

1 Λαγκρανζιανή μηχανική

1. (α) Γράψτε τις εξισώσεις Lagrange για ένα σφαιρικό εκκρεμές. (β) Προσδιορίστε τις διατηρούμενες ποσότητες και δείξτε ότι το σύστημα είναι ισοδύναμο με ένα μονοδιάστατο πρόβλημα για την πολική γωνία θ υπό δυναμικό $V(\theta)$. Προσδιορίστε τη μορφή του δυναμικού. (γ) Βρείτε τα σημεία ισορροπίας του δυναμικού και ερμηνεύστε τα φυσικά.
2. Γράψτε τις εξισώσεις Lagrange για το διπλό εκκρεμές, με μήκη νήματος L_1 και L_2 και μάζες m_1 και m_2 . Βρείτε τις συχνότητες των μικρών ταλαντώσεων γύρω από τη θέση ισορροπίας.
3. Δείξτε ότι οι εξισώσεις Lagrange παραμένουν αναλλοίωτες αν στη Λαγκρανζιανή προστεθεί ένας όρος $dF(q_i, t)/dt$.
4. (α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης για ένα σωματίο σε κεντρικό δυναμικό $V(r)$ και δείξτε ότι αντιστοιχούν σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα για την ακτίνα r . (β) Για δυναμικό της μορφής $V(r) = kr^{-a}$, βρείτε τις σφαιρικές τροχιές και προσδιορίστε ποιες από αυτές είναι ευσταθείς.
5. Σώμα μάζας m κινείται στην επιφάνεια ενός σταθερού κώνου, του οποίου ο άξονας σχηματίζει γωνία α με την κατακόρυφο. Με δεδομένη την παρουσία ομογενούς βαρυτικού πεδίου g , βρείτε τη Λαγκρανζιανή και τις εξισώσεις κίνησης για το σύστημα.
6. Έστω χρονοεξαρτημένη Λαγκρανζιανή $L(q, \dot{q}, t) = e^{\gamma t} L_0(q, \dot{q})$, όπου $\gamma > 0$ και $L_0(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)$. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης. Ποια είναι η φυσική σημασία του γ ; Πώς συμπεριφέρεται η συνάρτηση ενέργειας;
7. Δίσκος ακτίνας R κυλά χωρίς ολίσθηση σε επιφάνεια παραβολής με εξίσωση $y = ax^2$. Βρείτε την εξίσωση δεσμού. Ποια είναι η απαραίτητη συνθήκη προκειμένου να ολισθαίνει ο δίσκος παντού;
8. Βρείτε την διαδρομή ελάχιστου χρόνου μεταξύ των σημείων $(0, 0)$ και $(x, -y)$ για $x, y > 0$ παρουσία βαρυτικού πεδίου $-g$ στην κατεύθυνση y .
9. Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης μίας Λαγκρανζιανής $L(q, \dot{q}, \ddot{q})$, γενικεύοντας κατάλληλα την αρχή του Χάμιλτον. Υπολογίστε την εκπεφρασμένα για την Λαγκρανζιανή $L = \frac{1}{2} q \ddot{q} - V(q)$. Οι εξισώσεις κίνησης θα σας είναι οικείες. Σε τί οφείλεται αυτό;
10. Εκκρεμές μήκους ℓ στηρίζεται σε βάση που μετακινείται κάθετα ως $y = y_0 \cos \omega t$. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος και υπολογίστε τις εξισώσεις κίνησης. Βρείτε ότι στο όριο μικρών μετατοπίσεων γύρω από τις θέσεις ισορροπίας $\theta = 0$ και $\theta = \pi$, οι εξισώσεις κίνησης είναι της μορφής

$$\ddot{\theta} + (\pm \omega_0^2 - \lambda \cos \omega t) \theta = 0,$$

όπου $\omega_0 = \sqrt{g/\ell}$ η ιδιοσυχνότητα του εκκρεμούς και $\lambda = \omega^2 y_0 / \ell$.

Λύστε αυτήν την εξίσωση για $\omega_0 \ll \omega$: θεωρείστε ότι $\theta(t) = \Phi(t) + \xi(t)$, όπου η Φ ταλαντώνεται αργά με μεγάλο πλάτος, ενώ η $\xi(t)$ έχει μικρό πλάτος και μεγάλη συχνότητα. Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τη Φ σχεδόν σταθερά για μια περίοδο της ξ , οπότε να γράψουμε $\xi \simeq \lambda \cos \omega t \Phi$ και να πάρουμε λύση $\xi(t) \simeq \lambda \Phi(t) \cos \omega(t)$. Αντικαταστήστε αυτήν την τιμή για το $\xi(t)$ και πάρτε την εξίσωση για το $\Phi(t)$ παίρνοντας μέση τιμή για τις γρήγορες ταλαντώσεις, αφού το Φ μεταβάλλεται σε πιο μεγάλη κλίμακα. Ποια είναι η συχνότητα ταλάντωσης γύρω από την ευσταθή ισορροπία; Για ποιες τιμές των παραμέτρων γίνεται η θέση $\theta = \pi$ ευσταθής;

2 Περιστροφές και δυναμική στερεού σώματος

1. Σώμα εκτοξεύεται κατακόρυφα στην επιφάνεια της Γης. Δείξτε ότι η οριζόντια μετατόπιση λόγω των δυνάμεων Coriolis είναι $\omega \cos \theta$, όπου ω η γωνιακή ταχύτητα της Γης και θ το γεωγραφικό πλάτος.
2. Δείξτε ότι στο εκκρεμές του Φουκώ, το επίπεδο ταλάντωσης περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega \cos \theta$.
3. Υπολογίστε το τανυστή ροπής αδράνειας για έναν κούφιο κύλινδρο εξωτερικές ακτίνας R , εσωτερικής b και μήκους L . Υπάρχουν τιμές των παραμέτρων για τις οποίες οι τρεις ιδιοτιμές του τανυστή είναι ίσες μεταξύ τους;
4. Σωμάτιο κινείται στην επιφάνεια ενός κυλίνδρου, ο οποίος περιστρέφεται σε γωνία θ με την κατακόρυφο γύρω από τον άξονα συμμετρίας του. Αν γωνιακή ταχύτητα περιστροφής είναι ω , βρείτε τις εξισώσεις κίνησης.
5. Ράβδος μάζας M και μήκους L κρέμεται από ελατήριο σταθεράς k , το άλλο άκρο του οποίου στερεώνεται. Το ελατήριο κινείται μόνο κατακόρυφα, ενώ η ράβδος μπορεί να κινηθεί μόνο στο κατακόρυφο επίπεδο. Γράψτε τις Λαγκρανζιανές εξισώσεις κίνησης.
6. Ένα στερεό σώμα με διακεκριμένες κύριες ροπές αδράνειας $I_1 < I_2 < I_3$, περιστρέφεται ελεύθερα (χωρίς ροπή). Δείξτε ότι η ομαλή περιστροφή γύρω από τον άξονα 1 ή τον άξονα 3 είναι σταθερή υπό μικρές διαταραχές. Δείξτε ότι η ομαλή περιστροφή γύρω από τον άξονα 2 είναι ασταθής.
7. Ένα στερεό σώμα κινείται στο επίπεδο, και ένα συγκεκριμένο σημείο του είναι περιορισμένο να κινείται πάνω σε έναν σταθερό κύκλο ακτίνας R . Το στερεό είναι κατά τα άλλα ελεύθερο. Επιλέξτε κατάλληλες γενικευμένες συντεταγμένες για τη διαμόρφωση του συστήματος. Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης.
8. Μελετήστε τις μικρές ταλαντώσεις του συμμετρικού περιστροφέα γύρω από τη λύση ισορροπίας με $\dot{\theta} = 0$. Βρείτε την ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης.

3 Χαμιλτονιανή δυναμική

1. Βρείτε τη Χαμιλτονιανή για ένα στερεό σώμα που περιστρέφεται κάτω από την επίδραση του βάρους του.
2. Βρείτε τη Χαμιλτονιανή για το σφαιρικό εκκρεμές και γράψτε τις εξισώσεις Χάμιλτον.
3. Βρείτε τη Χαμιλτονιανή για το πρόβλημα 1.6. Διατηρείται;
4. Θεωρείστε εκκρεμές μήκους ℓ , το σημείο στήριξης του οποίου περιστρέφεται ομαλά με συχνότητα ω σε κύκλο ακτίνας R . Οι ταλαντώσεις γίνονται στο επίπεδο του κύκλου. Βρείτε τη Χαμιλτονιανή και τις εξισώσεις κίνησης.
5. Θεωρείστε εκκρεμές μήκους ℓ , το σημείο στήριξης του οποίου κινείται σε παραβολή $z = \frac{1}{2}ax^2$ στο κατακόρυφο επίπεδο. Βρείτε τη Χαμιλτονιανή και τις εξισώσεις κίνησης.
6. Θεωρείστε σωμάτιο εντός δυναμικού $V(x)$ με χρονομεταβαλλόμενη μάζα $m(t)$. Γράψτε τη Χαμιλτονιανή και τις εξισώσεις κίνησης. Δίνει η Χαμιλτονιανή τις τιμές της ενέργειας;

7. Σε Καρτεσιανές συντεταγμένες, η Χαμιλτονιανή ενός σώματος είναι $H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \lambda L^2$, όπου $L = x_1 p_2 - x_2 p_1$. Υπολογίστε την αγκύλη Poisson $\{L, H\}$. Βρείτε τη Χαμιλτονιανή για την περιγραφή του συστήματος σε πολικές συντεταγμένες.
8. Σωματίο μάζας m κινείται σε οριζόντιο δακτύλιο μάζας και ακτίνας R που περιστρέφεται γύρω από άξονα κάθετο σε ένα σημείο του. Βρείτε τη Χαμιλτονιανή που περιγράφει το σύστημα και τις εξισώσεις κίνησης.
9. Σωματίο μάζας m κινείται σε κατακόρυφο δακτύλιο ακτίνας R που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή τάχύτητα ω γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το 'κεντρο του. Βρείτε τη Χαμιλτονιανή που περιγράφει το σωματίο και τις εξισώσεις κίνησης.

4 Χαμιλτονιανή μηχανική

1. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός $Q = \log[(\sin p)/q]$, $P = q \cot p$ είναι κανονικός.
2. Βρείτε το κανονικό μετασχηματισμό που προκύπτει από γεννήτορα $F_3 = -(e^Q - 1)^2 \sin p$.
3. Ποια είναι η συζυγής ποσότητα της Χαμιλτονιανής του ελεύθερου σωματιδίου, και ποια του αρμονικού ταλαντωτή; Τί φυσική ερμηνεία έχουν; Είναι καλά ορισμένες σε όλον τον καταστατικό χώρο; Για τον αρμονικό ταλαντωτή, πώς σχετίζεται η συζυγής ποσότητα με τη φάση της ταλάντωσης;
4. Κάτω από ποιες συνθήκες είναι ο μετασχηματισμός $Q = ap/q^2$, $P = bq^3$ κανονικός;
5. Έστω ο μετασχηματισμός στον θεσεογραφικό χώρο $\mathbb{R}^2$, $Q_1 = q_1^2$, $Q_2 = q_1 + q_2$. Βρείτε τη γενικότερη δυνατή έκφραση των συζυγών ορμών P_1 και P_2 .
6. Δείξτε ότι η αγκύλη Poisson δυο σταθερών της κίνησης είναι επίσης σταθερά της κίνησης.
7. Στη σφαίρα S^2 ορίζονται οι αγκύλες Poisson $\{\cos \theta, \phi\} = 1$, όπου θ, ϕ οι συνήθεις γωνιακές συντεταγμένες. Δείξτε ότι αγκύλες Poisson των $L_1 = \sin \theta \cos \phi$, $L_2 = \sin \theta \sin \phi$, $L_3 = \cos \theta$ ορίζουν μία αναπαράσταση της άλγεβρας των περιστροφών.
8. Ένα σώμα που κινείται στην ημιευθεία έχει αγκύλες Poisson $\{x, p\} = 1$, με τον περιορισμό $x > 0$. Δείξτε ότι οι μετασχηματισμοί που γεννά η συνάρτηση $f = p$ βγάζουν το σύστημα εκτός καταστατικού χώρου. Θεωρείστε την άλγεβρα που ορίζεται από τους γεννήτορες x και $\pi = xp$. Πώς δρά πάνω στον καταστατικό χώρο;
9. Δείξτε ότι για σωματίο μάζας m εντός κεντρικού δυναμικού $V(r) = -\alpha/r$, όπου α σταθερά, το διάνυσμα Runge-Lenz $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - m\alpha \mathbf{r}/r$ είναι σταθερά της κίνησης. Βρείτε τη σχέση του μέτρου $|\mathbf{A}|$ με την εκκεντρότητα των τροχιών και με την ολική ενέργεια.
10. Έστω μηχανικό σύστημα με καταστατικό χώρο $\mathbb{R}^{2n}$, κανονικές συντεταγμένες $x_i, p_i, i = 1, \dots, n$ και έναν δεσμό $\phi(x_i, p_i) = 0$. Η Χαμιλτονιανή του συστήματος ικανοποιεί $\{\phi, H\} = 0$. Έστω Q η συζυγής ποσότητα του ϕ , $\{Q, \phi\} = 1$. Εξηγήστε γιατί η Q δεν είναι φυσική μεταβλητή, και δείξτε ότι μπορείτε να διαλέξετε συντεταγμένες ξ^a στον καταστατικό χώρο που να ικανοποιούν $\{\xi^a, \phi\} = 0$ και η Χαμιλτονιανή να μην εξαρτάται από το Q .
11. Θεωρείστε σύστημα όπως στην παραπάνω άσκηση για $n = 2$ με $\phi = p_1^2 + p_2^2 + x_1^2 + x_2^2 - K$ και $H = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2^2 + x_1^2 - x_2^2)$. Βρείτε την ποσότητα Q και προσδιορίστε τους φυσικούς βαθμούς ελευθερίας. Τι γεωμετρικό σχήμα περιγράφουν; Πώς γράφεται η Χαμιλτονιανή;

12. Επαναλάβετε την παραπάνω άσκηση για $\phi = p_1^2 - p_2^2 + x_1^2 - x_2^2 - K$ και $H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + x_1^2 + x_2^2)$.
13. Δίνεται Λαγκρανζιανή $L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1 + q_1 q_3)^2 + \frac{1}{2}(\dot{q}_2 - q_3)^2 - \frac{1}{2}(1 + q_1^2)(1 + q_3)^2$. Προσδιορίστε όλους τους Χαμιλτονιανούς δεσμούς. Βρείτε τη γενική λύση για τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος.

5 Σχετικιστικά συστήματα

1. Η ομάδα Poicaré μπορεί να περιγραφεί από έναν πίνακα 5×5

$$(\Lambda, a) = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 & c^0 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 & c^1 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 & c^2 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 & c^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

που δρα στο διάνυσμα στήλης $(x^0, x^1, x^2, x^3, 1)$. Βρείτε τις αλγεβρικές σχέσεις που ικανοποιούν οι γεννήτορες. Επιβεβαιώστε ότι μπορούν να γραφούν ως

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}.$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = \eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu$$

2. Έστω ότι Χαμιλτονιανό σύστημα φέρει μία αναπαράσταση της ομάδας Poicaré μέσω αγγυλών Poisson. Δείξτε ότι το διάνυσμα Pauli-Lubanski $\hat{W}_\mu := \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}M^{\nu\rho}P^\sigma$ ικανοποιεί

$$\begin{aligned} \{M_{\mu\nu}, W_\rho\} &= i(\eta_{\nu\rho}W_\mu - \eta_{\mu\rho}W_\nu) \\ \{P_\mu, W_\rho\} &= 0. \end{aligned}$$

Δείξτε ότι η ποσότητα $C = W^\mu W_\mu$ ικανοποιεί $\{C, M_{\mu\nu}\} = 0$, $\{C, P_\mu\} = 0$.

3. Σωματίο μάζας m και ενέργειας E συγκρούεται με ακίνητο σώμα μάζας ηρεμίας M και σχηματίζει συσσωμάτωμα. Ποια είναι η μάζα ηρεμίας του συσσωματώματος;
4. Σωματίδιο μάζας m κινείται σε δυναμικό $V(r) = -k/r$ με σχετικιστική κινητική ενέργεια. (α) Δείξτε ότι η τροχιά δεν είναι κλειστή. (β) Υπολογίστε τη μετάπτωση του περιηλίου στο όριο $v \ll c$.
5. Θεωρήστε δράση με μεταβλητές x^μ και n για σχετικιστικό σωματίο μάζας m ,

$$S = \frac{1}{2} \int ds (n \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + n^{-1} m^2).$$

Γράψτε τη Χαμιλτονιανή και προσδιορίστε τους αντίστοιχους δεσμούς. Δείξτε ότι η δράση είναι ισοδύναμη με τη συνήθη δράση $m \int ds \sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}$ αν $m \neq 0$. Τι γίνεται αν $m = 0$;

6. Αποδείξτε την εξίσωση σχετικιστικού πυραύλου, σύμφωνα με την οποία η rapidity η δίνεται ως $\eta(\tau) - \eta(0) = \eta_e \ln[m(0)/m(\tau)]$. Βρείτε τη σχέση της rapidity η_e των καυσασερίων με την απόδοση w του κινητήρα, δηλαδή το λόγο της κινητικής ενέργειας προς την ολική ενέργεια των καυσασερίων. Η απόδοση χημικών κινητήρων είναι της τάξης του 10^{-10} , κινητήρων σχάσης του 10^{-3} και κινητήρων σύντηξης του 10^{-2} . Πόσο καύσιμο σε σχέση με τη χρήσιμη μάζα του πυραύλου θα χρειαστεί για να φτάσει κανείς τελική ταχύτητα ίση με $0,2c$ σε κάθε περίπτωση;

7. Δείξτε ότι για το σχετικιστικό πύραυλο το μέτρο της 4-επιτάχυνσης είναι $a = \eta_e |\dot{m}|/m$, όπου η παράγωγος είναι ως προς τον ιδιοχρόνο. Έστω ότι λειτουργούμε τον κινητήρα ώστε να πετύχουμε σταθερή επιτάχυνση $a = g = 10ms^{-2}$. Πόσος ιδιοχρόνος θα χρειαστεί για να πετύχουμε τελική ταχύτητα $0,2c$; Πόσος χρόνος θα έχει περάσει για τον παρατηρητή στο σύστημα της Γης και πόση απόσταση θα έχει διανύσει ο πύραυλος; Πόση θα είναι η μέγιστη ισχύς του κινητήρα; Απαντήστε τα ίδια ερωτήματα θεωρώντας ότι διατηρούμε τον κινητήρα υπό σταθερή ισχύ και ότι η μέγιστη τιμή της επιτάχυνσης είναι ίση με g .

6 Κλασικές θεωρίες πεδίου

1. Θεωρείστε Λαγκρανζιανή πυκνότητα $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 |\phi|^2 + iA^\mu (\phi \partial_\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi)$ για ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο, όπου A_μ είναι ένα εξωτερικό ηλεκτρικό δυναμικό. Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης και το ρεύμα Noether για συμμετρία αλλαγής φάσης. Στη συνέχεια υπολογίστε τη Χαμιλτονιανή.
2. Το πεδίο Proca είναι ένα διανυσματικό πεδίο A_μ , για το οποίο η Λαγκρανζιανή πυκνότητα είναι $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + m^2 A_\mu A^\mu$. Κάντε τη Χαμιλτονιανή ανάλυση του συστήματος και προσδιορίστε τους δεσμούς. Πόσοι βαθμοί ελευθερίας παραμένουν μετά την επιβολή των δεσμών;
3. Υπολογίστε τον ταυστή ενέργειας-τάσης για τον HM πεδίο. Τί όρος πρέπει να προστεθεί στη Λαγκρανζιανή για να βγαίνει συμμετρικός;
4. Θεωρείστε την ακόλουθη Λαγκρανζιανή πυκνότητα για σύστημα σε δύο χωροχρονικές διαστάσεις: $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \psi' \dot{\psi} - (\psi')^3 + \frac{1}{2} (\psi'')^2$. Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης.
5. Η Λαγκρανζιανή βαθμωτού πεδίου είναι $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \lambda \phi^p$. Για ποια τιμή του p είναι η δράση αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς κλιμάκωσης $x^\mu \rightarrow s x^\mu$ και $\phi \rightarrow s^{-\Delta} \phi$, όπου Δ σταθερά; Θεωρείστε d χωροχρονικές διαστάσεις. Ποιο είναι το ρεύμα Noether;
6. Βρείτε τις εξισώσεις πεδίου για βαθμωτό πεδίο σε καμπύλο χωροχρόνο, όπου η Λαγκρανζιανή πυκνότητα είναι $\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$. Θεωρείστε τη μετρική $g_{\mu\nu}$ ως εξωτερικό πεδίο.