



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Τεχνικές Ανάλυσης Διοικητικών Αποφάσεων

Ενότητα 3: Συστήματα ουρών αναμονής

Καθηγητής Γιάννης Γιαννίκος

Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Σκοποί ενότητας

- Μελέτη συστημάτων ουρών αναμονής

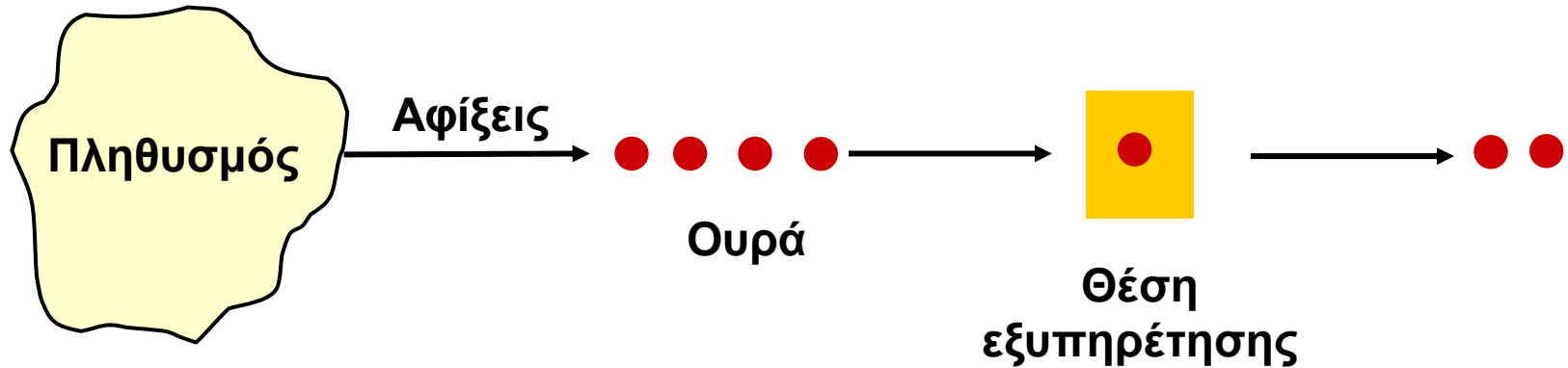
Συστήματα ουρών αναμονής

Ουρές Αναμονής

- Προκύπτουν σχεδόν σε κάθε σύστημα εξυπηρέτησης
- Στοιχεία
 - Αφίξεις
 - Από πού;
 - Κάθε πότε;
 - Εξυπηρετήσεις
 - Πόσες θέσεις;
 - Σε τι χρόνο;
 - Ουρά
 - Χωρητικότητα;
 - Προτεραιότητες;



Ουρές Αναμονής (συνέχεια)



- Γίνονται υποθέσεις σχετικά με τη στατιστική κατανομή των αφίξεων και εξυπηρετήσεων
- Η ουρά δημιουργείται γιατί ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων μεταβάλλεται
- Προϋπόθεση: Ρυθμός αφίξεων < Ρυθμός εξυπηρετήσεων



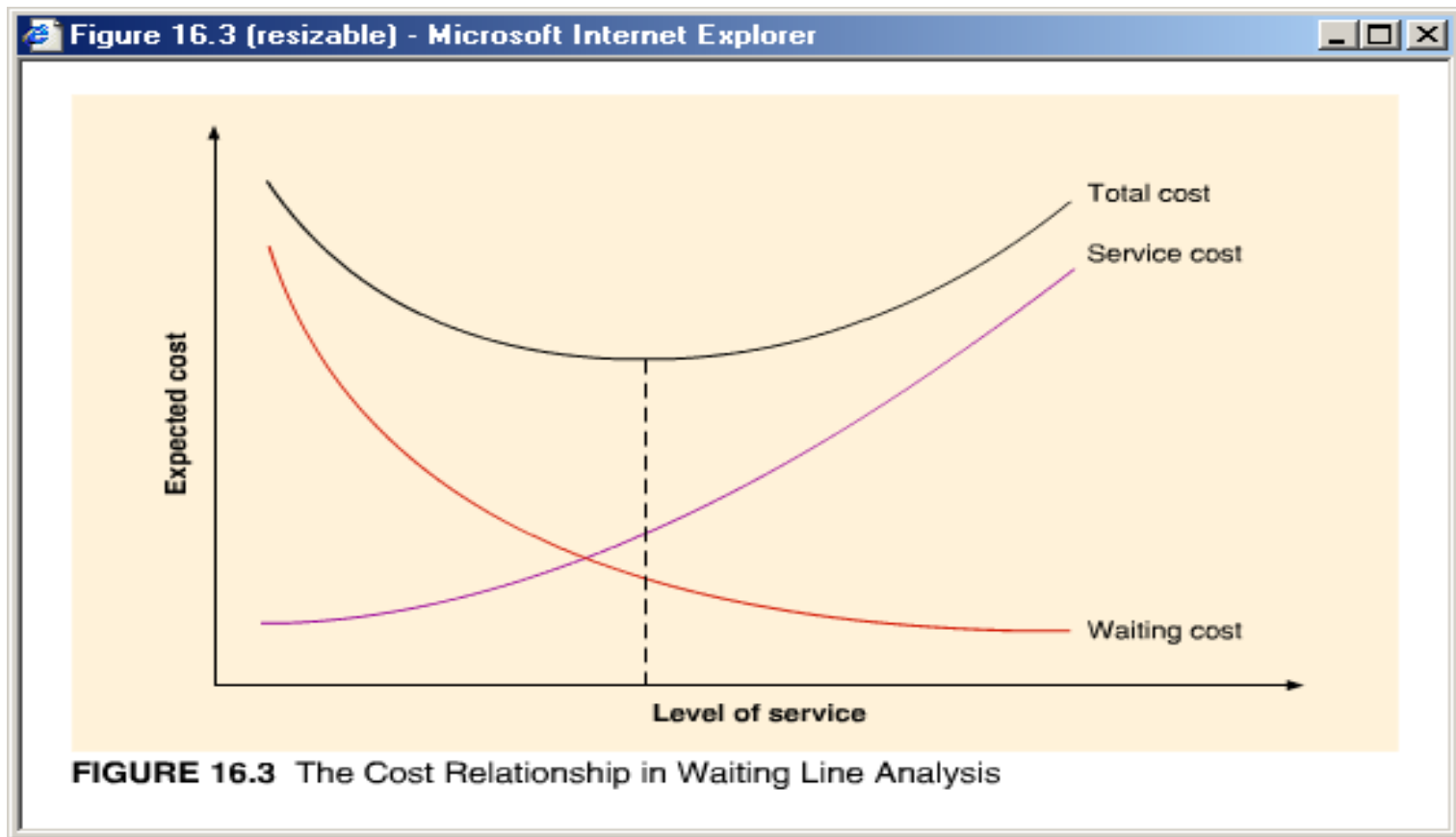
Στοιχεία Κόστους

- Κόστος εγκατάστασης και λειτουργίας των θέσεων εξυπηρέτησης
 - Κίνδυνος υποαπασχόλησης
- Κόστος αναμονής
 - Κόστος απώλειας χρόνου
 - Κόστος χαμένων πελατών
 - Σοβαρότερες συνέπειες
- Ζητούμενο: ο καλύτερος δυνατός προσδιορισμός των θέσεων εξυπηρέτησης



Στοιχεία Κόστους (γραφικά)

- Όσο βελτιώνεται η ποιότητα εξυπηρέτησης, τόσο αυξάνει το κόστος



Εικόνα 1

Συμβολισμός

- $N(t)$ αριθμός πελατών στο σύστημα τη χρονική στιγμή t
- $P_n(t)$ πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα τη χρονική στιγμή t
- s αριθμός θέσεων εξυπηρέτησης
- λ_n ρυθμός αφίξεων όταν υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα
- μ_n ρυθμός εξυπηρέτησεων όταν υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα



Παρατηρήσεις

- Συχνά ο ρυθμός των αφίξεων είναι σταθερός ($\lambda_n = \lambda$ για κάθε n)
- Συχνά ο ρυθμός των εξυπηρετήσεων είναι σταθερός ($\mu_n = \mu$ για κάθε n)
- Μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά του συστήματος σε συνθήκες ισορροπίας



Λειτουργικά Χαρακτηριστικά

- L : Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα
- L_q : Μέσος αριθμός πελατών στην ουρά
- W : Μέσος χρόνος αναμονής στο σύστημα
- W_q : Μέσος χρόνος αναμονής στην ουρά
- P_n : Πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα
- P_0 : Πιθανότητα το σύστημα να είναι άδειο



Ορισμένες Βασικές Σχέσεις

- Αποδεικνύεται ότι ισχύει: $L = \lambda \cdot W$
- Η σχέση αυτή λέγεται τύπος του Little
- Παρόμοια αποδεικνύεται ότι: $L_q = \lambda \cdot W_q$
- Αν ο ρυθμός αφίξεων λ δεν είναι σταθερός, τότε στις παραπάνω σχέσεις λαμβάνεται υπ' όψιν ο μέσος ρυθμός αφίξεων
- Επίσης ισχύει: $W = W_q + \frac{1}{\mu}$



Αφίξεις

- Υπόθεση: Ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή $\frac{1}{\lambda}$
- Βασική Συνέπεια
 - Ο χρόνος μέχρι την επόμενη άφιξη είναι ανεξάρτητος του χρόνου στον οποίο έγινε η προηγούμενη άφιξη
- Η διαδικασία αυτή είναι «χωρίς μνήμη»
 - Ουσιαστικά σημαίνει ότι οι αφίξεις είναι εντελώς τυχαίες



Ένα σημαντικό αποτέλεσμα

- Αποδεικνύεται ότι:
 - Όταν ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών γεγονότων (π.χ. αφίξεων) ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέσο α , τότε ο αριθμός των γεγονότων ακολουθεί κατανομή Poisson με μέσο $1/\alpha$ και αντίστροφα.
- Συνέπεια
 - Ο αριθμός των αφίξεων σε ένα χρονικό διάστημα t ακολουθεί κατανομή Poisson με μέσο $\lambda \cdot t$, όπου λ είναι ο ρυθμός αφίξεων στη μονάδα του χρόνου



Εξυπηρετήσεις

- Ο χρόνος εξυπηρέτησης μπορεί να είναι
 - σταθερός
 - τυχαία μεταβλητή
- Συνήθως υποθέτουμε ότι ο χρόνος ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\mu$, όπου μ είναι ο ρυθμός εξυπηρέτησης



Σύστημα με Μία Θέση Εξυπηρέτησης

- Υποθέσεις
 - Αφίξεις Poisson με ρυθμό λ ανά μονάδα χρόνου
 - Μία θέση εξυπηρέτησης
 - Ο ρυθμός εξυπηρέτησης είναι μ ανά μονάδα χρόνου
 - Ο χρόνος εξυπηρέτησης ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέση τιμή $1/\mu$
- Το σύστημα μπορεί να φτάσει σε κατάσταση ισορροπίας μόνο αν
$$\tau = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$



Μελέτη Συστήματος

- Αποδεικνύεται ότι
 - $P_0 = 1 - \tau$ (πιθανότητα το σύστημα να είναι άδειο)
 - $P_n = (1 - \tau) \cdot \tau^n$ (πιθανότητα να υπάρχουν n πελάτες)
 - Ο μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα είναι

$$L = \frac{\tau}{1 - \tau}$$

- Ο μέσος αριθμός πελατών στην ουρά είναι

$$L_q = \frac{\tau^2}{1 - \tau}$$



Μελέτη Συστήματος (συνέχεια)

- Ο μέσος χρόνος αναμονής υπολογίζεται από τον τύπο του Little

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

- Η μεθοδολογία είναι αντίστοιχη σε συστήματα με περισσότερες θέσεις εξυπηρέτησης



Εφαρμογή

- Στα εξωτερικά ιατρεία ενός νοσοκομείου καταφθάνουν ασθενείς με ρυθμό 2 ασθενείς ανά ώρα. Ο γιατρός που εφημερεύει εξετάζει έναν ασθενή κατά μέσο όρο σε 20 λεπτά. Να μελετήσετε το σύστημα.
- Να μελετήσετε το σύστημα αν εφημερεύουν 2 γιατροί.
- Να μελετήσετε το σύστημα αν το νοσοκομείο μπορεί να δεχθεί μέχρι 15 ασθενείς.



Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γιάννης Γιαννίκος 2015. «Τεχνικές Ανάλυσης Διοικητικών Αποφάσεων. Συστήματα ουρών αναμονής». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://eclass.upatras.gr/courses/BMA417/>.



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

Εικόνα 1: Πηγή:

<http://www.prenhall.com/divisions/bp/app/russellcd/PROTECT/CHAPTERS/CHAP16/ART16/F1603.HTM>

