ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η πραγματοποίηση μιας μέτρησης έχει μικρή αξία αν δεν έχουμε μια εκτίμηση του **ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ** που μπορεί να προκύψει στη όλη διαδικασία. Η γνώση τους αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για την επιτυχία κάποιας μέτρησης. Η δε προσπάθεια μείωσης της σημασίας τους μπορεί να οδηγήσει σε τεράστια αύξηση του κόστους ή ακόμη και σε αδιέξοδες καταστάσεις.

Σ' αυτό ακριβώς το πρόβλημα είναι αφιερωμένες οι σελίδες που ακολουθούν.

Οι σημειώσεις αυτές δεν έχουν σκοπό να παρουσιάσουν τη θεωρία των σφαλμάτων που είναι αρκετά εκτεταμένη και μερικές φορές πολύπλοκη ιδιαίτερα για το επίπεδο του φοιτητή που μόλις ξεκινά την πορεία του στην Μηχανολογία. Εξάλλου οι βάσεις της πρέπει να διδαχτούν στο αντίστοιχο μάθημα των Μαθηματικών.

Σαν σκοπό βάλαμε απλά να δώσουμε στους φοιτητές να καταλάβουν την έννοια των σφαλμάτων, τη σπουδαιότητά τους και την αναγκαιότητα υπολογισμού τους. Δίνονται επίσης οι βασικοί μαθηματικοί τύποι που επιτρέπουν στο φοιτητή να δουλεύει με τα σφάλματα τουλάχιστον στο επίπεδο των εργαστηρίων Μηχανολογικών Μετρήσεων.

Παράλληλα παρουσιάζεται το κριτήριο του Chauvenet που κατά την γνώμη μας αποτελεί ένα χρήσιμο εφόδιο.

.

ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ

Η ΜΕΤΡΗΣΗ

Μέτρηση είναι η σύγκριση κάποιου μεγέθους με κάποιο άλλο "πρότυπο". Έτσι όταν μετρούμε το μήκος συγκρίνουμε το μήκος που μετράμε με ένα "πρότυπο" μέτρο, όταν μετρούμε την τάση ή την ένταση του ρεύματος τη συγκρίνουμε με γνωστές τάσεις ή εντάσεις που μας βοήθησαν να βαθμολογήσουμε το βολτόμετρο ή το αμπερόμετρο κ.τ.λ.
Έτσι λοιπόν σε κάθε μέτρηση, πρέπει πάντα να φροντίζουμε ώστε το "πρότυπο" μέγεθος να είναι σωστό και να ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις της μέτρησης. Τι σημαίνει αυτό θα το δούμε παρακάτω.

ΤΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Ας δούμε τώρα πως στην πράξη γίνεται μια μέτρηση και μάλιστα σ' ένα πολύ απλό παράδειγμα.

Ας υποθέσουμε ότι πρέπει να μετρήσουμε το ύψος ενός κουφώματος για να βάλουμε μια πόρτα. Αυτή η μέτρηση μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους.

α) Ένας έμπειρος ξυλουργός κοιτάζοντας το κούφωμα (χρησιμοποιώντας δηλαδή σαν όργανο μέτρησης το μάτι του σε συνδυασμό με την εμπειρία που έχει) λέει ότι το ύψος είναι περίπου 210 cm. Ύστερα όμως από λίγη σκέψη προσθέτει ότι το ύψος της βρίσκεται ανάμεσα στα 205 cm και τα 215 cm. Δηλαδή έχουμε :

$$205\ \boldsymbol{cm} < \boldsymbol{h_1} < 215\ \boldsymbol{cm} \text{ ή αλλιώς } \boldsymbol{h_1} = (210 \pm 5)\ \boldsymbol{cm}$$

β) Φυσικά ο ξυλουργός δεν είναι ικανοποιημένος μόνο απ' αυτό. Με το μέτρο του μετράει τώρα το κούφωμα και βρίσκει 211.3 cm. Εμείς όμως παίρνουμε υπ' όψη μας ότι στη μέτρηση αυτή μπορούν να επιδράσουν διάφοροι παράγοντες (π.χ. θερμική διαστολή, κατασκευή και τοποθέτηση του μέτρου, το γεγονός ότι ένα συνηθισμένο μέτρο δεν έχει υποδιαιρέσεις πιο συχνές από 0.1 cm κ.τ.λ.) και γι' αυτό για μεγαλύτερη σιγουριά γράφουμε:

$$211.25\ \boldsymbol{cm} < \boldsymbol{h_2} < 211.35\ \boldsymbol{cm} \text{ ή } \boldsymbol{h_2} = (211.30 \pm 0.05)\ \boldsymbol{cm.}$$

γ) Ιδιοκτήτης όμως του διαμερίσματος είναι ένας φυσικός που θέλει να πάρει μια καλύτερη απάντηση στο ερώτημα πόσο είναι το ύψος του κουφώματος. Χρησιμοποιεί μια συσκευή ακριβείας (π.χ. ένα συμβολόμετρο) και κάνοντας μια μέτρηση βρίσκει ότι το ύψος είναι 211.300158 cm. Αλλά και πάλι δεν μπορεί να είναι σίγουρος τι συμβαίνει με τα επόμενα δεκαδικά ψηφία, γι' αυτό γράφει:

$$211.3001575\boldsymbol{cm} < \boldsymbol{h_3} < 211.3001585\boldsymbol{cm} \text{ ή } h_3 = (211.3001580 \pm 0.0000005)\text{cm.}$$

Ποια είναι λοιπόν η σωστή μέτρηση; Προφανώς σωστές είναι και οι τρεις. Μόνο που διαφέρουν ως προς την ακρίβειά τους, ή όπως αλλιώς λέμε ως προς το "σφάλμα" τους (δηλ. την ποσότητα που είναι μετά το ±).

Αν τώρα το ερώτημα τεθεί διαφορετικά: Ποιο είναι το ύψος του κουφώματος; Εδώ και πάλι από μια άποψη θα μπορούσαμε ν' απαντήσουμε : Και το h_1 και το h_2 και το h_3. Όμως η ερώτηση αυτή αποκτάει συγκεκριμένο νόημα αν ξέρουμε για ποιο λόγο μας χρειάζεται το ύψος αυτό. Έτσι π. χ. στη συγκεκριμένη περίπτωση, για την τοποθέτηση της πόρτας αρκεί να ξέρουμε το h_2. Αν μας έχει δοθεί μόνο το h_1 πιθανόν η πόρτα που θα φτιάξουμε να μην ταιριάζει ενώ το h_3 περιέχει πολλές πληροφορίες που για τον ξυλουργό είναι περιττές πολυτέλειες πολύ δε περισσότερο επειδή είναι σίγουρο πως με τα εργαλεία που διαθέτει είναι αδύνατο να πετύχει τέτοια ακρίβεια στην κατασκευή της πόρτας.

Συνοψίζοντας λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι **ο όρος "σφάλμα" στην επιστημονική γλώσσα σημαίνει την αναπόφευκτη, αριθμητικά εκφρασμένη, έλλειψη ακρίβειας που υπάρχει στη μέτρηση ενός μεγέθους που οφείλεται στις ατέλειες ή ελαττωματικότητες των οργάνων και των μεθόδων μέτρησης.**

Ορισμένα σφάλματα (τα λεγόμενα συστηματικά, τα οποία θα δούμε παρακάτω) μπορούν ν' αποφευχθούν. Είναι αδύνατον όμως να κάνουμε μέτρηση χωρίς σφάλμα. Μπορούμε βέβαια να "ελαχιστοποιήσουμε" τα σφάλματα της μέτρησης. Κάτι τέτοιο έγινε στην περίπτωση γ) του παραδείγματός μας. Αυτό όμως δεν μας χρειαζόταν και θα μπορούσαμε να το είχαμε αποφύγει. Έτσι στις μετρήσεις πρέπει πάντα να ξέρουμε :

* Τι ακρίβεια μπορούμε να πετύχουμε και

* Τι ακρίβεια εμείς επιθυμούμε.

Με αυτό τον τρόπο και ανεπιθύμητα προβλήματα μπορούμε ν' αποφύγουμε, και πολυδάπανες αλλά άχρηστες στην ουσία εγκαταστάσεις και περιττό κόπο να γλιτώσουμε.

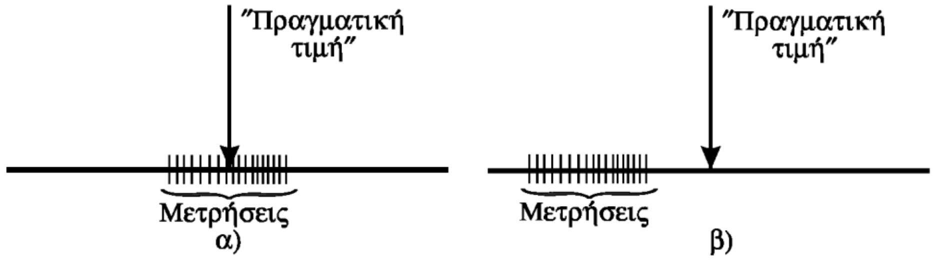
ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΤΥΧΑΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Ας υποθέσουμε ότι με ένα χρονόμετρο μετρούμε πολλές φορές το χρόνο που κάνει να διανύσει μια απόσταση ένα κινητό στο εργαστήριο. Είναι τότε σίγουρο, ότι, αν το χρονόμετρο που χρησιμοποιούμε μπορεί να μετρά π.χ. εκατοστά του δευτερολέπτου, σχεδόν όλες οι μετρήσεις μας θα είναι διαφορετικές. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι είναι αντικειμενικά αδύνατο να έχουμε κάθε φορά όλες τις συνθήκες ίδιες κατά τη διεξαγωγή του πειράματος. Για παράδειγμα πάντα θα υπάρχουν μετακινήσεις αέρα, σκόνη που δημιουργεί πρόσθετες τριβές, η στιγμή που θέτουμε σε λειτουργία το χρονόμετρο, η στιγμή που το σταματούμε και πολλοί άλλοι παράγοντες, τους οποίους μάλιστα δεν είναι τόσο εύκολο να τους βρούμε.

Μπορεί όμως να έχουμε και άλλα προβλήματα, πολλά από τα οποία δύσκολα τα ανακαλύπτουμε. Για παράδειγμα το χρονόμετρο που χρησιμοποιούμε ίσως να μη λειτουργεί κανονικά και να τρέχει ή να πηγαίνει πιο αργά. Ίσως πάλι κατά τη διάρκεια του πειράματος να έχουμε διαρκή αύξηση της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος, η οποία αν και ανεπαίσθητη επίσης επιδρά στα αποτελέσματα που βρίσκουμε. Σε κάποια άλλη περίπτωση, όταν π.χ. θέλουμε να προσδιορίσουμε τη μάζα ενός ογκώδους, αλλά ελαφρού σώματος ζυγίζοντάς το, ίσως να ξεχνούμε να συνυπολογίσουμε την άνωση του ατμοσφαιρικού αέρα.

Τα αποτελέσματα που παίρνουμε και τα οποία οφείλονται σ' όσα είπαμε στις δυο προηγούμενες παραγράφους μας δείχνουν τα σφάλματα. Η πρώτη παράγραφος αναφέρεται στα **τυχαία** και η δεύτερη στα **συστηματικά** σφάλματα. **Είναι εύκολο να καταλάβει κανείς από τα παραπάνω, ότι τα τυχαία σφάλματα υπάρχουν πάντα, ενώ τα συστηματικά όχι**. Πάντως αν έχουμε τα δεύτερα αυτά συνυπάρχουν με τα τυχαία.

Σύμφωνα μ' όσα είπαμε γίνεται κατανοητό **ότι το συστηματικό σφάλμα μένει σχεδόν πάντα σταθερό σ' όλη τη διάρκεια της μέτρησης**. **Το τυχαίο σφάλμα μεταβάλλεται και μπορεί να είναι και θετικό και αρνητικό.** Τα τυχαία σφάλματα πάντα υπάρχουν στις μετρήσεις. Αν δεν έχουμε συστηματικά σφάλματα οι μετρήσεις μας βρίσκονται γύρω από την πραγματική τιμή (**Σχ. 1α**). Ενώ αν υπάρχουν συστηματικά οι μετρήσεις μας είναι όλες μετατοπισμένες (και διασκορπισμένες) προς μια κατεύθυνση, θετική ή αρνητική σε σχέση με την πραγματική τιμή (**Σχ. 1β**).



Σχήμα 1.

Ενώ όπως είδαμε παραπάνω τα τυχαία σφάλματα είναι αναπόφευκτα, οφείλονται κύρια σε αντικειμενικές αιτίες και σε τελευταία ανάλυση δεν επιδρούν στα αποτελέσματα των μετρήσεων μας παρά μόνο στην ακρίβειά τους, τα συστηματικά σφάλματα οφείλονται κύρια σε κακή λειτουργία και ρύθμιση των οργάνων μας ή της μεθόδου που χρησιμοποιούμε, κάνουν τα αποτελέσματά μας λαθεμένα, μπορούν και πρέπει να αποφεύγονται στο βαθμό που τα ανακαλύπτουμε.

Τα τυχαία σφάλματα φαίνονται αν μετρήσουμε πολλές φορές π.χ. την ίδια ποσότητα, αλλά και από τα όργανα που χρησιμοποιούμε και μπορούν να υπολογισθούν με την βοήθεια στατιστικών μεθόδων, που έχουν τη βάση τους στη θεωρία των πιθανοτήτων. Αυτό δεν μπορεί να γίνει για τα συστηματικά. Με τα βασικά αποτελέσματα της θεωρίας των τυχαίων σφαλμάτων ασχολείται το φυλλάδιο που κρατάτε στα χέρια σας.

Λίγα λόγια ακόμη για τα συστηματικά σφάλματα

Εφόσον δεν υπάρχει άλλος τρόπος, πρέπει πάντα να προσπαθούμε να τα ανακαλύπτουμε και να απαλλασσόμαστε από αυτά.

Για την εξάλειψή τους χρειάζεται:

α) Η σωστή μελέτη των συνθηκών μετρήσεων και των απαιτήσεων της θεωρίας.

β) Η βεβαιότητα ότι τα όργανά μας λειτουργούν σωστά. Αυτή μπορούμε να την αποκτήσουμε αν συγκρίνουμε τα όργανα του πειράματος με ακριβέστερα "πρότυπα" όργανα (πράγμα που στην πράξη είναι φυσικά πολύ δύσκολο, ιδιαίτερα στις συνθήκες του εκπαιδευτικού εργαστηρίου) και

γ) η προσεκτική εκτέλεση του πειράματος.

Υπάρχουν φυσικά κι άλλοι πρακτικοί τρόποι για την ανακάλυψη και εξάλειψή τους αλλά δεν είναι ούτε αυστηροί ούτε γενικοί. Γενικά απαιτείται ιδιαίτερη εμπειρία και γνώση των νόμων της φυσικής.

Πάντως πρέπει να πούμε ότι τα συστηματικά σφάλματα είναι τα πιο "επικίνδυνα" στον προσδιορισμό ενός μεγέθους κατά τη διάρκεια ενός πειράματος.

Παρατήρηση. Ένα πολύ συνηθισμένο συστηματικό σφάλμα είναι το αποκαλούμενο σφάλμα του μηδενός, δηλαδή το γεγονός, ότι το όργανο που χρησιμοποιούμε δεν δείχνει μηδέν όταν θα έπρεπε. Για παράδειγμα αυτό μπορούμε να το δούμε σ' ένα βολτόμετρο που ενώ στα άκρα του δεν εφαρμόζουμε τάση δείχνει π.χ. 0.2 V, ή σε ένα μικρόμετρο, το οποίο ενώ θα έπρεπε, όντας κλειστό, να δείχνει μηδέν, δείχνει - 0.04 mm. Σ' αυτή την περίπτωση αν, κάνοντας τη μέτρηση, διαβάσουμε απλώς την ένδειξη του οργάνου, θα έχουμε κάνει συστηματικό σφάλμα. Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με δυο τρόπους:

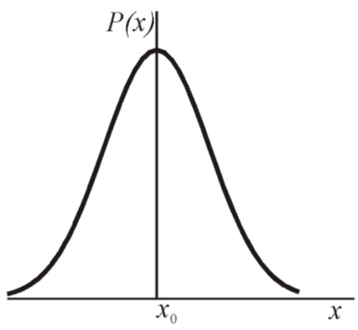
α) Διορθώνουμε, αν είναι δυνατόν, το πρόβλημα, ώστε το όργανο να δείχνει μηδέν όταν πρέπει.

β) Διορθώνουμε το αποτέλεσμα αφού κάνουμε τη μέτρηση. Έτσι για παράδειγμα, αν το βολτόμετρό μας δείξει 7.8 V λέμε ότι το αποτέλεσμα είναι 7.8 V-0.2 V=7.6 V, ενώ αν το στο τύμπανο του μικρομέτρου διαβάσουμε μετά τη μέτρηση 2.49 mm λέμε ότι το αποτέλεσμά μας είναι 2.49 mm+0.04 mm=2.53 mm.

Οι βασικές αρχές της θεωρίας των τυχαίων σφαλμάτων

Θα δώσουμε εδώ τα βασικά σημεία της θεωρίας των τυχαίων σφαλμάτων, που αποτελεί μέρος της θεωρίας των πιθανοτήτων, χωρίς όμως να παρουσιάσουμε αποδείξεις και διάφορες άλλες λεπτομέρειες που αναλύονται στο αντίστοιχο μάθημα. Οι βασικοί τύποι που είναι απαραίτητοι για την επεξεργασία των μετρήσεων στο εργαστήριο περιλαμβάνονται στα επόμενα κεφάλαια.

Έστω λοιπόν ότι μετρούμε κάποιο μέγεθος η πραγματική τιμή του οποίου είναι $\boldsymbol{x_0}$. Όπως εξηγήσαμε και πιο πάνω η μέτρηση δεν θα μας δώσει την τιμή $\boldsymbol{x_0}$, αλλά κάποια άλλη, έστω $\boldsymbol{x}$ Διάφορες μετρήσεις θα μας δίνουν διαφορετικά $\boldsymbol{x}$, χωρίς βέβαια να αποκλείεται να πάρουμε και το $\boldsymbol{x_0}$, μόνο που ... δεν θα ξέρουμε ποιο είναι.



Σχ.2.

Μετρούμε λοιπόν το μέγεθος αυτό $\boldsymbol{N}$ φορές και σχεδιάζουμε την καμπύλη $\boldsymbol{P(x) = n(x)/N}$ όπου $\boldsymbol{n(x)}$ ο αριθμός των μετρήσεων που είχαν σαν αποτέλεσμα $\boldsymbol{x}$.

Αποδεικνύεται πως όταν $\boldsymbol{N} \to \infty$ η καμπύλη αυτή έχει τη μορφή του **Σχ.2**, δηλαδή είναι απόλυτα συμμετρική ως προς την πραγματική τιμή $\boldsymbol{x_0}$ και τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν για $\boldsymbol{x \to 0}$.

Η συνάρτηση $\boldsymbol{P(x)}$ είναι πυκνότητα πιθανότητας και αυτό σημαίνει πως το ολοκλήρωμα:

$$\boldsymbol{P(a,b) = \int_a^b P(x)dx} \qquad (\mathbf{2.1})$$

δίνει την πιθανότητα το αποτέλεσμα μιας μέτρησης να βρίσκεται στην περιοχή $\boldsymbol{a \le x \le b}$.

Από τον ορισμό αυτό γίνεται προφανές πως θα ισχύει η σχέση:

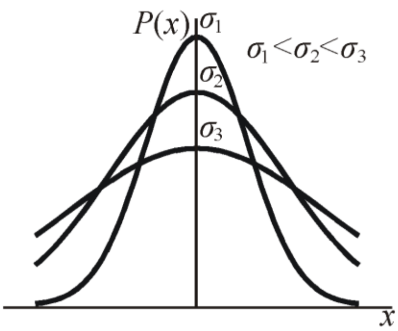
$$\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{P(x)dx = 1} \qquad (2.2)$$

Η σχέση αυτή ονομάζεται και **συνθήκη κανονικοποίησης** και υποδηλώνει πως το αποτέλεσμα της μέτρησης οπωσδήποτε βρίσκεται μέσα στην περιοχή $-\infty \leq \boldsymbol{x} \leq \infty$. Μ' άλλα λόγια η σχέση (2.2) υποδηλώνει επίσης πως το εμβαδόν της περιοχής που βρίσκεται ανάμεσα στην καμπύλη $\boldsymbol{P(x)}$ και τον άξονα των $\boldsymbol{x}$ είναι πάντα ίσο με τη μονάδα.

Αποδεικνύεται επίσης πως η συνάρτηση, η μορφή της οποίας παριστάνεται στο **Σχ. 2** είναι μια πολύ γνωστή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η αλλιώς **κατανομή,** που ονομάζεται **κανονική κατανομή** ή **κατανομή του Gauss** δίνεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2}} \qquad (2.3)$$

Στον τύπο (2.3) εμφανίζεται ένα μέγεθος, το $\boldsymbol{\sigma}$ **,** το οποίο ονομάζεται **τυπική απόκλιση** και είναι πολύ σημαντικό για το χαρακτηρισμό της κατανομής και της καμπύλης $\boldsymbol{P(x)}$.



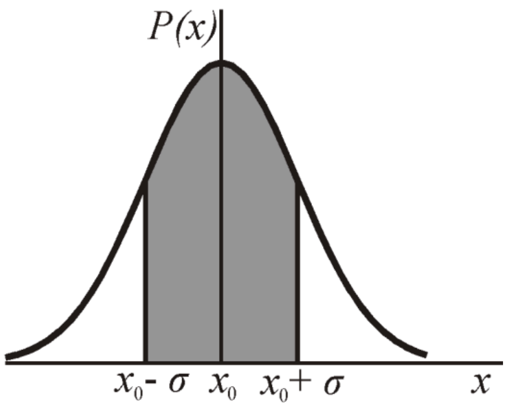
Σχ.3

Έτσι το $\boldsymbol{\sigma}$ καθορίζει τόσο το πλάτος, όσο και το ύψος της καμπύλης. Αύξηση του $\boldsymbol{\sigma}$ σημαίνει αύξηση του πλάτους και, κατά συνέπεια (γιατί;) μείωση του ύψους (βλ**. Σχ. 3**). Μ' άλλα λόγια το $\boldsymbol{\sigma}$ μας δείχνει πόση είναι η διασπορά των τιμών γύρω από την τιμών γύρω από την πραγματική τιμή του μετρούμενου μεγέθους.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό γνώρισμα της τυπικής απόκλισης είναι ότι το ολοκλήρωμα

$$\boldsymbol{P(-\sigma, \sigma) = \int_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma} P(x)dx}$$

δηλαδή το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής στο **Σχ.4** είναι ίσο περίπου με **0.68**. Βέβαια για το εργαστήριο πρέπει να παίρνουμε υπόψη μας πως δεν έχουμε, ούτε είναι δυνατόν να έχουμε, άπειρες



Σχ.4

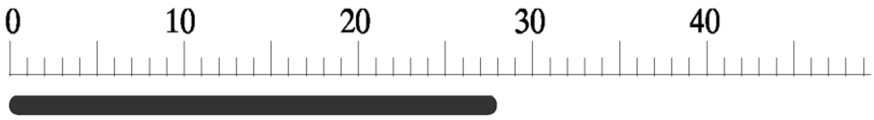
μετρήσεις. Άρα δεν μπορούμε να βρούμε την πραγματική τιμή απλά από καμπύλες, όπως αυτές που δείξαμε πιο πάνω. Σ' αυτό ακριβώς συνίσταται και η ουσία της θεωρίας των σφαλμάτων, η οποία μας δίνει σε τελική ανάλυση μια περιοχή, στην οποία με μεγάλη (συγκεκριμένη) πιθανότητα βρίσκεται η ζητούμενη τιμή.

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΟΥ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΑΝΑΓΝΩΣΗ ΚΛΙΜΑΚΑΣ

Μια κατηγορία τυχαίων σφαλμάτων είναι τα λεγόμενα σφάλματα ανάγνωσης, που εκφράζουν το αναπόφευκτο σφάλμα που κάνουμε όταν διαβάζουμε κάποια ένδειξη του οργάνου μέτρησης που χρησιμοποιούμε.

Συνήθως η μέτρησή μας στο εργαστήριο ανάγεται στην ανάγνωση κάποιων ενδείξεων από τα όργανα τα οποία χρησιμοποιούμε π.χ μέτρηση μήκους με υποδεκάμετρο, μέτρηση τάσης με βολτόμετρο κλίμακας κλπ. Αυτή η διαδικασία που είναι πολύ γνωστή εμπεριέχει τα σφάλματα.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι πρέπει να μετρήσουμε το μήκος ράβδου **(Σχ.5).**



Σχ.5

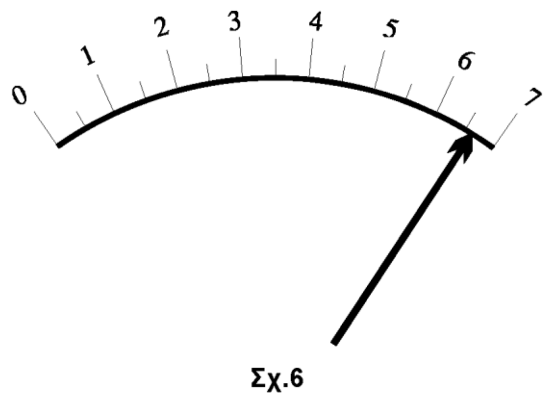
Αναμφισβήτητα το άκρο της ράβδου βρίσκεται πιο κοντά στα **28 cm**. Έτσι λοιπόν μπορούμε να πούμε:

$$\boldsymbol{L = 28\ cm} \qquad (3.1)$$

Αλλά προφανώς πιο σωστά :

$$\boldsymbol{27,5 \leq L \leq 28,5\ cm} \qquad (3.1\alpha)$$

Αντίστοιχα για την ένδειξη του βολτομέτρου **(Σχ.6)** μπορούμε να πούμε:



Σχ.6

$$U = 6,7\,V \qquad (3.2)$$

ή ορθότερα:

$$6,6 \leq U \leq 6,8\,V \qquad (3.2a)$$

Έτσι λοιπόν βλέπουμε ότι κάθε μέτρησή μας έχει μια σχετική ακρίβεια. Αυτή την ακρίβεια μπορούμε καλύτερα να την εκφράσουμε χρησιμοποιώντας την έννοια του σφάλματος ανάγνωσης.

Επομένως αντί να χρησιμοποιήσουμε τη γραφή (3.1) ή (3.1α) μπορούμε να γράψουμε ισοδύναμα

$$L = 28,0 \pm 0,5\,cm \qquad (3.3)$$

και αντίστοιχα για τις (3.2) και (3.2α):

$$U = 6,7 \pm 0.1\,V \qquad (3.4)$$

Ο προσδιορισμός του σφάλματος ανάγνωσης (ή μάλλον η εκτίμησή του) δεν είναι εύκολη υπόθεση και απαιτείται γι' αυτό αρκετή πείρα. Φυσικά εδώ παίζει πολλές φορές ρόλο και ο προσωπικός παράγοντας. Αυστηροί κανόνες γι' αυτό δεν υπάρχουν. Θα μπορούσαμε ενδεικτικά ν' αναφέρουμε τους εξής:

α) Αν οι γειτονικές υποδιαιρέσεις απέχουν **1÷2 mm** το σφάλμα το θεωρούμε μία ή μισή υποδιαίρεση. β) Αν οι γειτονικές υποδιαιρέσεις απέχουν **2÷5 mm** το σφάλμα το εκτιμούμε περίπου από μισή υποδιαίρεση ως ένα δέκατο της υποδιαίρεσης κλπ.

<u>Σημείωση 1</u>. Το σφάλμα ανάγνωσης, δεν έχει να κάνει με το σφάλμα παράλλαξης, δηλαδή το σφάλμα που οφείλεται στο ότι δεν κοιτάμε σωστά τη βελόνα του αναλογικού μας οργάνου. Αυτό είναι βασικά σφάλμα ανεξάρτητο από τις συνθήκες και τα όργανα του πειράματος και το οποίο προσπαθούμε με κάθε τρόπο να το αποφύγουμε. Είναι χαρακτηριστικό ότι πολλά αναλογικά όργανα έχουν πίσω από τη βελόνα έναν μικρό καθρέφτη που μας βοηθάει να εκμηδενίσουμε ή να μειώσουμε στο ελάχιστο το σφάλμα παράλλαξης βλέποντας τη βελόνα να ταυτίζεται με το είδωλό της, κάνοντας έτσι την ανάγνωση της ένδειξης αντικειμενική.

<u>Σημείωση 2.</u> Το κάθε όργανο έχει πάντα μια ακρίβεια που οφείλεται στον κατασκευαστή και που κατά κανόνα αναγράφεται πάνω του. Συνήθως το σφάλμα που οφείλεται στην ακρίβεια του οργάνου είναι πιο μικρό από το σφάλμα ανάγνωσης κι έτσι δεν το παίρνουμε υπ. όψη μας (αυτός εξάλλου είναι και ο στόχος του κατασκευαστή). Αν όμως τύχει το σφάλμα αυτό να είναι της τάξης ή μεγαλύτερο του σφάλματος ανάγνωσης πρέπει να αγνοήσουμε το δεύτερο.

<u>Σημείωση 3.</u> Σήμερα αρκετά πλατιά χρησιμοποιούνται ψηφιακά όργανα. Εδώ διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

α) Η ένδειξη κατά τη μέτρηση δεν είναι σταθερή, αλλά το τελευταίο ψηφίο «παίζει» γύρω από μια τιμή. Τότε σαν μέτρηση παίρνουμε αυτή τη «μέση» τιμή, ενώ σαν σφάλμα το εύρος της μεταβολής

β) Η ένδειξη είναι σταθερή. Τότε (αν δεν υπάρχει άλλος περιορισμός από τον κατασκευαστή ή τον τρόπο χρήσης του οργάνου) το σφάλμα είναι 0.5 του τελευταίου ψηφίου. Το ίδιο φυσικά ισχύει και για τα κομπιουτεράκια. Μόνο που πρέπει να παρατηρήσουμε ότι πάντα χρειάζεται (ιδιαίτερα για τα κομπιουτεράκια) να σκεφτόμαστε ποιο θα πρέπει να είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μας που πρέπει να κρατήσουμε σύμφωνα και μ' όσα θα αναφέρουμε πιο κάτω.

Όσον αφορά την ακρίβεια του ψηφιακού οργάνου, αυτή σε τίποτα δεν διαφέρει από την ακρίβεια των μη ψηφιακών οργάνων που οφείλεται στον κατασκευαστή. Εδώ το μόνο που αλλάζει είναι το σφάλμα ανάγνωσης που είναι πια σαφές και το ίδιο για όλους.

ΠΟΛΛΑΠΛΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ

Σε πολλές μετρήσεις είναι αδύνατον να εκτιμήσουμε το σφάλμα μόνο με βάση την ένδειξη του οργάνου. Για παράδειγμα όταν με τη βοήθεια χρονομέτρου μετράμε το χρόνο ανάμεσα σε δύο γεγονότα το σφάλμα μας οφείλεται (αν εξαιρέσουμε διάφορους άλλους παράγοντες) κύρια στην αντίδραση του χειριστή του χρονομέτρου, γιατί είναι σχεδόν αδύνατο να θεωρήσουμε ότι πάντα βάζει σε λειτουργία το χρονόμετρο "ταυτόχρονα" με το πρώτο γεγονός και το σταματάει "ταυτόχρονα" με το δεύτερο.

Σ' αυτή την περίπτωση επαναλαμβάνουμε τη μέτρηση μερικές φορές και έτσι μπορούμε να βρούμε καλύτερα και την τιμή που είναι κοντά στην πραγματική, αλλά και το σφάλμα.

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

Έστω λοιπόν ότι μετράμε την ίδια ποσότητα $\boldsymbol{N}$ φορές και βρίσκουμε τις τιμές $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3, \ldots \ldots x_\nu}\cdot$ Τότε σύμφωνα με τη θεωρία των πιθανοτήτων θεωρούμε ότι η τιμή που βρίσκεται πιο κοντά στην "πραγματική" είναι **η μέση τιμή** που υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\boldsymbol{\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i} \qquad (4.1)$$

Και σ' αυτή την περίπτωση όμως δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το αποτέλεσμά μας συμπίπτει με την "πραγματική" τιμή. Πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε το σφάλμα, δηλαδή μια περιοχή τιμών του x μέσα στην οποία βρίσκεται αυτή η πραγματική τιμή. Δηλαδή

$$\boldsymbol{x = \bar{x} \pm \delta x} \qquad (\mathbf{4.2})$$

Από τη μαθηματική θεωρία σφαλμάτων προκύπτει ότι αν θέλουμε η πραγματική τιμή να βρίσκεται στο διάστημα (4.2) με πιθανότητα 68% , τότε

$$\delta \boldsymbol{x} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{x_i} - \bar{\boldsymbol{x}})^2}{\boldsymbol{N}(\boldsymbol{N} - \mathbf{1})}} \qquad (\mathbf{4.3})$$

Το σφάλμα (4.3) λέγεται **απόλυτο σφάλμα της μέσης τιμής**.

Παράδειγμα: Ας υποθέσουμε ότι κατά τη μέτρηση κάποιου μήκους $\mathbf{L}$ πήραμε τις εξής τιμές (σε mm)

24,25	24,26	24,22	24,28	24,24	24,25	24,22	24,26	24,23	24,24

$\boldsymbol{L_i}$ (mm)	$\boldsymbol{L_i - \bar{L}}$ (mm)	$(\boldsymbol{L_i - \bar{L}})^{\mathbf{2}}$ (mm^2 x 10^5)
24,2**5**	0,005	2,5
24,26	0,015	22,5
24,22	-0,025	62,5
24,28	0,035	122,5
24,24	-0,005	2,5
24,25	0,005	2,5
24,22	-0,025	62,5
24,26	0,015	22,5
24,23	-0,015	22,5
24,24	-0.005	2.5
$\sum_{i=1}^{10} \boldsymbol{L_i} = \mathbf{242,45}\ \boldsymbol{mm}$	$\sum_{i=1}^{10} (\boldsymbol{L - \bar{L}}) = \mathbf{0}$	$\sum_{i=1}^{10} (\boldsymbol{L_i - \bar{L}})^{\mathbf{2}} = \mathbf{3,25} \times \mathbf{10^{-3}}\ \boldsymbol{mm^2}$

Με την βοήθεια του πίνακα και των τύπων (4.1) και (4.3) βρίσκουμε

$$\bar{L} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} L_i = \frac{245,45}{10} = 24,245\ mm$$

$$\delta L = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(L_i - \bar{L})^2}{10(10-1)}} = \sqrt{\frac{3,25 \times 10^{-3}}{90}} = 0,00600925\ mm$$

Άρα τελικά (όπως θα δούμε και στην επόμενη παράγραφο):

$$L = 24,245 \pm 0,006\ mm \qquad (4.4)$$

Αυτό το αποτέλεσμα σημαίνει ότι με πιθανότητα **68%** η πραγματική μας τιμή βρίσκεται στο διάστημα από **24,239 mm** έως **24.251 mm**. Με βάση τα όσα είπαμε στην σελίδα 7 γίνεται κατανοητό πως το διάστημα αυτό αντιστοιχεί στην περιοχή από $\boldsymbol{x_0 - \sigma}$ έως $\boldsymbol{x_0 + \sigma}$.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΤΩΝ ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ ΨΗΦΙΩΝ

Πολλές φορές στη διάρκεια των πράξεων μας βρίσκουμε αριθμούς με μεγάλο αριθμό ψηφίων. Π.χ. έστω ότι βρίσκουμε για τη μέση τιμή μιας ποσότητας το αποτέλεσμα

$\bar{x} = 7,3333$ ....

Αμέσως γεννιέται το ερώτημα: πόσα δεκαδικά ψηφία πρέπει να αφήσουμε;

Αυτή τη στιγμή δεν μπορούμε να δώσουμε μια συγκεκριμένη απάντηση. Για να το κάνουμε πρέπει να ξέρουμε την ακρίβεια της μέτρησής μας, δηλαδή το σφάλμα.

Έστω όμως ότι υπολογίζοντας το απόλυτο σφάλμα της μέσης τιμής. Βγάζοντας την τετραγωνική ρίζα βρίσκουμε

$\delta x = 0,06273273$ ...

Πως τώρα μπορούμε να απαντήσουμε στο προηγούμενο ερώτημα;

Παίρνοντας υπόψη την ακρίβεια των χρησιμοποιούμενων μεθόδων και οργάνων εφαρμόζουμε τον εξής κανόνα:

Αν έχουμε βρει την πιθανότερη (μέση) τιμή και το σφάλμα, στρογγυλοποιούμε το σφάλμα μέχρι να μας μείνει ένα, το μεγαλύτερο, ψηφίο που είναι διάφορο του μηδενός. Ύστερα στην πιθανότερη (μέση) τιμή αφήνουμε τελευταίο το ψηφίο της ίδιας τάξης μεγέθους κάνοντας κι εδώ στρογγυλοποίηση.
Έτσι στο παράδειγμά μας παίρνουμε :

$\boldsymbol{\delta x = 0,06}$ και $\boldsymbol{\bar{x} = 7,33}$

Άρα τελικά $\boldsymbol{x = 7,33 \pm 0,06}$

Έτσι εξηγείται και το αποτέλεσμα (4.4).

Υπάρχει μια μικρή εξαίρεση από τον κανόνα αυτής της παραγράφου: αν το πρώτο σημαντικό ψηφίο του σφάλματος είναι μικρό (1 ή 2) πιο σωστό είναι να διατηρήσουμε ακόμη ένα ψηφίο στο τελικό αποτέλεσμα (τόσο στο σφάλμα όσο και στην πιθανότερη τιμή).

Εδώ κάποιος μπορεί να διαπιστώσει την ύπαρξη κάποιου προβλήματος. Για να βρούμε το σφάλμα από τη σχέση (4.3) πρέπει να ξέρουμε τη μέση τιμή από τη σχέση (4.1). Πόσα σημαντικά ψηφία θα πρέπει να κρατήσουμε στη μέση τιμή όταν χρησιμοποιούμε τη σχέση (4.3);

Μια απάντηση θα μπορούσε να είναι όσο περισσότερα τόσο το καλύτερο. Και πραγματικά, αν χρησιμοποιούμε κομπιουτεράκι ή ηλεκτρονικό υπολογιστή μπορούμε να το κάνουμε. Μπορούμε βέβαια να κρατήσουμε και λιγότερα. Πάντως έχει σημασία να μπορούμε από τα πριν να προβλέπουμε, ώστε στις πράξεις που κάνουμε για τον υπολογισμό του σφάλματος με τη χρήση της μέσης τιμής η τελευταία να έχει τουλάχιστον ένα σημαντικό ψηφίο περισσότερο από όσα θα μείνουν στο τέλος.

Όταν βέβαια βρούμε και το σφάλμα και καταλήξουμε οριστικά στον αριθμό των σημαντικών ψηφίων της μέσης τιμής στις κατοπινές πράξεις που ίσως χρειαστούν χρησιμοποιούμε μόνο αυτό το αποτέλεσμα.

Κανόνες στρογγυλοποίησης

Πριν προχωρήσουμε σε συγκεκριμένα παραδείγματα ας πούμε δυο λόγια για τους κανόνες στρογγυλοποίησης.
Έστω ότι επιλέξαμε το ψηφίο στο οποίο θέλουμε να κάνουμε τη στρογγυλοποίηση (το υπογραμμισμένο στους αριθμούς του πίνακα):

Α/Α	1	2	3	4	5	6	7
Αριθμός	12,1<u>**3**</u>86	2<u>**5**</u>67	23,<u>**6**</u>47	0,0<u>**3**</u>46	2,<u>**5**</u>0001	6<u>**4**</u>54	0,<u>**4**</u>5

Ακολουθούμε τους εξής κανόνες:

α) Αν το αμέσως επόμενο ψηφίο είναι μεγαλύτερο του **5** ανεβάζουμε το υπό στρογγυλοποίηση ψηφίο κατά μια μονάδα και μηδενίζουμε τα υπόλοιπα. Με βάση τον κανόνα αυτό τα νούμερα 1 και 2 γράφονται **12,14** και **2600** αντίστοιχα.

β) Αν το αμέσως επόμενο ψηφίο είναι μικρότερο του **5** αφήνουμε το υπό στρογγυλοποίηση ψηφίο όπως είναι και μηδενίζουμε τα υπόλοιπα. Με βάση τον κανόνα αυτό τα νούμερα 3 και 4 γράφονται **23,6** και **0,03** αντίστοιχα.

γ) Αν το αμέσως επόμενο ψηφίο είναι ίσο με το **5** εξετάζουμε αν μετά από αυτό υπάρχει κάποιο άλλο ψηφίο διάφορο του μηδενός σε οποιαδήποτε θέση.

Αν υπάρχει τότε αυξάνουμε το υπό στρογγυλοποίηση ψηφίο κατά μία μονάδα και μηδενίζουμε τα υπόλοιπα. Με βάση τον κανόνα αυτό τα νούμερα 5 και 6 γράφονται **3** και **6500** αντίστοιχα.

Αν δεν υπάρχει τότε μπορούμε να κάνουμε ότι θέλουμε, είτε να αυξήσουμε το υπό στρογγυλοποίηση ψηφίο κατά μία μονάδα μηδενίζοντας τα υπόλοιπα, είτε να το αφήσουμε όπως είναι μηδενίζοντας τα υπόλοιπα. Έτσι το νούμερο 7 μπορεί να γραφτεί είτε **0,5** είτε **0,4**. Πάντως αν σε μια σειρά μετρήσεων έχουμε αυτή την περίπτωση μερικές φορές, συνίσταται στις μισές να αυξάνουμε το υπό στρογγυλοποίηση ψηφίο κατά μία μονάδα, ενώ στις υπόλοιπες να το αφήνουμε ως έχει.

Παράδειγμα

	Πριν από την επιλογή των σημαντικών ψηφίων		**Μετά την επιλογή των σημαντικών ψηφίων**		**Τελικό Αποτέλεσμα**
Α/Α	$\overline{x}$	δx	δx	$\overline{x}$	x
1	263,2765	0,07813	0,08	263,28	263.28±0.08
2	12,2	0,03116	0,03	12,20	12.20±0.03
3	127,187	0,932	0,9	127,2	127.2±0.9
4	17,2362	0,232	0,23	17,24	17.24±0.23
5	1563	33,62	30	1560	1560±30
6	178936	589	600	178900	178900±600
7	110022380	9873	10000	110022000	11002000±10000
8	78654	2486	2500	78700	78700±2500
9	135067	1897	1900	135100	135100±1900

ΣΧΕΤΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ

Πολλές φορές ο φοιτητής αναρωτιέται αν το σφάλμα που έχει βρει είναι μεγάλο ή μικρό και μάλιστα ακούγεται για παράδειγμα ότι σφάλμα 2000 είναι πολύ μεγάλο. Μια τέτοια αντιμετώπιση προφανώς δεν είναι σωστή. Για να κρίνουμε αν ένα σφάλμα είναι μικρό ή μεγάλο πρέπει να εξετάσουμε δύο παράγοντες

1. Αν το σφάλμα ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις των μετρήσεων. Δηλαδή αν έχουμε την ακρίβεια που απαιτείται στη συγκεκριμένη μέτρηση.

2. Ένα καλό κριτήριο για το αν ένα σφάλμα είναι μικρό ή μεγάλο μας δίνει το σχετικό σφάλμα που ορίζεται ως εξής:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{\delta x}}{\overline{\boldsymbol{x}}} \qquad (\mathbf{6.1})$$

Το σχετικό σφάλμα είναι καθαρός αριθμός και δίνεται σε ποσοστά. Έτσι λοιπόν ένα σφάλμα θεωρείται μικρό αν $\boldsymbol{n} \sim \mathbf{5}\%$ ενώ μεγάλο αν $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{10}\%$.

Φυσικά όλα αυτά με την προϋπόθεση ότι ισχύει ο παράγοντας 1.

<u>Παράδειγμα</u>

Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία των παραδειγμάτων της προηγούμενης παραγράφου παίρνουμε:

Α/Α	$\overline{\boldsymbol{x}}$	$\boldsymbol{\delta x}$	$\boldsymbol{n}$
1	263,28	0,08	0.03%
2	12,20	0,03	0.2%
3	127,2	0,9	0.7%
4	17,24	0,23	1.3%
5	1560	30	1.9%
6	178900	600	0.3%
7	110022000	10000	0.09%
8	78700	2500	3.2%
9	135100	1900	1.4%

Τονίζουμε εδώ πως στο σχετικό σφάλμα δεν υπάρχουν κάποιοι κανόνες στρογγυλοποίησης.
Απλά το γράφουμε έτσι ώστε να «διαβάζεται».

ΔΙΑΔΟΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Τις περισσότερες φορές στις ασκήσεις του εργαστηρίου, αλλά και στα ερευνητικά πειράματα, η άμεση μέτρηση κάποιων μεγεθών μας χρησιμεύει για τον έμμεσο υπολογισμό κάποιων άλλων με τη χρήση γνωστών τύπων. Έτσι για παράδειγμα μετρώντας το ρεύμα $\boldsymbol{I}$ που διαρρέει κάποιον αγωγό και την τάση $\boldsymbol{U}$ στα άκρα του μπορούμε από τον τύπο του Ohm να υπολογίσουμε την αντίσταση $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{U}/\boldsymbol{I}$.
Έστω τώρα ότι έχουμε μετρήσει την τάση $\boldsymbol{U}$ με σφάλμα $\boldsymbol{\delta U}$ (ανεξάρτητα αν είναι σφάλμα ανάγνωσης ή

απόλυτο σφάλμα μέσης τιμής) και την ένταση του ρεύματος $\boldsymbol{I}$ με σφάλμα $\boldsymbol{\delta I}$. Άμεση μέτρηση της αντίστασης δεν έχουμε, άρα δεν μπορούμε να μιλήσουμε για σφάλμα του $\boldsymbol{R}$ με την έννοια που μέχρι τώρα μιλούσαμε. Είναι όμως προφανές ότι τα σφάλματα των $\boldsymbol{U}$ και $\boldsymbol{I}$ θα έχουν επίδραση και στο $\boldsymbol{R}$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι έχουμε **διάδοση σφαλμάτων.**

Ισχύει ο εξής κανόνας (που αποδεικνύεται αυστηρά με βάση τη μαθηματική θεωρία των σφαλμάτων):

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ποσότητα $\boldsymbol{\lambda = f(x, y, z, \ldots.)}$ όπου τα μεγέθη $\boldsymbol{x, y, z}$, ... έχουν σφάλματα αντίστοιχα $\boldsymbol{\delta x, \delta y, \delta z}, \ldots \ldots$

Τότε ισχύει:

$$\boldsymbol{\delta\lambda} = \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{\partial\lambda}}{\boldsymbol{\partial x}}\boldsymbol{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{\partial\lambda}}{\boldsymbol{\partial y}}\boldsymbol{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{\partial\lambda}}{\boldsymbol{\partial z}}\boldsymbol{\delta z}\right)^2 \ldots..} \qquad \mathbf{(7.1)}$$

όπου $\boldsymbol{\partial\lambda/\partial x}$ η μερική παράγωγος της συνάρτησης $\boldsymbol{\lambda}$ ως προς $\boldsymbol{x}$.

Έτσι λοιπόν για την περίπτωση που εξετάσαμε στην αρχή της παραγράφου θα ισχύει

$$\boldsymbol{\delta R} = \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{\partial R}}{\boldsymbol{\partial U}}\boldsymbol{\delta U}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{\partial R}}{\boldsymbol{\partial I}}\boldsymbol{\delta I}\right)^2} \;=\; \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{\delta U}}{\boldsymbol{I}}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{U}}{\boldsymbol{I^2}}\boldsymbol{\delta I}\right)^2} \qquad \mathbf{(7.2)}$$

Παρατήρηση . Όταν κάνουμε τις παραγωγίσεις και χρειαστεί να αντικαταστήσουμε τα νούμερα, στη θέση των $\boldsymbol{x, y, z}$ **, ...** πρέπει να βάλουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα, είτε αυτά είναι μέσες τιμές, είτε προϊόν μιας μέτρησης.

<u>Παράδειγμα</u>

Μετρώντας την ένταση του ρεύματος και την τάση στα άκρα αντιστάσεων παίρνουμε τις τιμές:

U (V)	5	7	9	11	13	15	18	20
I (mA)	26	35	43	51	58	65	75	79

Με $\boldsymbol{\delta U = 0.2\ V}$ και $\boldsymbol{\delta I = 1\ mA}$**.** Από τον τύπο του Ohm $\boldsymbol{R = U/I}$ υπολογίζουμε την Αντίσταση.

Από την (7.2) υπολογίζουμε το $\boldsymbol{\delta R}$ και τα αποτελέσματα τα καταχωρούμε στον παρακάτω πίνακα:

$\mathbf{U}$ $(\mathbf{V})$	$\mathbf{I}\,(\mathbf{mA})$	$\boldsymbol{R}\,(\boldsymbol{\Omega})$	$\boldsymbol{\delta R}\,(\boldsymbol{\Omega})$	$\boldsymbol{R \pm \delta R}$
5	26	192,31	11	192±11
7	35	200	8	200±8
9	43	209,30	7	209±7
11	51	215,69	6	216±6
13	58	224,14	5	224±5
15	65	230,77	5	231±5
18	75	240	4	240±4
20	79	253,16	4	253±4

ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Συνήθως στη διαδικασία μιας μέτρησης δεν υπεισέρχεται μόνο ένα σφάλμα, αλλά πολλά. Για παράδειγμα αν μετρούμε πολλές φορές το ίδιο μέγεθος έχουμε, κυρίως, τριών ειδών σφάλματα:

α) Σφάλμα κατασκευαστή.

β) Σφάλμα ανάγνωσης.

γ) Σφάλμα μέσης τιμής.

Σ’ αυτή την περίπτωση γεννιέται το ερώτημα ποιο πρέπει εμείς να θεωρήσουμε σαν σφάλμα της μέτρησης; Πριν απαντήσουμε σ’ αυτό το ερώτημα ας δούμε ένα παράδειγμα.

Έστω ότι μετράμε με μέτρο ένα μήκος $\boldsymbol{L}$ δώδεκα φορές και βρίσκουμε τις τιμές (σε mm):

324 323 324 322 324 323 323 323 324 322 323 323

Για τη μέση τιμή έχουμε $\bar{\boldsymbol{L}} = \mathbf{323,166}\,\boldsymbol{mm}$, ενώ για το σφάλμα της μέσης τιμής $\boldsymbol{\delta L} = \mathbf{0,21}\,\boldsymbol{mm}$

Μπορούμε τώρα να πούμε ότι το αποτέλεσμά μας είναι $\boldsymbol{L} = \mathbf{323,17 \pm 0,21}\,\boldsymbol{mm}$; Όμως δεν έχουμε λάβει ακόμη υπόψη τόσο το σφάλμα του κατασκευαστή, όσο και το σφάλμα ανάγνωσης. Ας υποθέσουμε ότι το σφάλμα του κατασκευαστή είναι της τάξης του $\mathbf{0,1}\,\boldsymbol{mm}$. Όσον αφορά στο σφάλμα ανάγνωσης ας υποθέσουμε ότι οι συνθήκες μέτρησης είναι τέτοιες που το σφάλμα ανάγνωσης είναι ίσο με την ακρίβεια του οργάνου μας, στη συγκεκριμένη περίπτωση του μέτρου. Συνήθως ένα καλό μέτρο έχει ακρίβεια $\mathbf{0,5}\,\boldsymbol{mm}$ (αυτό οφείλεται στη χαραγή των υποδιαιρέσεων, στο πάχος και στην ευκρίνειά τους).

Επομένως τελικά έχουμε τρία σφάλματα:

α) μέσης τιμής $\mathbf{0,21}\,\boldsymbol{mm}$

β) κατασκευαστή $\mathbf{0,1}\,\boldsymbol{mm}$ και

γ) ανάγνωσης (ακρίβεια) $\mathbf{0,5}\,\boldsymbol{mm}$.

Είναι κατανοητό πως το σφάλμα του κατασκευαστή δεν παίζει ρόλο γιατί είναι πολύ μικρό. Όσο για το σφάλμα της μέσης τιμής, νομίζουμε πως είναι προφανές, ότι αφού είναι μικρότερο από το σφάλμα ανάγνωσης (την ακρίβεια του οργάνου) δεν μπορούμε να το κρατήσουμε γιατί αυτό δεν μπορούμε με τίποτε να το βελτιώσουμε. Φαντασθείτε π.χ. τι θα λέγαμε αν όλες οι τιμές που βρήκαμε πιο πάνω ήταν $\boldsymbol{323\ mm}$, αποτέλεσμα πολύ συχνό στη μέτρηση μήκους. Ήταν δυνατόν να πούμε ότι το σφάλμα είναι μηδέν;!!! Φυσικά όχι. Άρα και για το συγκεκριμένο παράδειγμά μας το αποτέλεσμα είναι να κρατήσουμε το μεγαλύτερο σφάλμα, στην προκειμένη περίπτωση το σφάλμα ανάγνωσης και να γράψουμε $\boldsymbol{L = 323,2 \pm 0,5\ mm}$.

Επομένως ο γενικός κανόνας είναι πως στην περίπτωση που στην ίδια μέτρηση έχουμε πολλά σφάλματα κρατάμε πάντα το μεγαλύτερο .

ΑΠΟΡΡΙΨΗ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

Μερικές φορές όταν μετρούμε επανειλημμένα την ίδια ποσότητα, κάποιο από τα αποτελέσματά μας διαφέρει απ' όλα τα άλλα. Όταν αυτό συμβαίνει ο πειραματικός πρέπει να αποφασίσει αν αυτό είναι συνέπεια κάποιων λαθών στη διαδικασία της μέτρησης, οπότε πρέπει να αγνοηθεί, ή είναι νομοτελειακό αποτέλεσμα που πρέπει να εξεταστεί μαζί μ' όλα τα άλλα. Για παράδειγμα κάνουμε 6 μετρήσεις της περιόδου ενός εκκρεμούς και βρίσκουμε (σε δευτερόλεπτα):

3,8	3,5	3,9	3,9	3,4	1,8

Σ' αυτό το παράδειγμα το **1.8** διαφέρει σημαντικά από τα υπόλοιπα αποτελέσματα και πρέπει να αποφασίσουμε τι θα το κάνουμε.

Θέλουμε να υπογραμμίσουμε εδώ ότι στη θεωρία των σφαλμάτων και των μετρήσεων αποδεικνύεται ότι ένα τέτοιο αποτέλεσμα (αν υποθέσουμε ότι δεν έχουμε κάνει λάθη στην πειραματική διαδικασία) είναι πιθανό, παρόλο που αυτή η πιθανότητα είναι μικρή.

Αφού λοιπόν πεισθούμε για την ορθότητα της πειραματικής μας διαδικασίας πρέπει να πάρουμε την τελική απόφαση, η οποία δεν μπορεί να είναι αυθαίρετη, γιατί θα επιδράσει σημαντικά στο αποτέλεσμά μας.

Για παράδειγμα αν δεν αγνοήσουμε την 6η μέτρηση στα παραπάνω αποτελέσματα θα έχουμε:

$$\boldsymbol{T = (3,4 \pm 0,3)\ sec}$$

ενώ αν την αγνοήσουμε:

$$\boldsymbol{T = (3,7 \pm 0,1)\ sec}$$

Ένας τρόπος για να απαντήσουμε σ' αυτό το ερώτημα είναι να χρησιμοποιήσουμε το λεγόμενο κριτήριο **Chauvenet**. Ακολουθούμε λοιπόν τα εξής βήματα:

1. Χρησιμοποιώντας όλες τις τιμές (και την «ύποπτη» $\boldsymbol{x_j}$) υπολογίζουμε τη μέση τιμή $\boldsymbol{\bar{x}}$.

2. Βρίσκουμε την τυπική απόκλιση $\boldsymbol{\sigma}$ από τον τύπο:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N(N-1)}} \qquad (8.1)$$

3. Βρίσκουμε το λόγο της απόλυτης τιμής της διαφοράς της μέσης τιμής από την «ύποπτη» τιμή προς την τυπική απόκλιση μ :

$$\mu = \frac{|\overline{x} - x_j|}{\sigma} \qquad (8.2)$$

4. Από τον πίνακα του παραρτήματος βρίσκουμε την πιθανότητα $P(<\mu\sigma)$ να έχουμε μέτρηση που απέχει από τη μέση τιμή λιγότερο από την «ύποπτη» που εξετάζουμε.

5. Βρίσκουμε την πιθανότητα $P(\geq \mu\sigma)$ να έχουμε τιμή που να απέχει από τη μέση περισσότερο ή όσο η «ύποπτη» από τη σχέση:

$$P(\geq \mu\sigma) = 1 - P(<\mu\sigma) \qquad (8.3)$$

6 Πολλαπλασιάζουμε το $P(\geq \mu\sigma)$ με τον αριθμό των μετρήσεων N και βρίσκουμε το αποτέλεσμα u. Τότε:

α) Αν $u < 0{,}5$ απορρίπτουμε την «ύποπτη» τιμή, βρίσκουμε νέα μέση τιμή (από N-1 μετρήσεις) και το σφάλμα της.

β) Αν $u \geq 0{,}5$ κρατάμε την ύποπτη τιμή και συνεχίζουμε με όλες τις μετρήσεις υπολογίζοντας το σφάλμα για τη μέση τιμή που ήδη έχουμε υπολογίσει.

Στο παράδειγμα λοιπόν που είχαμε στην αρχή του κεφαλαίου υποθέτουμε κατ' αρχήν ότι όλες οι τιμές μας είναι λογικές. Υπολογίζουμε λοιπόν τη μέση τιμή και βρίσκουμε $\overline{T} = 3{,}383\ sec$. Για την τυπική απόκλιση έχουμε: $\sigma_T = 0{,}7\ sec$.

Τώρα βλέπουμε ότι η τιμή **1,8 sec**, για την οποία αμφιβάλλουμε, διαφέρει από τη μέση τιμή κατά **1,58** δηλαδή $\mu = 2{,}3$. Μπορούμε τώρα να βρούμε τι πιθανότητα έχει ένα αποτέλεσμά μας να απέχει από τη μέση τιμή περισσότερο από **2,3** τυπικές αποκλίσεις:

Από το πίνακα του Παραρτήματος βρίσκουμε την $P(< 2.3\sigma)$ που είναι **0.98**

Άρα:

$$P(\geq 2{,}3\sigma_T) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02$$

Αυτό σημαίνει ότι αν κάναμε **100** μετρήσεις της περιόδου οι **2** τουλάχιστον θα ήταν το ίδιο "άσχημες" όπως το **1.8 sec** και δεν θα έπρεπε να τις απορρίψουμε. Εμείς όμως κάναμε **6**. Άρα "άσχημες" θα πρέπει να είναι:

$$\mathbf{0.02 \times 6 = 0{,}12}$$

Το κριτήριο του **Chauvenet** μας λέει ότι αν αυτός ο τελευταίος αριθμός είναι μικρότερος του **0,5** τότε πρέπει να απορρίψουμε την τιμή. Αν απορρίψουμε την τιμή πρέπει να προσδιορίσουμε

ξανά την $\boldsymbol{T}$ και την $\boldsymbol{\delta T}$**.** Έτσι για το παράδειγμά μας βρίσκουμε:

$$\boldsymbol{T = (3,7 \pm 0,1)\ sec}$$

Αν τώρα έχουμε και κάποια άλλη ύποπτη τιμή δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δεύτερη φορά στην ίδια σειρά μετρήσεων το κριτήριο του **Chauvenet**.

Ασκήσεις

1. Μετρώντας το μήκος $\boldsymbol{L}$ και το πλάτος $\boldsymbol{d}$ ορθογωνίου παραλληλογράμμου βρίσκουμε τις εξής τιμές (σε mm).

$\boldsymbol{L}$	24,25	24,26	24,22	24,28	24,24	24,25	24,22	24,26	24,23	24,24
$\boldsymbol{d}$	50,36	50,35	50,41	50,37	50,36	50,32	50,39	50,38	50,36	50,38

Υπολογίστε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου και το σφάλμα με 2 τρόπους:

α) Από τα $\boldsymbol{L_i}$, $\boldsymbol{d_i}$ υπολογίστε τα $\boldsymbol{\overline{L}}$, $\boldsymbol{\overline{d}}$ και $\boldsymbol{\delta L}$, $\boldsymbol{\delta d}$ και από εδώ το $\boldsymbol{\overline{S}}$ και το $\boldsymbol{\delta S}$

β) Από τα $\boldsymbol{L_i}$, $\boldsymbol{d_i}$ υπολογίστε τα $\boldsymbol{S}$, και από εδώ το $\boldsymbol{\overline{S}}$ και το $\boldsymbol{\delta S}$**.**

2. Στα παρακάτω παραδείγματα το $\boldsymbol{Z}$ είναι συνάρτηση των μεγεθών $\boldsymbol{A}$ **,** $\boldsymbol{B}$ κ.τ.λ. που έχουν μετρηθεί ανεξάρτητα. Υπολογίστε το $\boldsymbol{\overline{Z}}$ και το $\boldsymbol{\delta Z}$ από τις γνωστές τιμές των $\boldsymbol{\overline{A} \pm \delta A}$ **,** $\boldsymbol{\overline{B} \pm \delta B}$ ...

α) $\boldsymbol{Z = A^2}$, $\boldsymbol{A = 25 \pm 1}$

β) $\boldsymbol{Z = A - 2B}$, $\boldsymbol{A = 100 \pm 3}$, $\boldsymbol{B = 45 \pm 2}$

γ) $\boldsymbol{Z = \frac{A(C^2 + D^{3/2})}{B}}$, $\boldsymbol{A = 0,100 \pm 0,003}$, $\boldsymbol{B = 1,00 \pm 0,05}$, $\boldsymbol{C = 50,0 \pm 0,5}$, $\boldsymbol{D = 100 \pm 8}$

δ) $\boldsymbol{Z = 1 - \frac{1}{A}}$, $\boldsymbol{A = 50 \pm 2}$

3. Η μάζα παραλληλεπίπεδης μεταλλικής ομογενούς ράβδου με πλευρές $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ και $\boldsymbol{c}$ είναι $\boldsymbol{M}$. Οι μετρήσεις μας έδωσαν τα εξής αποτελέσματα:

$\boldsymbol{M = (135,00 \pm 0,10)\ \mathrm{gr}}$, $\boldsymbol{a = (80,0 \pm 1,0)\ \mathrm{mm}}$, $\boldsymbol{b = (10,0 \pm 1,0)\ \mathrm{mm}}$, $\boldsymbol{c = (20,00 \pm 0,10)\ \mathrm{mm}}$.

Υπολογίστε το σχετικό σφάλμα της πυκνότητας του μετάλλου (σε ποσοστά).

4. Ένας φοιτητής μετράει μια διαφορά δυναμικού U δέκα φορές και βρίσκει (σε Volt) :

0,86	0,83	0,87	0,84	0,82	0,95	0,83	0,85	0,89	0,88

α) Υπολογίστε το U και το δU.

β) Αν χρησιμοποιήσει το κριτήριο **Chauvenet** για την τιμή $0.95\ V$ πρέπει να την απορρίψει ή όχι; Αν ναι ποια θα είναι τα καινούρια U και δU;

Απαντήσεις ασκήσεων

1. α) $\boldsymbol{S = (1221,2 \pm 0,4)\ mm^2}$, β) $\boldsymbol{S = (1221,18 \pm 0.28)}$ **mm2**
2. α) $\boldsymbol{Z = 630 \pm 50}$, β) Z=10±5, γ) Z=350±30, δ) Z=0.9800±0.0008
3. $\boldsymbol{\delta\rho/\rho = 10.08}\%$
4. α) U=(0.862±0.012) V, β) U=(0.852±0.008) V

Παράρτημα

Πίνακας των τιμών $P(<\mu\sigma)$ σε %.

μ	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,0	0,00	0,80	1,60	2,39	3,19	3,99	4,78	5,58	6,38	7,17
0,1	7,97	8,76	9,55	10,34	11,13	11,92	12,71	13,50	14,28	15,07
0,2	15,85	16,63	17,41	18,19	18,97	19,74	20,51	21,28	22,05	22,82
0,3	23,58	23,34	25,10	25,86	26,61	27,37	28,12	28,86	29,61	30,35
0,4	31,08	31,82	32,55	33,28	34,01	34,73	35,45	36,16	36,88	37,59
0,5	38,29	38,99	39,69	40,39	41,08	41,77	42,45	43,13	43,81	44,48
0,6	45,15	45,81	46,47	47,13	47,78	48,43	49,07	49,71	50,35	50,98
0,7	51,61	52,23	52,85	53,46	54,07	54,67	55,27	55,87	56,46	57,05
0,8	57,63	58,21	57,78	59,35	59,91	60,47	61,02	61,57	62,11	62,65
0,9	63,19	63,72	64,24	64,76	65,28	65,79	66,29	66,80	67,29	67,78
1,0	68,27	68,57	69,23	69,70	70,17	70,63	71,09	71,54	71,99	72,43
1,1	72,87	73,30	73,73	74,15	74,57	74,99	75,40	75,80	76,20	76,60
1,2	76,99	77,37	77,75	78,13	78,50	78,87	79,23	79,59	79,95	80,29
1,3	80,64	80,98	81,32	81,65	81,98	82,30	82,62	82,93	83,24	83,55
1,4	83,85	84,15	84,44	84,73	85,01	85,29	85,57	85,84	86,11	86,38
1,5	86,64	86,90	87,15	87,40	87,64	87,89	88,12	88,36	88,59	88,82
1,6	89,04	89,26	89,48	89,69	89,90	90,11	90,31	90,51	90,70	90,90
1,7	91,09	91,27	91,46	91,64	91,81	91,99	92,16	92,33	92,49	92,65
1,8	92,81	92,97	93,12	93,28	93,42	93,57	93,71	93,85	93,99	94,12
1,9	94,26	94,39	94,51	94,64	94,76	94,88	95,00	95,12	95,23	95,34
2,0	95,45	95,56	95,66	95,76	95,86	95,96	96,06	96,15	96,25	96,34
2,1	96,43	96,51	96,60	96,68	96,76	96,84	96,92	97,00	97,07	97,15
2,2	97,22	97,29	97,36	97,43	97,49	97,56	97,62	97,68	97,74	97,80
2,3	97,86	97,91	97,97	98,02	98,07	98,12	98,17	98,22	98,27	98,32
2,4	98,36	98,40	98,45	98,49	98,53	98,57	98,61	98,65	98,69	98,72
2,5	98,76	98,79	98,83	98,86	98,89	98,92	98,95	98,98	99,01	99,04
2,6	99,07	99,09	99,12	99,15	99,17	99,20	99,22	99,24	99,26	99,29
2,7	99,31	99,33	99,35	99,37	99,39	99,40	99,42	99,44	99,46	99,47
2,8	99,49	99,50	99,52	99,53	99,55	99,56	99,58	99,59	99,60	99,61
2,9	99,63	99,64	99,65	99,66	99,67	99,68	99,69	99,70	99,71	99,72
3,0	99,73									
3,5	99,95									
4,0	99,994									
4,5	99,9993									
5,0	99,99994									

Στον πίνακα η πρώτη στήλη και η πρώτη σειρά (έντονα σημειωμένες) χρησιμεύουν για να βρούμε το $\boldsymbol{\mu}$. Η πρώτη στήλη σας δίνει μονάδες και δέκατα, ενώ η πρώτη σειρά τα εκατοστά.
Οι υπόλοιπες τιμές (που είναι γραμμένες με κανονικά γράμματα) δίνουν τις τιμές του $\boldsymbol{P}(<\mu\sigma)$**.** Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι θέλετε να βρείτε την τιμή του $\boldsymbol{P}(<\mu\sigma)$ για $\boldsymbol{\mu}=\mathbf{1,64}$. Κάνετε το εξής:
Από την πρώτη στήλη βρίσκετε τη γραμμή που αντιστοιχεί στο **1,6**. Από την πρώτη γραμμή βρίσκετε τη στήλη που αντιστοιχεί στο **0,04 (1,6+0,04=1,64)** . Η τομή των 2 που είναι ο αριθμός **89,90** σας δίνει $\boldsymbol{P}(<1.64\boldsymbol{\sigma})=\mathbf{89.90}\%=\mathbf{0.8990}$.
Με τον ίδιο τρόπο βρίσκετε π.χ., ότι για $\boldsymbol{\mu}=\mathbf{2,18}$ $\boldsymbol{P}(<2,\mathbf{18}\boldsymbol{\sigma})=\mathbf{97,07}\%=\mathbf{0,9707}$, ενώ για $\boldsymbol{\mu}=\mathbf{1,00}$ παίρνετε $\boldsymbol{P}(<1{,}00\boldsymbol{\sigma})=\mathbf{68,27}\%=\mathbf{0,6827}$.
Αν τώρα θέλετε να βρείτε το $\boldsymbol{P}(<\mu\sigma)$ π.χ. για $\boldsymbol{\mu}=\mathbf{1,234}$ εργάζεσθε ως εξής:
Βρίσκετε ότι για $\boldsymbol{\mu_1}=\mathbf{1,23}$, $\boldsymbol{P}(<1.23\boldsymbol{\sigma})=\mathbf{78.13}\%=\mathbf{0.7813}$, ενώ για$\boldsymbol{\mu_2}=\mathbf{1,24}$, $\boldsymbol{P}(<1.24\boldsymbol{\sigma})=\mathbf{78.50}\%=\mathbf{0.7850}$. Επομένως$\boldsymbol{\Delta P}=\boldsymbol{P}(<1.24\boldsymbol{\sigma})-\boldsymbol{P}(<1.23\boldsymbol{\sigma})=\mathbf{0.0037}$. Τότε από την απλή μέθοδο των τριών παίρνετε ότι:
$\boldsymbol{P}(<1.234\boldsymbol{\sigma})=\boldsymbol{P}(<1.23\boldsymbol{\mu\sigma})+[(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\mu_1})/(\boldsymbol{\mu_2}-\boldsymbol{\mu_1})]\cdot\boldsymbol{\Delta P}=\mathbf{0.7813}+\mathbf{0.4}\cdot\mathbf{0.0037}\approx\mathbf{0.7828.}$
Για $\boldsymbol{\mu}>3{,}0$ οι διαφορές στο $\boldsymbol{P}(<\mu\sigma)$ είναι πολύ μικρές και έτσι δίνουμε τις τιμές αυξάνοντας το $\boldsymbol{\mu}$ κατά **0,5**. Αν μας ενδιαφέρει μια ενδιάμεση τιμή εργαζόμαστε ακριβώς κατά τον ίδιο τρόπο, όπως στο τελευταίο παράδειγμα.