | 13 | 0 | 6 | 15 |
| 4 | ∞ | 5 | 6 | 0 | 4 |
| 5 | ∞ | ∞ | ∞ | 4 | 0 |

| B1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 1 | X | 1 | 4 | 5 |
| 3 | 1 | 1 | X | 4 | 5 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | X | 5 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | X |

**2η Επανάληψη:**

Θέτουμε $k = 2$. Η γραμμή οδηγός και η στήλη οδηγός είναι η δεύτερη γραμμή και η δεύτερη στήλη του πίνακα $D_1$.

Διαμορφώνουμε τους πίνακες $D_2$ και $B_2$ ως εξής:

$d_{12} + d_{24} = 3 + 5 = 8 < d_{14}$. Οπότε θέτουμε $d_{14} = 8$ και $b_{14} = 2$.

$d_{42} + d_{21} = 5 + 3 = 8 < d_{41}$. Οπότε θέτουμε $d_{41} = 8$ και $b_{41} = 2$.

| D2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3 | 10 | 8 | ∞ |
| 2 | 3 | 0 | 13 | 5 | ∞ |
| 3 | 10 | 13 | 0 | 6 | 15 |
| 4 | 8 | 5 | 6 | 0 | 4 |
| 5 | ∞ | ∞ | ∞ | 4 | 0 |

| B2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X | 2 | 3 | 2 | 5 |
| 2 | 1 | X | 1 | 4 | 5 |
| 3 | 1 | 1 | X | 4 | 5 |
| 4 | 2 | 2 | 3 | X | 5 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | X |

**3η Επανάληψη:**

Θέτουμε $k = 3$. Η γραμμή οδηγός και η στήλη οδηγός είναι η τρίτη γραμμή και η τρίτη στήλη του πίνακα $D_2$.

Διαμορφώνουμε τους πίνακες $D_3$ και $B_3$ ως εξής:

$d_{13} + d_{35} = 10 + 15 = 25 < d_{15}$. Οπότε θέτουμε $d_{15} = 25$ και $b_{15} = 3$.

$d_{23} + d_{35} = 13 + 15 = 28 < d_{25}$. Οπότε θέτουμε $d_{25} = 28$ και $b_{25} = 3$.

| D3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3 | 10 | 8 | 25 |
| 2 | 3 | 0 | 13 | 5 | 28 |
| 3 | 10 | 13 | 0 | 6 | 15 |
| 4 | 8 | 5 | 6 | 0 | 4 |
| 5 | ∞ | ∞ | ∞ | 4 | 0 |

| B3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X | 2 | 3 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | X | 1 | 4 | 3 |
| 3 | 1 | 1 | X | 4 | 5 |
| 4 | 2 | 2 | 3 | X | 5 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | X |

**4η Επανάληψη:**

Θέτουμε $k = 4$. Και εργαζόμενοι όπως πριν,, διαμορφώνουμε τους πίνακες $D_4$ και $B_4$:

| D4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3 | 10 | 8 | **12** |
| 2 | 3 | 0 | **11** | 5 | **9** |
| 3 | 10 | **11** | 0 | 6 | **10** |
| 4 | 8 | 5 | 6 | 0 | 4 |
| 5 | **12** | **9** | **10** | 4 | 0 |

| B4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X | 2 | 3 | 2 | **4** |
| 2 | 1 | X | **4** | 4 | **4** |
| 3 | 1 | **4** | X | 4 | **4** |
| 4 | 2 | 2 | 3 | X | 5 |
| 5 | **4** | **4** | **4** | 4 | X |

Ας παρατηρήσουμε ότι δεν μεταβλήθηκαν όλα τα στοιχεία που εξετάσαμε, αφού, για παράδειγμα

$d_{34} + d_{41} = 6 + 8 = 14 > d_{31}$. Οπότε δεν μεταβάλλονται τα στοιχεία $d_{31}$ και $b_{31}$.

**5η Επανάληψη:**

| D5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 3 | 10 | 8 | 12 |
| 2 | 3 | 0 | 11 | 5 | 9 |
| 3 | 10 | 11 | 0 | 6 | 10 |
| 4 | 8 | 5 | 6 | 0 | 4 |
| 5 | 12 | 9 | 10 | 4 | 0 |

| B5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | X | 2 | 3 | 2 | 4 |
| 2 | 1 | X | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 1 | 4 | X | 4 | 4 |
| 4 | 2 | 2 | 3 | X | 5 |
| 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | X |

Οι τελικοί πίνακες $D_5$ και $B_5$ περιέχουν τις απαραίτητες πληροφορίες για τον προσδιορισμό της συντομότερης διαδρομής ανάμεσα σε δύο κόμβους του δικτύου.

Π.χ. Η συντομότερη απόσταση από τον κόμβο 1 προς τον κόμβο 5 είναι η $d_{15} = 12$. Για να προσδιορίσουμε την αντίστοιχη διαδρομή, ας σημειώσουμε ότι το τμήμα $(i, j)$ είναι μια άμεση σύνδεση, μόνο αν $b_{ij} = j$ . Διαφορετικά, ανάμεσα στους $i$ και $j$ μεσολαβεί ενδιάμεσος κόμβος. Επειδή $b_{15} = 4 \neq 5$, η διαδρομή καταρχήν θα είναι $1 \to 4 \to 5$. Επειδή $b_{14} = 2 \neq 4$. το τμήμα $(1,4)$ δεν είναι μια άμεση σύνδεση, επομένως η σύνδεση $1 \to 4$ θα αντικατασταθεί από την $1 \to 2 \to 4$. Έτσι η διαδρομή $1 \to 4 \to 5$ γίνεται $1 \to 2 \to 4 \to 5$. Τώρα, επειδή $b_{12} = 2$, $b_{24} = 4$ και $b_{45} = 5$, δεν απαιτείται περαιτέρω ανάλυση και η συντομότερη διαδρομή είναι η $1 \to 2 \to 4 \to 5$.

## ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ BELLMAN – FORD

- Επαναληπτική διαδικασία που βρίσκει την ελάχιστη διαδρομή από έναν κόμβο (αφετηρία) προς κάθε άλλο κόμβο του γραφήματος.
- Εφαρμόζεται σε γραφήματα με αρνητικά μήκη τόξων.
- Αποτυγχάνει σε γραφήματα με αρνητικά κυκλώματα, γιατί σε μια τέτοια περίπτωση δεν υπάρχει ελάχιστη διαδρομή.
- Αν το πλήθος των επαναλήψεων είναι μεγαλύτερο ή ίσο του αριθμού των κορυφών, τότε υπάρχει στο γράφημα κάποιος κύκλος.
- Όλα τα μονοπάτια θεωρούνται απλά (δηλ. δεν υπάρχει επαναλαμβανόμενος κόμβος).

Έστω ότι έχουμε ένα προσανατολισμένο γράφημα με N κορυφές, στο οποίο κάθε τόξο $(i, j)$ έχει μήκος $d_{ij}$ και χωρίς αρνητικούς κύκλους.

Έστω A μια κορυφή του γραφήματος.

Για κάθε κορυφή j που είναι προσβάσιμη από την A, θέτουμε $D(j)$ την απόσταση από την A στην j.

Για κάθε j θέτουμε $D(j) = +\infty$, $b(j) = \emptyset$

$D(A) = 0$

Επανέλαβε $n - 1$ φορές:

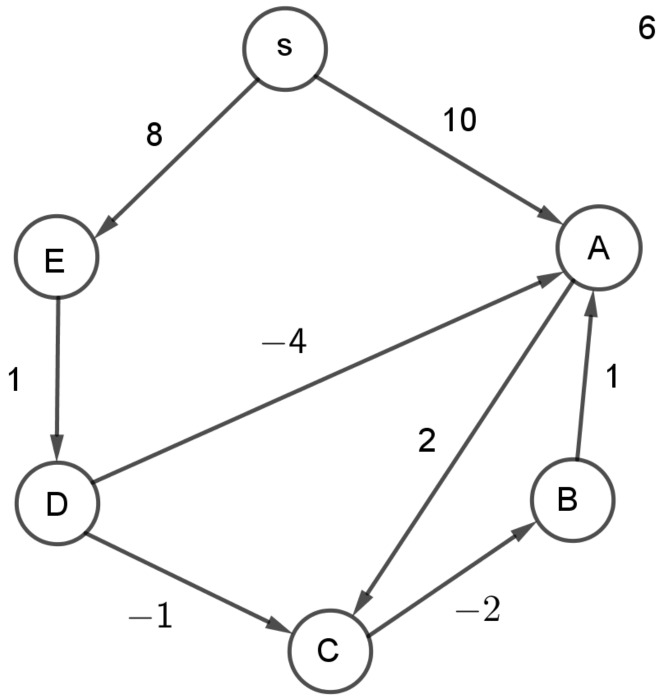
για κάθε τόξο$(i, j)$:

$$D(j) = \min_i \{D(j), D(i) + d_{ij}\}, (i, j) \in E$$

Βλέπουμε ότι σε κάθε επανάληψη εξετάζουμε όλες τις ακμές.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ**

Θεωρούμε το παρακάτω δίκτυο.




6 κόμβοι =
5 επαναλήψεις

Ξεκινάμε από τον κόμβο s.

Φτιάχνουμε τον παρακάτω πίνακα για να σημειώνουμε τα μήκη των διαδρομών.

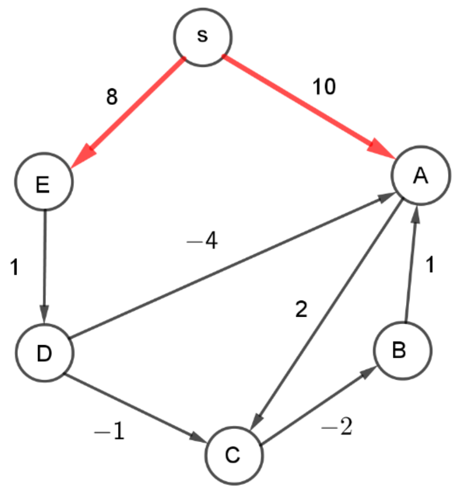
| S | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |

Θέτουμε 0 το μήκος της διαδρομής προς την κορυφή S και ∞ για τις υπόλοιπες κορυφές.

Σε κάθε επανάληψη θα εξετάζουμε όλες τις ακμές. Για να γίνει αυτό οργανωμένα, κοιτάμε έναν έναν τους κόμβους εξετάζοντας τις εξερχόμενες από αυτόν ακμές. Όταν γίνει αυτό για όλους τους κόμβους, θα έχουμε εξετάσει όλες τις ακμές.

1η επανάληψη

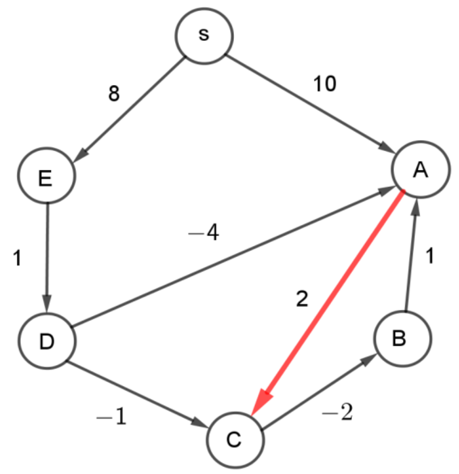
Ξεκινάμε από τον κόμβο S και προχωράμε προς τα δεξιά.




Από τον S μπορούμε να φτάσουμε στον κόμβο A με κόστος 10 και στον κόμβο E με κόστος 8.

Οπότε ενημερώνουμε τον πίνακα.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| **S** | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** |
| 0 | 10 | ∞ | ∞ | ∞ | 8 |

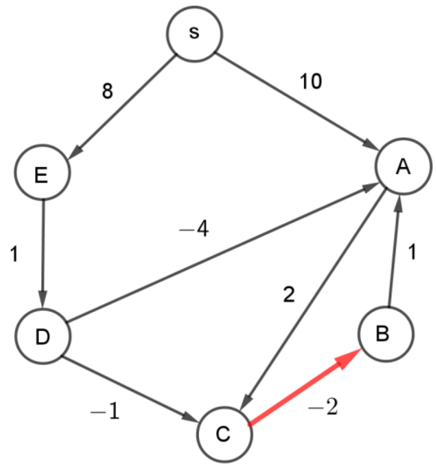



Από τον A μπορούμε να φτάσουμε στον κόμβο C με κόστος 2.

Επομένως το συνολικό κόστος προς τον C είναι 10 (μέχρι να φτάσουμε στον A) + 2 (από τον A στον C) = 12

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| **S** | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** |
| 0 | 10 | ∞ | ∞ | ∞ | 8 |
| 0 | 10 | ∞ | 12 | ∞ | 8 |

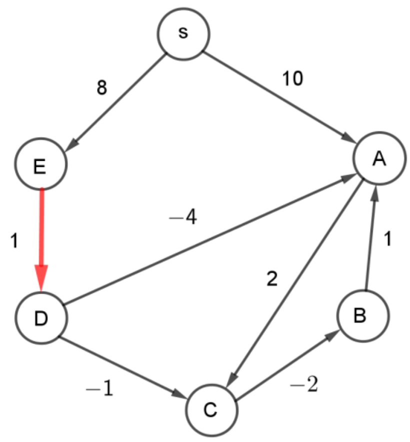
Για τον κόμβο B παρατηρούμε ότι ακόμα δεν έχει γίνει ακόμα προσβάσιμος (έχει κόστος ∞), οπότε μπορούμε να τον παραλείψουμε.




Από τον C μπορούμε να φτάσουμε στον κόμβο B με κόστος −2 . Επομένως το συνολικό κόστος προς τον B είναι 12-2=10

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| **S** | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** |
| 0 | 10 | ∞ | ∞ | ∞ | 8 |
| 0 | 10 | ∞ | 12 | ∞ | 8 |
| 0 | 10 | 10 | 12 | ∞ | 8 |

Παραλείπουμε τον D που έχει κόστος ∞.




Από τον E μπορούμε να φτάσουμε στον κόμβο D με κόστος 1.

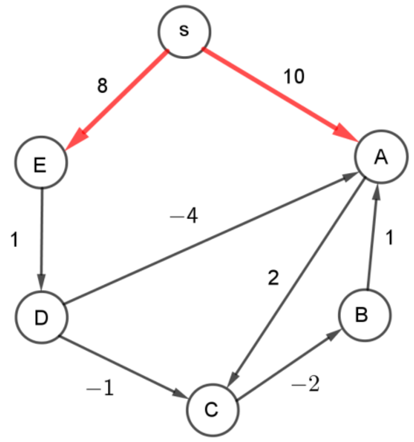
Επομένως το συνολικό κόστος προς τον D είναι 8+1=9

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |
| **S** | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** |
| 0 | 10 | ∞ | ∞ | ∞ | 8 |
| 0 | 10 | ∞ | 12 | ∞ | 8 |
| 0 | 10 | 10 | 12 | ∞ | 8 |
| 0 | 10 | 10 | 12 | 9 | 8 |

Αφού διατρέξαμε όλους τους κόμβους, ολοκληρώθηκε η πρώτη επανάληψη.

2η επανάληψη

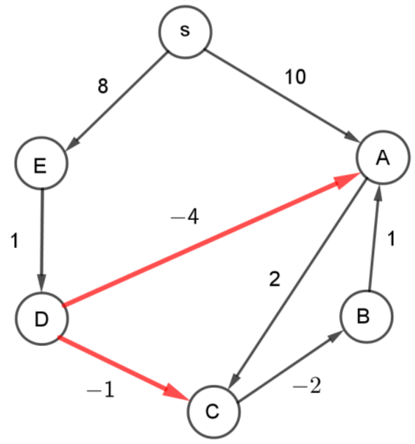
Ξεκινάμε πάλι από τον κόμβο S.




Από τον S μπορούμε να φτάσουμε στον κόμβο A με κόστος 10 και στον κόμβο E με κόστος 8. Παρατηρούμε ότι οι μέχρι τώρα αποστάσεις δεν βελτιώνονται, οπότε ο πίνακας δεν αλλάζει.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 10 | 10 | 12 | 9 | 8 |
| **S** | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** |
| 0 | 10 | 10 | 12 | 9 | 8 |

Το ίδιο συμβαίνει και με τους κόμβους A, B και C.




Από τον D μπορούμε να φτάσουμε στον κόμβο A με συνολικό κόστος 9-4=5 και στον κόμβο C με συνολικό κόστος 9-1=8. Παρατηρούμε ότι οι μέχρι τώρα αποστάσεις βελτιώνονται, οπότε ενημερώνουμε τον πίνακα.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 10 | 10 | 12 | 9 | 8 |
| **S** | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** |
| 0 | 10 | 10 | 12 | 9 | 8 |
| 0 | 5 | 10 | 8 | 9 | 8 |

Ο κόμβος E δεν δίνει καμία βελτίωση κι έτσι ολοκληρώνεται η 2η επανάληψη.

3η επανάληψη

Η τρίτη επανάληψη εξελίσσεται με παρόμοιο τρόπο

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 5 | 10 | 8 | 9 | 8 |
| | **S** | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** |
| A | 0 | 10 | 10 | 7 | 9 | 8 |
| C | 0 | 5 | 5 | 7 | 9 | 8 |

4η επανάληψη

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 5 | 5 | 7 | 9 | 8 |
| | **S** | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** |

Εδώ παρατηρούμε ότι δεν επέρχεται καμία βελτίωση στις αποστάσεις του πίνακα.

Αυτό σημαίνει ότι ο αλγόριθμος ολοκληρώθηκε και μάλιστα σε λιγότερες επαναλήψεις από n-1.

Στον τελικό πίνακα φαίνονται οι μικρότερες διαδρομές από τον s προς όλους τους άλλους κόμβους.

Ο αριθμός των επαναλήψεων θα μπορούσε να είναι διαφορετικός (όχι πάνω από 5) και σε κάθε επανάληψη να έχουμε διαφορετικές ενδιάμεσες αποστάσεις, ανάλογα με τη σειρά που εξετάζουμε τους κόμβους. Η βέλτιστη όμως λύση θα είναι η ίδια.

## ΤΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

## ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΣΥΝΤΟΜΟΤΕΡΗΣ ΔΙΑΔΡΟΜΗΣ

Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής θα μπορούσε να επιλυθεί και με την βοήθεια ενός υποδείγματος γραμμικού προγραμματισμού.

Έστω ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε τη συντομότερη διαδρομή ανάμεσα σε δύο κόμβους $s$ και $f$ ενός δικτύου με $n$ κόμβων.

Θεωρούμε ότι μία μονάδα ροής εισέρχεται στον κόμβο $s$ και εξέρχεται από τον κόμβο $f$. Ορίζουμε την ποσότητα ροής στο τόξο $(i,j)$:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \alpha\nu\ \tau o\ \tau \acute{o} \xi o\ (i,j)\ \alpha\nu \acute{\eta} \kappa \varepsilon\iota\ \sigma\tau\eta\ \sigma\upsilon\nu\tau o\mu \acute{o} \tau\varepsilon\rho\eta\ \delta\iota\alpha\delta\rho o\mu \acute{\eta} \\ 0 & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa \acute{\alpha} \end{cases}$$

Έστω $c_{ij}$ το μήκος του τόξου $(i,j)$.

Η προς ελαχιστοποίηση αντικειμενική συνάρτηση είναι η

$$z = \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij}$$

Οι περιορισμοί αφορούν τη διατήρηση της ροής σε κάθε κόμβο:

Συνολική εισερχόμενη ροή = Συνολική εξερχόμενη ροή

Δηλαδή,

$$(\varepsilon \acute{\iota} \sigma o\delta o\varsigma\ \sigma\tau o\ \kappa \acute{o} \mu\beta o\ j) + \sum_i x_{ij} = (\acute{\varepsilon} \xi o\delta o\varsigma\ \alpha\pi \acute{o}\ \tau o\nu\ \kappa \acute{o} \mu\beta o\ j) + \sum_k x_{jk}$$

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ


1. Γιαννίκου Ι., «Σημειώσεις για το μάθημα 'Τεχνικές Ανάλυσης Διοικητικών Αποφάσεων'» του τμήματος Διοίκησης Επιχειρήσεων, 2020
2. Κολέτσου Ι. και Στογιάννη Δ., «Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα», 4η έκδοση, Εκδόσεις Συμεών, 2021
3. Κολέτσου Ι. και Στογιάννη Δ., «Επιχειρησιακή Έρευνα», Εκδόσεις Συμεών, 2021
4. Hillier F. και Lieberman G. «Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα», Εκδόσεις Τζιόλα, 2018
5. Taha H.A., «Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα», Εκδόσεις Τζιόλα, 2018
6. Hillier F. και Lieberman G. «Introduction To Operations Research», 10η έκδοση, Εκδόσεις McGraw-Hill, 2015
7. Υψηλάντη Π., «Επιχειρησιακή Έρευνα», 5η έκδοση, Εκδόσεις Προπομπός, 2017