Τεχνικές Ανάλυσης Διοικητικών Αποφάσεων

Ενότητα 2: Άλλα προβλήματα σε γραφήματα

Καθηγητής Γιάννης Γιαννίκος
Σχολή Οργάνωσης και Διοίκησης Επιχειρήσεων
Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων

Σκοποί ενότητας

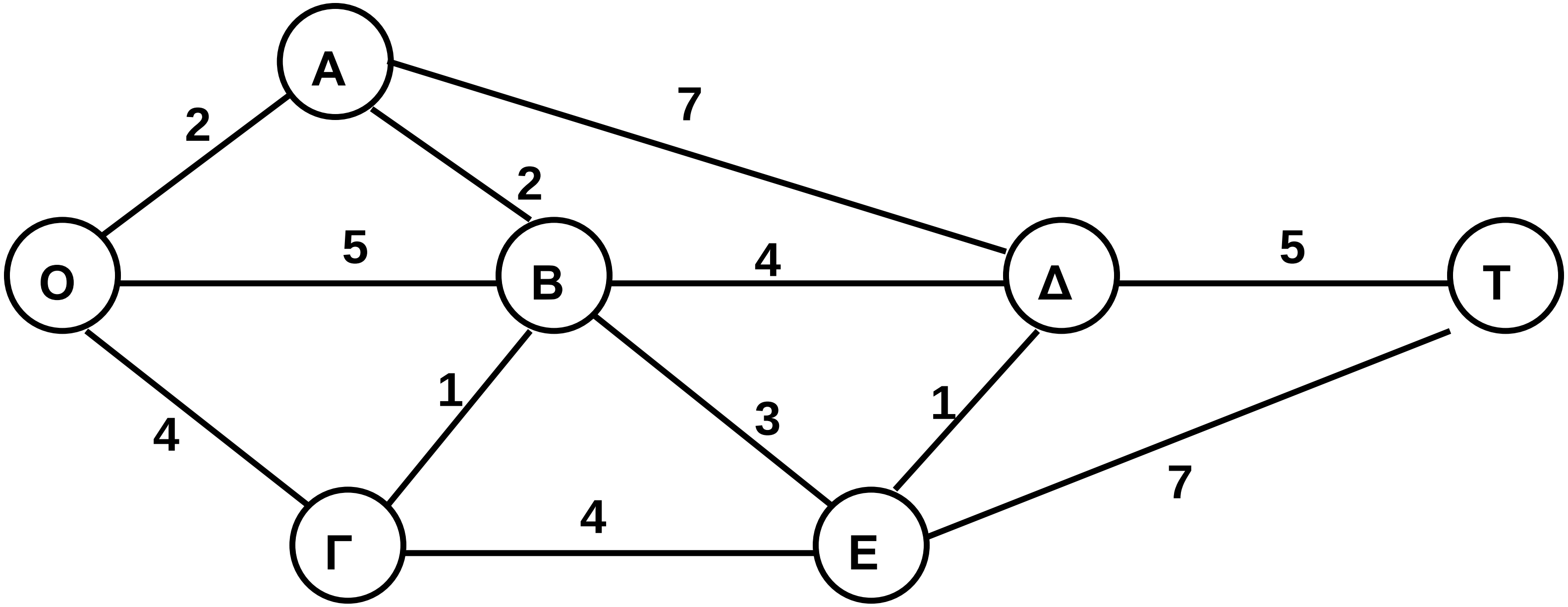
Επίλυση και γραφήματα για:

1. Το Πρόβλημα του Ελάχιστου Ζευγνύοντος Δέντρου
2. Το Πρόβλημα της Μέγιστης Ροής
3. Το Πρόβλημα Ροής Ελαχίστου Κόστους

Άλλα προβλήματα σε γραφήματα

Το Πρόβλημα του Ελάχιστου Ζευγνύοντος Δέντρου

- Έστω ο Εθνικός Δρυμός της Πάρνηθας



- Αν πρέπει να συνδεθούν όλα τα περίπτερα με τηλεφωνικές γραμμές ποιο είναι το ελάχιστο μήκος γραμμών που απαιτείται;

Ιδιότητες Λύσης

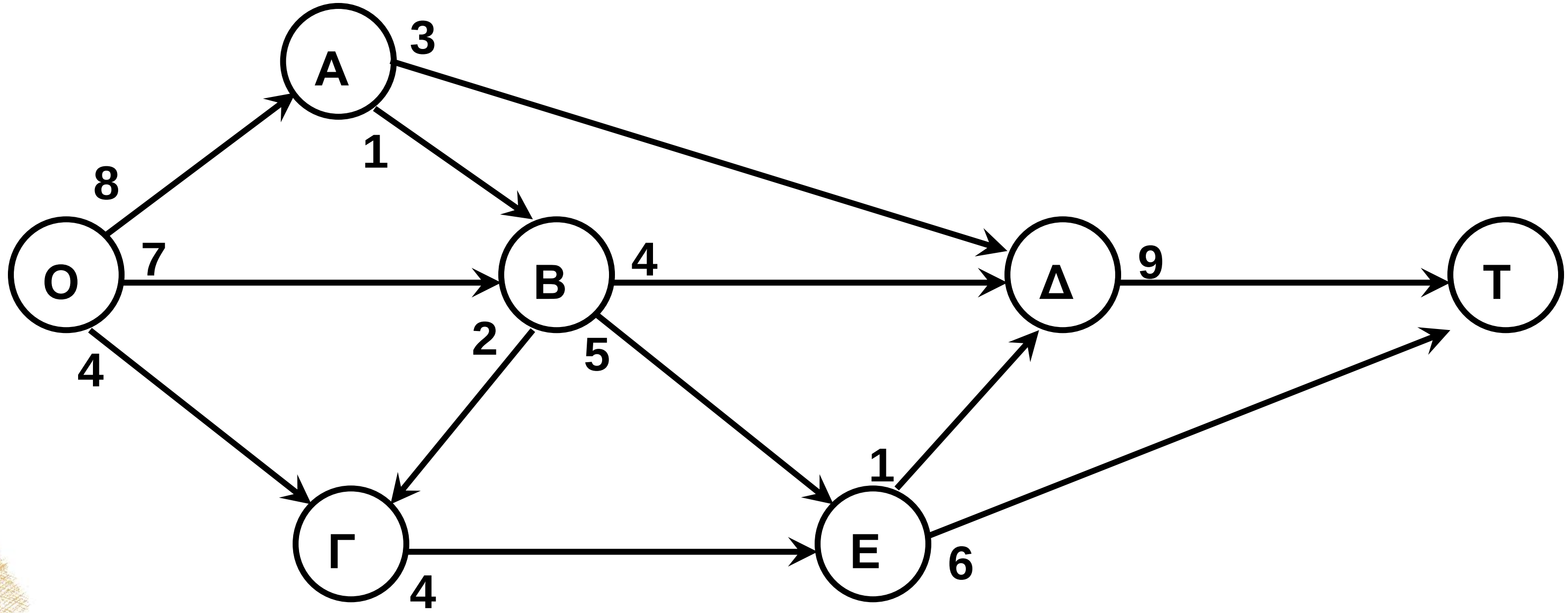
- Η λύση του προβλήματος είναι ένα δέντρο, δηλαδή
  - Έχει n-1 ακμές
  - Δεν έχει κυκλώματα
- Το μήκος του δέντρου αυτού είναι ελάχιστο (minimum spanning tree)
- Η λύση δεν επηρεάζεται από την επιλογή του αρχικού κόμβου

Αλγόριθμος Επίλυσης

1. Επίλεξε ένα κόμβο αυθαίρετα και σύνδεσέ τον με τον πλησιέστερο κόμβο
2. Επανάλαβε μέχρι το τέλος
   2.1 Βρες το μη συνδεδεμένο κόμβο που είναι πλησιέστερα σε ένα συνδεδεμένο
   2.2 Σύνδεσε τους δύο αυτούς κόμβους

Το Πρόβλημα της Μέγιστης Ροής

- Έστω ο Εθνικός Δρυμός της Πάρνηθας
- Σε κάθε δρόμο μπορεί κάθε μέρα να περάσει περιορισμένος αριθμός αυτοκινήτων (βλέπε σχήμα)



Το Πρόβλημα της Μέγιστης Ροής (συνέχεια)

- Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός αυτοκινήτων που μπορούν να πάνε από την είσοδο (Ο=*so*) στην έξοδο (Τ=*si*);

- Βασική Έννοια: Αυξανόμενη διαδρομή (augmenting path)
  - (Μη προσανατολισμένη) διαδρομή so=$v_1, v_2, \ldots, v_r$=si έτσι ώστε για κάθε k να είναι

$$c_{k,k+1} - x_{k,k+1} > 0 \ \text{ή} \ x_{k+1,k} > 0$$

- Αν υπάρχει τέτοια διαδρομή, έστω δ η αύξηση της ροής που μπορεί να επιτευχθεί

Αλγόριθμος Επίλυσης (Ford-Fulkerson)

1. Βρες μία εφικτή ροή (x_{ij}) με τιμή z ($i,j \in V$)
2. Βρες μια αυξανόμενη διαδρομή (augmenting path) P.
   Αν δεν υπάρχει τέτοια διαδρομή, η λύση είναι βέλτιστη.
   Διαφορετικά, πήγαινε στο βήμα 3.
3. Έστω δ η μέγιστη εφικτή αύξηση ροής
   Αύξησε τη ροή κατά μήκος της διαδρομής ως εξής:

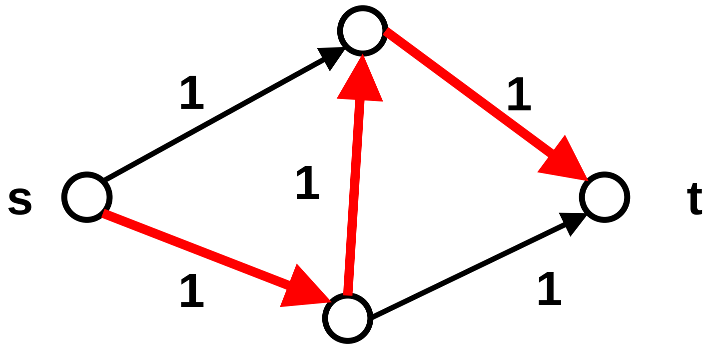
$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \delta, \; \alpha\nu \; (i, j) \in P \\ x_{ij} - \delta, \alpha\nu \; (j, i) \in P \end{cases}$$

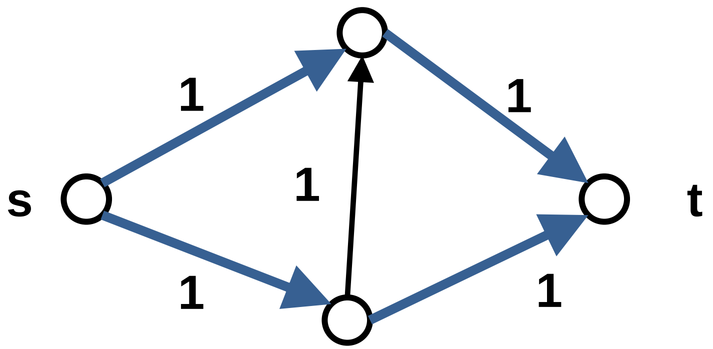
Τότε (x'ij) είναι μία εφικτή ροή με τιμή z'=z+δ ($i,j \in V$)

4. Πήγαινε στο βήμα 2

Αλγόριθμος Ford-Fulkerson/παρατήρηση

- Όταν κινούμαστε αντίθετα με τη φορά της ακμής, ουσιαστικά μειώνουμε τη ροή
- Η μείωση αυτή μας δίνει τη δυνατότητα να αναιρέσουμε προηγούμενες ροές
- Παράδειγμα:





- Συνολική ροή=1

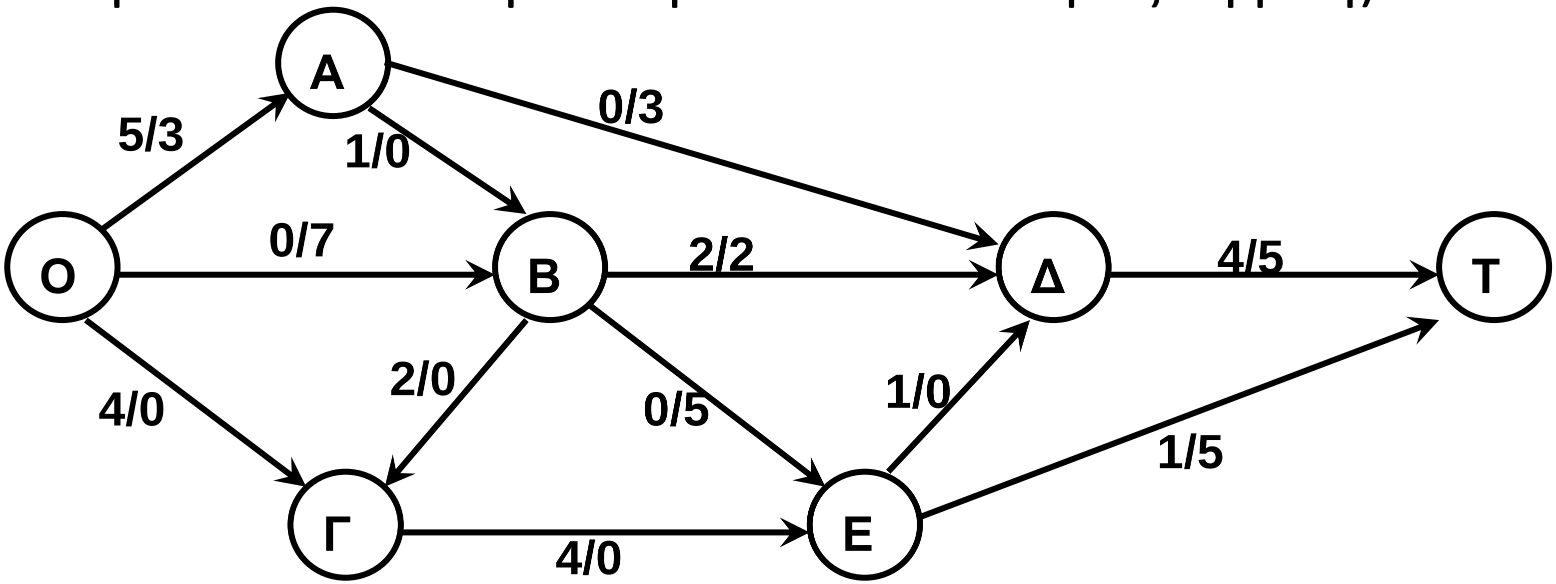
Συνολική ροή=2

Αυξανόμενη Διαδρομή

- Μία διαδρομή so=v_1,v_2,…,v_r=si έτσι ώστε:
  - Να μπορούμε να αυξήσουμε τη ροή κινούμενοι σύμφωνα με τον προσανατολισμό της ακμής
  - Να μπορούμε να μειώσουμε τη ροή που έχουμε ήδη στείλει όταν κινούμαστε αντίθετα με τον προσανατολισμό της ακμής

Αυξανόμενη Διαδρομή/2

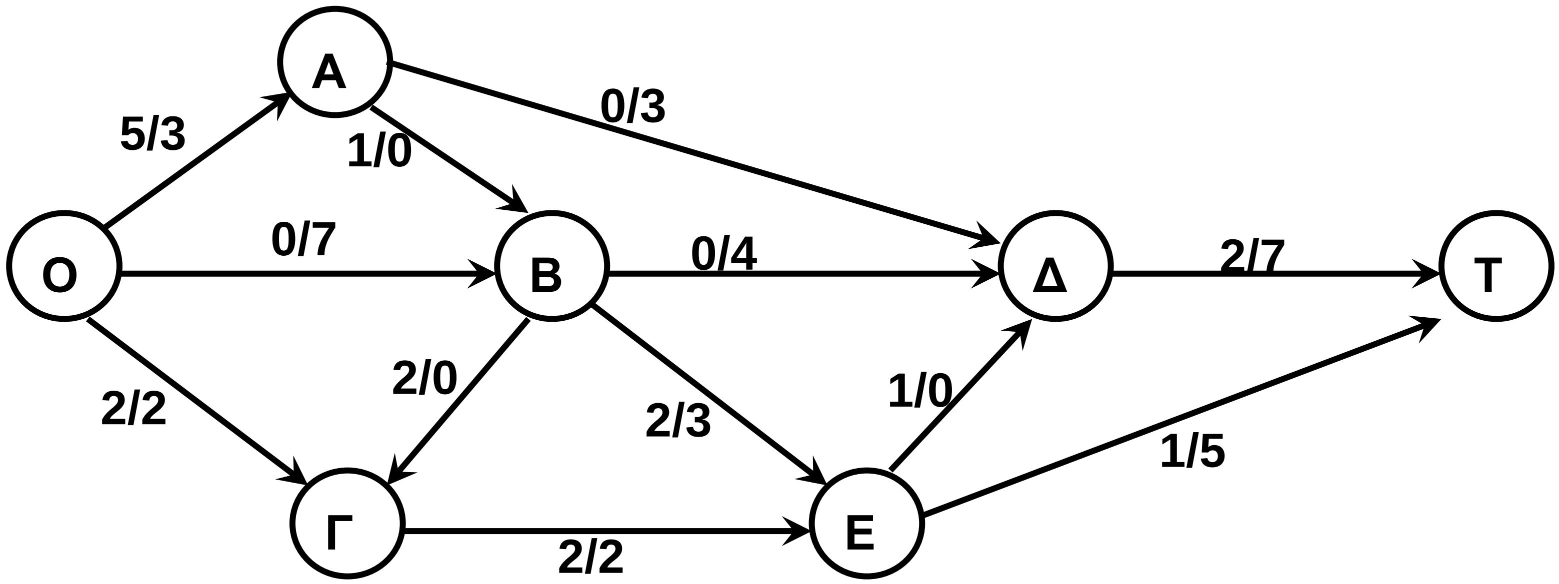
- Έστω ότι σε κάποια επανάληψη έχουμε την εξής κατάσταση
- (Σε κάθε ακμή ο πρώτος αριθμός παριστάνει την εναπομένουσα δυναμικότητα και ο δεύτερος τη ροή)



- Αυξανόμενη διαδρομή Ο-Γ-Ε-Β-Δ-Τ με δυναμικότητα 2
- (Στην ακμή ΒΕ μπορώ να κινηθώ αντίθετα με τον προσανατολισμό γιατί υπάρχει ήδη ροή)

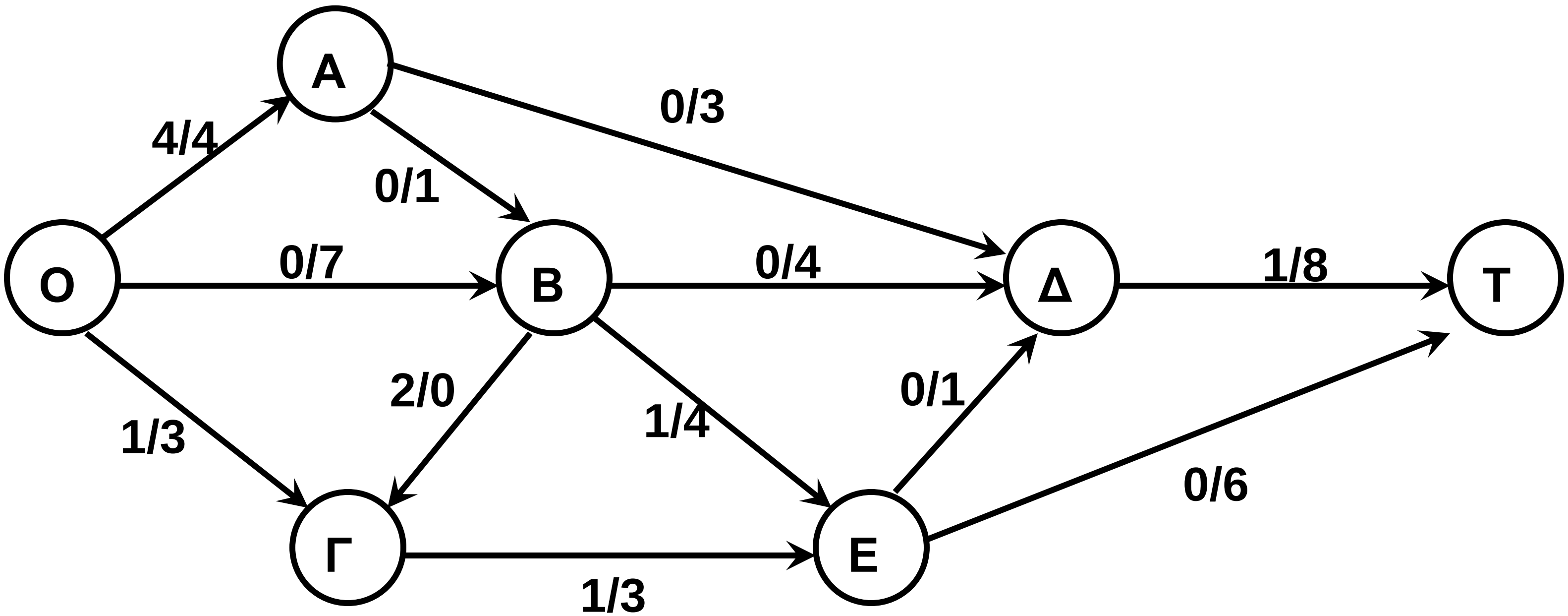
Αυξανόμενη Διαδρομή/3

- Η νέα κατάσταση είναι:



- (Συνολική ροή μέχρι στιγμής 12 μονάδες)

Βέλτιστη Λύση



Παρατήρηση: Η μέγιστη ροή ισούται με 14 μονάδες.

Θεώρημα Μέγιστης Ροής – Ελάχιστης Ακμής

- Τομή
  - Έστω ένα οποιοδήποτε σύνολο κόμβων A, το οποίο περιέχει τον τελικό κόμβο αλλά δεν περιέχει τον αρχικό.
  - Το σύνολο ακμών (v,w) για τις οποίες $v \notin A$ και $w \in A$ λέγεται *τομή (cut)*
  - Εναλλακτικός ορισμός: Τομή είναι κάθε σύνολο ακμών που περιέχουν τουλάχιστον μία ακμή από κάθε διαδρομή που ξεκινά από τον αρχικό κόμβο και καταλήγει στον τελικό
- Πρακτικά
  - Τομή είναι κάθε σύνολο ακμών, οι οποίες αν αφαιρεθούν από το γράφημα αποσυνδέεται ο αρχικός από τον τελικό κόμβο

Θεώρημα Μέγιστης Ροής – Ελάχιστης Ακμής / 2

- Δυναμικότητα τομής
  - Το άθροισμα της δυναμικότητας των ακμών που την αποτελούν
- Θεώρημα (Max Flow – Min Cut)
  - Σε ένα δίκτυο με ένα αρχικό και ένα τελικό κόμβο, η μέγιστη ροή ισούται με την ελάχιστη δυναμικότητα τομής
- Παρατήρηση
  - Τα δύο προβλήματα είναι δυϊκά μεταξύ τους

Το Πρόβλημα Ροής Ελαχίστου Κόστους

- Δεδομένα
  - c_{ij} το κόστος ανά μονάδα ροής κατά μήκος της ακμής (i, j)
  - u_{ij} η δυναμικότητα (μέγιστη ροή) κατά μήκος της ακμής (i, j)
  - b_i η καθαρή ροή που δημιουργείται στον κόμβο i
- Παρατήρηση: Είναι
  - $b_i>0$ αν ο κόμβος i είναι κόμβος προσφοράς
  - $b_i<0$ αν ο κόμβος i είναι κόμβος ζήτησης
  - $b_i=0$ αν ο κόμβος i είναι ενδιάμεσος κόμβος
- Ζητούμενο: Να διοχετευτεί όλη η προσφερόμενη ποσότητα διαμέσου του δικτύου με το ελάχιστο δυνατό κόστος

Μορφοποίηση ως ΓΠ

- Μεταβλητές
  - x_{ij} η ροή κατά μήκος της ακμής (i, j)
- Αντικειμενική συνάρτηση (ελαχιστοποίηση κόστους)

$$\mathbf{Min} \quad z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

- Περιορισμοί

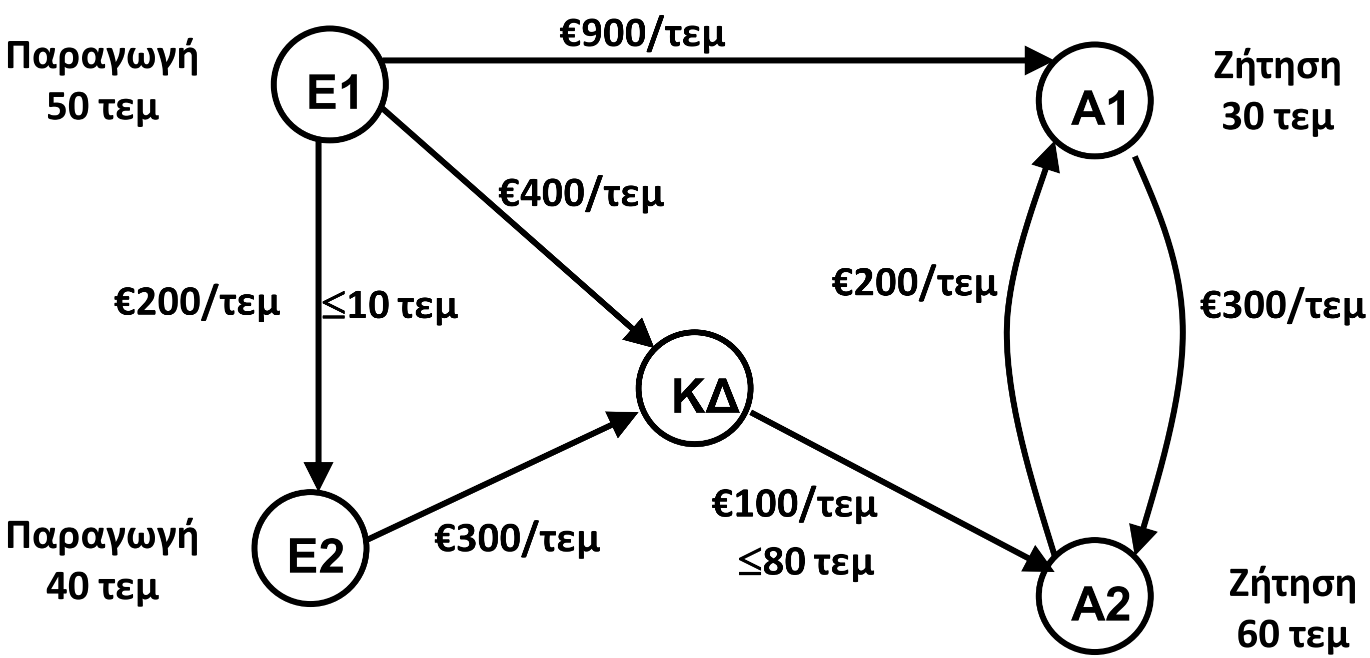
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = b_i \qquad \textbf{για κάθε κόμβο i}$$

(ροή από τον κόμβο - ροή προς τον κόμβο = καθαρή ροή)

$$0 \le x_{ij} \le u_{ij} \qquad \textbf{για κάθε ακμή (i, j)}$$

Παράδειγμα

- Δύο εργοστάσια Ε1 και Ε2 τροφοδοτούν δύο αποθήκες Α1 και Α2. Οι παραγόμενες ποσότητες στα εργοστάσια, οι ζητούμενες ποσότητες στις αποθήκες και το δίκτυο διανομής φαίνονται παρακάτω:



Παρατηρήσεις

- Για να έχει το πρόβλημα εφικτή λύση πρέπει $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$
- Αν οι προσφερόμενες και ζητούμενες ποσότητες (bi) καθώς και οι δυναμικότητες (uij) είναι ακέραιοι αριθμοί, τότε σε κάθε βασική εφικτή λύση (άρα και στη βέλτιστη) όλες οι μεταβλητές είναι ακέραιες
- Τα παρακάτω προβλήματα μορφοποιούνται ως προβλήματα ροής ελαχίστου κόστους
  - Το πρόβλημα μεταφοράς
  - Το πρόβλημα συντομότερης διαδρομής
  - Το πρόβλημα μέγιστης ροής

Συντομότερη Διαδρομή ως MCFP

- Μετασχηματισμός:
  - $c_{ij}=d_{ij}$ η απόσταση της ακμής (i, j)
  - $u_{ij}=1$ για κάθε ακμή (i, j)
  - $b_O=1$ για τον αρχικό κόμβο
  - $b_D=-1$ για τον τελικό κόμβο
  - $b_i=0$ για όλους τους υπόλοιπους κόμβους

Μέγιστη Ροή ως MCFP

- Μετασχηματισμός:
  - Προσθέτουμε (εικονική) ακμή (D,O) από το τέλος προς την αρχή
  - $c_{ij}=0$ για κάθε ακμή (i, j) εκτός της εικονικής
  - $c_{DO}=-1$ για την εικονική ακμή (D, O)
  - u_{ij} : δυναμικότητα της ακμής (i, j)
  - $u_{ij}=+\infty$ για την εικονική ακμή (D, O)
  - $b_i=0$ για όλους τους κόμβους

Τέλος Ενότητας

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Γιάννης Γιαννίκος 2015. «Τεχνικές Ανάλυσης Διοικητικών Αποφάσεων. Άλλα προβλήματα σε γραφήματα». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:https://eclass.upatras.gr/courses/BMA417/.

Σημείωμα Αδειοδότησης