

Νίκος Κόλλας

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΑ ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Πατρα, 2025

Περιεχόμενα

1 ΠΟΛΥΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

1.1	Στοιχεία πολυαδικής ανάλυσης	3
1.1.1	Γινόμενα μεταξύ πολυαδικών	7
1.1.2	Κύριες διευθύνσεις και συνιστώσες δυαδικού	12
1.1.3	Ιδιόμορφη αναπαράσταση δυαδικών	14
1.2	Καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων	15
1.2.1	Βάθμωση σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες	16
1.3	Ασκήσεις	18

2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΤΑΣΗΣ

2.1	Ο τανυστής τάσης	22
2.2	Εξισώσεις ισορροπίας	24
2.3	Τετραγωνική επιφάνειας τάσης του Cauchy	26
2.4	Κύριες συνιστώσες τανυστή τάσης	27
2.5	Μέγιστα και ελάχιστα μέτρα διατμήσεων	28
2.6	Οι κύκλοι του Mohr	30
2.6.1	Καταστάσεις επίπεδης τάσης	32
2.7	Ασκήσεις	35

3 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

3.1	Φυσική ερμηνεία τανυστή παραμόρφωσης	39
3.2	Το όριο των μικρών παραμορφώσεων	41
3.3	Η στοιχειώδης μετατόπιση	42
3.4	Κύριες διευθύνσεις τανυστή έντασης	44
3.5	Συνθήκες συμβατότητας	45
3.6	Ασκήσεις	47

4 ΚΙΝΗΣΗ ΚΑΙ ΡΟΗ

4.1 Τροχιές και γραμμές ροής	49
4.2 Η μεταφορική παράγωγος.....	51
4.3 Ρυθμός παραμόρφωσης	51
4.4 Μεταφορικές παράγωγοι όγκου και ολοκληρώματος ...	52
4.5 Εξισώσεις κίνησης.....	55
4.6 Αρχή διατήρησης μηχανική ενέργειας	56
4.7 Ασκήσεις	58

5 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

5.1 Ισότροπα υλικά	61
5.2 Ελαστοστατική και ελαστοδυναμική	63
5.3 Εγκάρσια και διαμήκη κύματα	65
5.4 Ασκήσεις	66

6 ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

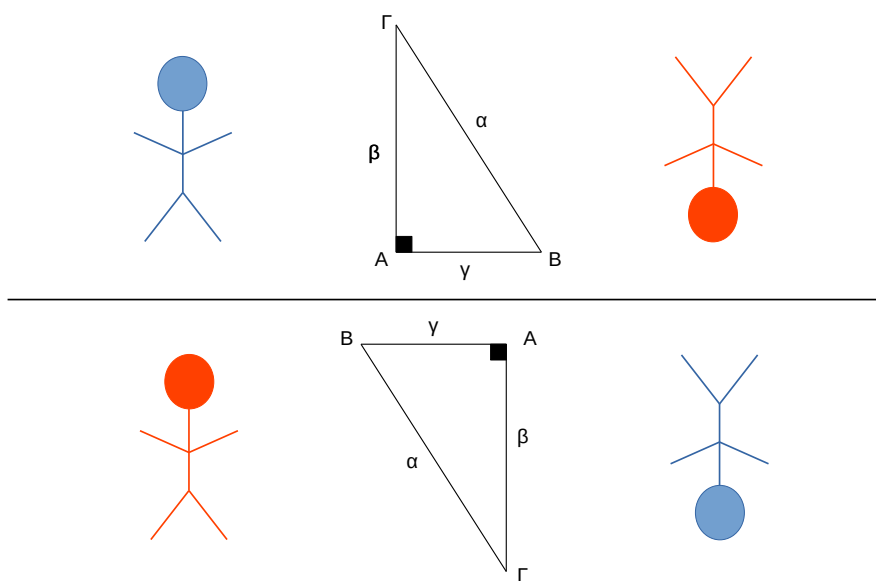
6.1 Νευτώνεια ρευστά	68
6.2 Η εξίσωση Navier-Stokes	68
6.3 Ιδανικά ρευστά	69
6.4 Εφαρμογές εξίσωσης Bernoulli	71
6.5 Προβλήματα ρευστομηχανικής	73
6.5.1 Κίνηση στερεάς σφαίρας σε ιδανικό ρευστό.....	73
6.5.2 Ακουστικά κύματα σε ιδανικά ρευστά.....	75
6.5.3 Νευτώνεια ρευστά σε κίνηση	77
6.6 Υδροστατική	79
6.6.1 Παραδείγματα ισορροπίας ρευστών	79
6.7 Ασκήσεις	82

Κεφάλαιο 1

ΠΟΛΥΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

«Οι νόμοι της φύσης είναι γραμμένοι στην γλώσσα των μαθηματικών [...] τα σύμβολα της είναι τρίγωνα κύκλοι και άλλα γεωμετρικά σχήματα χωρίς τα οποία είναι αδύνατη η κατανόησή της.»
Galileo Galilei (1564-1642)

Η παραπάνω φράση που αποδίδεται στον Γαλιλαίο υποδηλώνει μια αντικειμενική προσέγγιση της φύσης ανεξάρτητη από τον παρατηρητή. Όπως πολύ σωστά παρατήρησε η μελέτη της φύσης και των νόμων της ανάγεται ουσιαστικά στην μελέτη της γεωμετρίας (Ευκλείδειας και μη) πρωταρχικά στοιχεία της οποίας αποτελούν σημεία στον χώρο και ο τρόπος που αυτά συνδέονται μεταξύ τους. Η αντικειμενικότητα της φύσης απορρέει από το γεγονός ότι ιδιότητες των στοιχείων, όπως για παράδειγμα το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος ή η γωνία μεταξύ δύο ευθειών παραμένουν ίδιες για οποιονδήποτε παρατηρητή. Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ για παράδειγμα η γωνιά A παραμένει 90 μοίρες είτε την παρατηρώ όρθιος είτε ανάποδα κάνοντας κατακόρυφο. Η ανεξαρτησία αυτή μπορεί να μοιάζει προφανής είναι ωστόσο εξαιρετικά σημαντική καθώς εξασφαλίζει ότι διαφορετικοί παρατηρητές αντιλαμβάνονται με τον ίδιο τρόπο τα γεγονότα γύρω τους και συμφωνούν πάντοτε ως προς τις εγγενείς ιδιότητές των φαινομένων που παρατηρούν. Αυτός είναι ο λόγος που πολλές εξισώσεις στην Φυσική γράφονται



Σχήμα 1.1: Οι ιδιότητες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι αντικειμενικές ποσότητες ανεξάρτητες από τον τρόπο που κανείς το παρατηρεί. Δύο παρατηρητές με διαφορετικό προσανατολισμό μεταξύ τους, ο καθένας εφοδιασμένος με το δικό του σύστημα αναφοράς, θα συμφωνούν πάντοτε ως προς τις τιμές που παίρνουν οι γωνίες A , B και Γ και ως προς τα μήκη των πλευρών α , β , και γ του τριγώνου.

σε διανυσματική μορφή. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν ο δεύτερος Νόμος του Νεύτωνα

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

που συνδέει την δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται σε ένα υλικό σώμα με την επιτάχυνση του $\vec{a}$, οι εξισώσεις του Maxwell

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \nabla \times \vec{B} &= \mu_0(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})\end{aligned}$$

που δίνουν το ηλεκτρικό $\vec{E}$ και το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ μιας κατανομής φορτίου ρ και πυκνότητας ρεύματος $\vec{J}$ στο κενό και η εξίσωση Navier-Cauchy

$$\mu \nabla \cdot \nabla \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \vec{u} + \rho \vec{b} = 0$$

που δίνει την μετατόπιση $\vec{u}$ των υλικών σημείων ενός ελαστικού σώματος παρουσία δυνάμεων μάζας $\vec{b}$ (το ρ σε αυτή την περίπτωση είναι η πυκνότητα του σώματος). Οι συντελεστές ε_0 , μ_0 και λ , μ που εμφανίζονται στις εξισώσεις του Maxwell και στην εξίσωση Navier-Cauchy περιέχουν πληροφορία για τις ιδιότητες του χώρου μέσα στο οποίο διαδίδονται τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα και οι παραμορφώσεις του ελαστικού μεσου αντίστοιχα.

1.1 Στοιχεία πολυαδικής ανάλυσης

Η αριθμητική μελέτη της Ευκλείδειας γεωμετρίας είναι το αντικείμενο της *Αναλυτικής Γεωμετρίας*. Βασικό στοιχείο της αποτελεί η έννοια του σημείου το οποίο μπορεί να οριστεί με την βοήθεια βαθμωτών ποσοτήτων. Μια βαθμωτή ποσότητα περιγράφεται από έναν πραγματικό αριθμό $a \in \mathbb{R}$. Το σύνολο όλων των βαθμωτών ποσοτήτων εφοδιασμένων με την πράξη της πρόσθεσης ($+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) και του πολλαπλασιασμού ($\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) ορίζει ένα αλγεβρικό σώμα έτσι ώστε για κάθε $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ να ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- Προσεταιριστική ιδιότητα των πράξεων

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma), \quad (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$$

- Μεταθετική ιδιότητα

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

- Επιμεριστική ιδιότητα

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

- Ύπαρξη μηδενικού στοιχείου για την πρόσθεση

$$\exists 0 \in \mathbb{R} : \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$

- Ύπαρξη ταυτοτικού στοιχείου για τον πολλαπλασιασμό

$$\exists 1 \in \mathbb{R} : 1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$$

- Ύπαρξη αντίθετου στοιχείου για την πρόσθεση

$$\forall \alpha \exists \alpha' : \alpha + \alpha' = \alpha' + \alpha = 0$$

- Ύπαρξη αντίστροφου στοιχείου για τον πολλαπλασιασμό

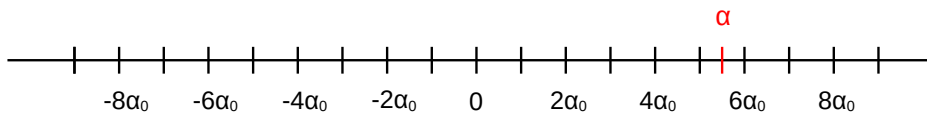
$$\forall \alpha \exists \alpha^{-1} : \alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1$$

Κάθε βαθμωτή ποσότητα μπορεί να αναπαρασταθεί γεωμετρικά πάνω σε βαθμονομημένο άξονα όπως στο Σχήμα 1.2.

Ορίζουμε τώρα ως διάνυσμα $\vec{a}$ την διάταξη τριών βαθμωτών a_1 , a_2 και a_3

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3).$$

Δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι ίσα μεταξύ τους αν και μόνο αν $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ και $a_3 = b_3$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η σειρά με την οποία διατάσσουμε τα a_i έχει σημασία έτσι ώστε διαφορετικές διατάξεις να δίνουν εν γένει διαφορετικά διανύσματα. Το σύνολο όλων των διανυσμάτων ορίζει τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$, ο οποίος είναι



Σχήμα 1.2: Γεωμετρική εικόνα του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Κάθε αριθμός a μπορεί να αναπαρασταθεί με μία μοναδική θέση πάνω στον άξονα. Παρατηρήστε ότι η βαθμονόμηση του άξονα εξαρτάται από την μονάδα μέτρησης a_0 . Με αυτόν τον τρόπο είναι δυνατή η αναπαράσταση μεγεθών με διαστάσεις όπως για παράδειγμα χρόνος, μήκος, μάζα κ.τ.λ.

εφοδιασμένος με την πράξη της πρόσθεσης μεταξύ διανυσμάτων $+: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ και του πολλαπλασιασμού (ή βάθμωση) βαθμωτού με διάνυσμα $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ έτσι ώστε για κάθε $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ και $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ αν ορίσουμε ως $(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ και $\lambda \cdot (a_1, a_2, a_3) = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \lambda \cdot a_3)$ να ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- Προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

- Μεταθετική ιδιότητα

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

- Ύπαρξη μηδενικού διανύσματος

$$\exists \vec{0} \in \mathbb{R}^3 : \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

- Ύπαρξη αντίθετου διανύσματος

$$\forall \vec{a} \exists (-\vec{a}) \in \mathbb{R}^3 : \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$$

- Συμβατότητα της βάθμωσης με τον πολλαπλασιασμό βαθμωτών

$$\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$$

- Επιμεριστική ιδιότητα της βάθμωσης και της πρόσθεσης

$$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$$

Ορίζοντας την καρτεσιανή βάση $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k} \in \mathbb{R}^3$ ως

$$\hat{i} = (1, 0, 0), \quad \hat{j} = (0, 1, 0), \quad \hat{k} = (0, 0, 1)$$

μπορούμε να γράψουμε¹

$$\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}.$$

Γενικεύοντας την έννοια του διανύσματος ορίζουμε τώρα ως *δυαδικό* A την διάταξη τριών διανυσμάτων $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ και $\vec{a}_3$

$$\begin{aligned} A &= (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \\ &= \vec{a}_1 \hat{i} + \vec{a}_2 \hat{j} + \vec{a}_3 \hat{k} \end{aligned}$$

ένα *τριαδικό* $\mathbb{A}$ ως την διάταξη τριών δυαδικών A_1, A_2 και A_3

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= (A_1, A_2, A_3) \\ &= A_1 \hat{i} + A_2 \hat{j} + A_3 \hat{k} \end{aligned}$$

ένα *τετραδικό* ως την διάταξη τριών τριαδικών και ούτω καθεξής. Ένα *τανυστικό* γινόμενο² της μορφής $\vec{a}\vec{b}$ ονομάζεται *δυάδα* έτσι ώστε ένα δυαδικό να ισούται με ένα άθροισμα δυάδων, ένα τριαδικό με ένα άθροισμα τριάδων κ.ό.κ. Ο αριθμός των διανυσμάτων που συμμετέχουν στο τανυστικό γινόμενο ορίζει και την *τάξη* του πολυαδικού (ή τανυστή). Έτσι λοιπόν η τάξη μιας βαθμωτής ποσότητας είναι 0, ενός διανύσματος 1 ενός δυαδικού 2 ενός τριαδικού 3 κ.ό.κ. Αναπτύσσοντας τα διανύσματα $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ και $\vec{a}_3$ στην καρτεσιανή βάση

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= a_{11} \hat{i} + a_{21} \hat{j} + a_{31} \hat{k} \\ \vec{a}_2 &= a_{12} \hat{i} + a_{22} \hat{j} + a_{32} \hat{k} \\ \vec{a}_3 &= a_{13} \hat{i} + a_{23} \hat{j} + a_{33} \hat{k} \end{aligned}$$

¹Σε ότι ακολουθεί θα παραλείπουμε το σύμβολο του πολλαπλασιασμού βαθμωτής ποσότητας λ με ένα διάνυσμα $\vec{a}$ και θα γράφουμε απλά $\lambda\vec{a}$.

²Το τανυστικό γινόμενο μεταξύ δύο διανυσμάτων συμβολίζεται συνήθως ως $\vec{a} \otimes \vec{b}$ το οποίο θα παραλείπουμε όμως σε ότι ακολουθεί χάριν ευκολίας.

μπορούμε να γράψουμε το δυαδικό στην *nonion*³ μορφή του

$$\begin{aligned} A = & a_{11}\hat{i}\hat{i} + a_{21}\hat{j}\hat{i} + a_{31}\hat{k}\hat{i} \\ & + a_{12}\hat{i}\hat{j} + a_{22}\hat{j}\hat{j} + a_{32}\hat{k}\hat{j} \\ & + a_{13}\hat{i}\hat{k} + a_{23}\hat{j}\hat{k} + a_{33}\hat{k}\hat{k}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για την περιγραφή ενός διανύσματος απαιτούνται εν γένει 3 πραγματικοί αριθμοί, για την περιγραφή ενός δυαδικού 3² αριθμοί κ.ό.κ. Η γενίκευση ενός πολυαδικού σε χώρους μεγαλύτερης τάξης είναι προφανής. Για την περιγραφή ενός πολυαδικού τάξης m στον $\mathbb{R}^n$ απαιτούνται n^m πραγματικοί αριθμοί⁴.

1.1.1 Γινόμενα μεταξύ πολυαδικών

Εισάγοντας τώρα τον ακόλουθο κανόνα εσωτερικού γινομένου μεταξύ των διανυσμάτων της καρτεσιανής βάσης

$$\begin{aligned} \hat{i} \cdot \hat{i} &= \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0 \end{aligned}$$

μπορούμε να προβάλλουμε ένα διάνυσμα $\vec{a}$ στην αντίστοιχη βάση και να πάρουμε την συνιστώσα του

$$a_1 = \vec{a} \cdot \hat{i}, \quad a_2 = \vec{a} \cdot \hat{j}, \quad a_3 = \vec{a} \cdot \hat{k}.$$

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$

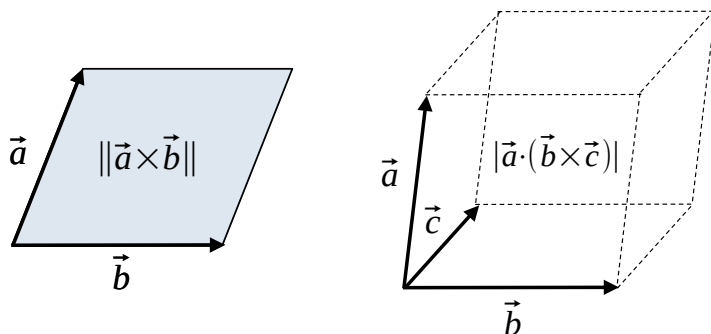
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{1.1}$$

προκύπτει εύκολα εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα. Εάν $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ τότε λέμε ότι τα διανύσματα είναι *κάθετα* μεταξύ τους. Το μήκος ενός διανύσματος $\vec{a}$ προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο με τον εαυτό του

$$\|\vec{a}\|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \tag{1.2}$$

³Από τα Αγγλικά για το εννέα.

⁴Στο σώμα των μιγαδικών αριθμών ένα πολυαδικό τάξης m στο $\mathbb{C}^n$ θα περιγράφεται από $2n^m$ πραγματικούς αριθμούς.



Σχήμα 1.3: Το εξωτερικό γινόμενο των πλευρών ενός παραλληλόγραμμου ορίζει ένα διάνυσμα, με φορά που δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού, το μέτρο του οποίου ισούται με το εμβαδό του παραλληλογράμμου. Το μικτό γινόμενο μεταξύ τριών διανυσμάτων που ορίζουν στον χώρο ένα παραλληλεπίπεδο ισούται με το εμβαδό του.

και αποτελεί την γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος στις τρεις διαστάσεις. Με την βοήθεια τώρα του ακόλουθου κανόνα εξωτερικού γινομένου μεταξύ των στοιχείων της καρτεσιανής βάσης

$$\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{j} \times \hat{i} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{j} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = -\hat{i} \times \hat{k} = \hat{j}$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

μπορούμε να ορίσουμε επιφάνειες και όγκους στον χώρο έτσι ώστε το μέτρο του διανύσματος

$$\vec{a} \times \vec{b}$$

να δίνει την επιφάνεια του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ και το μικτό γινόμενο

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

τον όγκο του παραλληλεπίπεδου που σχηματίζουν τα $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{c}$. Τρία μοναδιαία διανύσματα $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ και $\hat{e}_3$ που ικανοποιούν τις ίδιες σχέσεις εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου με τα $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ θα λέμε ότι αποτελούν ορθοκανονική βάση.

Με την βοήθεια του εσωτερικού γινομένου μπορούμε να δράσουμε μια δυάδα $\vec{a}\vec{b}$ από τα αριστερά ή τα δεξιά πάνω σε ένα διάνυσμα και να πάρουμε

$$\vec{a}\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (\text{Αριστερή δράση δυάδας})$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a}\vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} \quad (\text{Δεξιά δράση δυάδας}).$$

Εφόσον ένα δυαδικό D αποτελεί άθροισμα δυάδων η δράση του δίνεται εύκολα εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου. Οι συνιστώσες D_{ij} ενός δυαδικού σε μια τυχαία ορθοκανονική βάση $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ προκύπτουν από το διπλό εσωτερικό γινόμενο

$$D_{ij} = \hat{e}_i \cdot D \cdot \hat{e}_j.$$

Με παρόμοιο τρόπο τώρα ορίζεται και το εξωτερικό γινόμενο μεταξύ δυάδας και διανύσματος

$$\vec{a}\vec{b} \times \vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$$

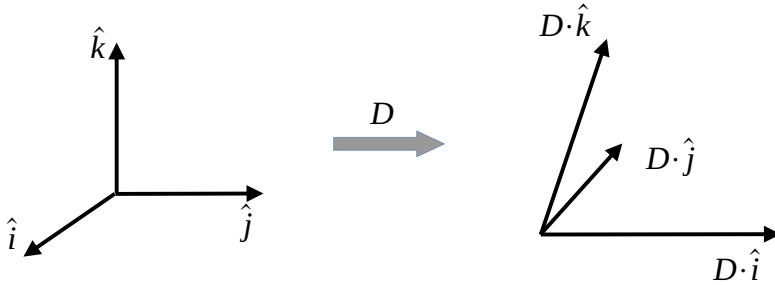
$$\vec{c} \times \vec{a}\vec{b} = (\vec{c} \times \vec{a})\vec{b}$$

και κατ'επέκταση τυχαίου δυαδικού. Παρατηρήστε ότι το εσωτερικό γινόμενο δυαδικού με διάνυσμα έχει ως αποτέλεσμα διάνυσμα ενώ το εξωτερικό δυαδικό. Οι πράξεις αυτές (που ορίζονται και μεταξύ δυαδικών) γενικεύονται περαιτέρω. Έτσι αν $\vec{c}\vec{d}$ μια δεύτερη δυάδα μπορούμε να ορίσουμε τα ακόλουθα διπλά γινόμενα

$$(\vec{a}\vec{b}) : (\vec{c}\vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}), \quad (\vec{a}\vec{b}) \times (\vec{c}\vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \times \vec{c})$$

$$(\vec{a}\vec{b}) \times (\vec{c}\vec{d}) = (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \times \vec{d}), \quad (\vec{a}\vec{b}) \times (\vec{c}\vec{d}) = (\vec{b} \times \vec{c})(\vec{a} \times \vec{d})$$

όπου η σειρά των πράξεων από πάνω προς τα κάτω εφαρμόζεται πρώτα μεταξύ των εσωτερικών διανυσμάτων των δύο δυαδικών και έπειτα μεταξύ των εξωτερικών για να δώσουν ένα βαθμωτό (στην περίπτωση του διπλού εσωτερικού γινομένου) ένα διανυσματικό (στην περίπτωση των εσωτερικών-εξωτερικών γινομένων) και ένα δυαδικό (στην περίπτωση του διπλού εξωτερικού γινομένου) μέγεθος αντίστοιχα. Η γενίκευση για τυχαία δυαδικά επιτυγχάνεται



Σχήμα 1.4: Η δράση ενός δυαδικού D στον χώρο $\mathbb{R}^3$ αντιστοιχεί τα διανύσματα βάσης $\hat{i}$, $\hat{j}$ και $\hat{k}$ στα $D \cdot \hat{i}$, $D \cdot \hat{j}$ και $D \cdot \hat{k}$ παραμορφώνοντάς τον.

όπως και πριν από την επιμεριστική ιδιότητα των πράξεων μεταξύ δυάδων.

Η δράση ενός δυαδικού μπορεί να αναπαρασταθεί γεωμετρικά ως μία παραμόρφωση στον χώρο που ορίζεται από τα διανύσματα $D \cdot \hat{i}$, $D \cdot \hat{j}$ και $D \cdot \hat{k}$ (Σχήμα 1.4). Ένα δυαδικό της μορφής

$$D = \vec{a}_1 \vec{b}_1 + \vec{a}_2 \vec{b}_2 + \vec{a}_3 \vec{b}_3$$

θα ονομάζεται *πλήρες* όταν τα $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ και $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (απεικονίζει δηλαδή ολόκληρο τον $\mathbb{R}^3$ στον $\mathbb{R}^3$), *επίπεδο* όταν $\vec{a}_3 = 0$ (σε αυτή την περίπτωση απεικονίζει το επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{b}_1$ και $\vec{b}_2$ στο επίπεδο που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{a}_1$ και $\vec{a}_2$) και *γραμμικό* όταν $\vec{a}_2 = \vec{a}_3 = 0$. Το δυαδικό

$$D^T = \vec{b}_1 \vec{a}_1 + \vec{b}_2 \vec{a}_2 + \vec{b}_3 \vec{a}_3$$

ονομάζεται *ανάστροφο* δυαδικό του D . Εάν $D^T = D$ το δυαδικό ονομάζεται *συμμετρικό* και *αντισυμμετρικό* όταν $D^T = -D$. Αποδεικνύεται ότι κάθε δυαδικό μπορεί να γραφεί μοναδικά ως το άθροισμα ενός συμμετρικού δυαδικού S και ενός αντισυμμετρικού δυαδικού A , όπου

$$S = \frac{1}{2}(D + D^T) \quad \text{και} \quad A = \frac{1}{2}(D - D^T).$$

Το ταυτοτικό δυαδικό $\mathbb{I}$ δίνεται από την σχέση

$$\mathbb{I} = \hat{e}_1\hat{e}_1 + \hat{e}_2\hat{e}_2 + \hat{e}_3\hat{e}_3,$$

όπου $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ και $\hat{e}_3$ ορθοκανονική βάση (Άσκηση 1.5). Έστω τώρα το δυαδικό

$$\tilde{D} = (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) + (\vec{b}_2 \times \vec{b}_3)(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) + (\vec{b}_3 \times \vec{b}_1)(\vec{a}_3 \times \vec{a}_1).$$

Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο του D με το $\tilde{D}$ προκύπτει

$$D \cdot \tilde{D} = \vec{b}_1 \cdot (\vec{b}_2 \times \vec{b}_3) [\vec{a}_1(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) + \vec{a}_2(\vec{a}_3 \times \vec{a}_1) + \vec{a}_3(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)]$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την κυκλική ιδιότητα του μικτού γινομένου

$$\vec{b}_1 \cdot (\vec{b}_2 \times \vec{b}_3) = \vec{b}_2 \cdot (\vec{b}_3 \times \vec{b}_1) = \vec{b}_3 \cdot (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)$$

(Άσκηση 1.1). Όμως

$$\vec{a}_1(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) + \vec{a}_2(\vec{a}_3 \times \vec{a}_1) + \vec{a}_3(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)\mathbb{I}$$

(Άσκηση 1.6) και επομένως τελικά

$$D \cdot \tilde{D} = [\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)][\vec{b}_1 \cdot (\vec{b}_2 \times \vec{b}_3)]\mathbb{I}.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το δυαδικό $\tilde{D} = \text{adj}(D)$ είναι ο συζυγο-ανάστροφος του D και το $\det(D) = [\vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)][\vec{b}_1 \cdot (\vec{b}_2 \times \vec{b}_3)]$ η ορίζουσά του. Όταν η ορίζουσα είναι διάφορη του μηδενός ορίζεται το αντίστροφο δυαδικό

$$D^{-1} = \frac{\tilde{D}}{\det(D)}$$

έτσι ώστε να ισχύει $D \cdot D^{-1} = D^{-1} \cdot D = \mathbb{I}$. Επισημαίνεται ότι η ορίζουσα είναι μια αναλλοίωτη βαθμωτή ποσότητα (παίρνει δηλαδή την ίδια τιμή σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων), άλλη τέτοια ποσότητα είναι το ίχνος του δυαδικού που ορίζεται από την σχέση

$$\text{tr}(D) = \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 + \vec{a}_3 \cdot \vec{b}_3.$$

1.1.2 Κύριες διευθύνσεις και συνιστώσες δυαδικού

Για κάθε συμμετρικό δυαδικό T υπάρχει διεύθυνση στον χώρο τέτοια ώστε η δράση του δυαδικού πάνω σε οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{x}$ στην ίδια διεύθυνση να ισούται με την βάθμωσή του κατά $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\vec{x} \cdot T = T \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}.$$

Η διεύθυνση που ορίζει το $\vec{x}$ ονομάζεται *κύρια διεύθυνση* του T και το λ *κύρια συνιστώσα* της. Αφαιρώντας την εξίσωση κατά μέλη μπορούμε να την φέρουμε στην εξής μορφή

$$(T - \lambda \mathbb{I}) \cdot \vec{x}$$

η οποία έχει μη μηδενικές λύσεις όταν ισχύει $\det(T - \lambda \mathbb{I}) = 0$. Γράφοντας

$$T = \hat{i}\vec{t}_1 + \hat{j}\vec{t}_2 + \hat{k}\vec{t}_3$$

βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \det(T - \lambda \mathbb{I}) &= \det(\hat{i}(\vec{t}_1 - \lambda \hat{i}) + \hat{j}(\vec{t}_2 - \lambda \hat{j}) + \hat{k}(\vec{t}_3 - \lambda \hat{k})) \\ &= [\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k})](\vec{t}_1 - \lambda \hat{i}) \cdot [(\vec{t}_2 - \lambda \hat{j}) \times (\vec{t}_3 - \lambda \hat{k})] \\ &= (\vec{t}_1 - \lambda \hat{i}) \cdot (\vec{t}_2 \times \vec{t}_3 - \lambda \vec{t}_2 \times \hat{k} - \lambda \hat{j} \times \vec{t}_3 + \lambda^2 \hat{i}) \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2(\vec{t}_1 \cdot \hat{i} + \vec{t}_2 \cdot \hat{j} + \vec{t}_3 \cdot \hat{k}) \\ &\quad - \lambda[\hat{i} \cdot (\vec{t}_2 \times \vec{t}_3) + \hat{j} \cdot (\vec{t}_3 \times \vec{t}_1) + \hat{k} \cdot (\vec{t}_1 \times \vec{t}_2)] + \vec{t}_1 \cdot (\vec{t}_2 \times \vec{t}_3). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε όμως ότι

$$\begin{aligned} \det(T) &= \vec{t}_1 \cdot (\vec{t}_2 \times \vec{t}_3) \\ \text{tr}(T) &= \vec{t}_1 \cdot \hat{i} + \vec{t}_2 \cdot \hat{j} + \vec{t}_3 \cdot \hat{k} \end{aligned}$$

και

$$\text{tr}(\text{adj}(T)) = \hat{i} \cdot (\vec{t}_2 \times \vec{t}_3) + \hat{j} \cdot (\vec{t}_3 \times \vec{t}_1) + \hat{k} \cdot (\vec{t}_1 \times \vec{t}_2)$$

επομένως οι κύριες συνιστώσες του δυαδικού T δίνονται από την επίλυση της τριτοβάθμιας χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\lambda^3 - \lambda^2 \text{tr}(T) + \lambda \text{tr}(\text{adj}(T)) - \det(T) = 0.$$

Όταν οι λύσεις της εξίσωσης $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους ισχύει ότι

$$\vec{x}_i \cdot (T \cdot \vec{x}_j) = \lambda_j \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j$$

και

$$\vec{x}_j \cdot (T \cdot \vec{x}_i) = \lambda_i \vec{x}_j \cdot \vec{x}_i.$$

Τα αριστερά μέλη όμως για ένα συμμετρικό δυαδικό είναι ίσα μεταξύ τους (Άσκηση 1.7) και επομένως αν $i \neq j$ τα διανύσματα $\vec{x}_i$ και $\vec{x}_j$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Το δυαδικό σε αυτή την περίπτωση μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$T = \lambda_1 \hat{x}_1 \hat{x}_1 + \lambda_2 \hat{x}_2 \hat{x}_2 + \lambda_3 \hat{x}_3 \hat{x}_3$$

όπου $\hat{x}_i = \vec{x}/\|\vec{x}\|$ ορθοκανονική βάση. Εάν $\lambda_i = \lambda_j$ τότε οποιοδήποτε διάνυσμα στο επίπεδο που ορίζεται από τα $\hat{x}_i$ και $\hat{x}_j$ αποτελεί κύρια διεύθυνση. Στην ειδική περίπτωση όπου $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ τότε $T = \lambda \mathbb{I}$.

Προκύπτει εύκολα ότι

$$T^n = \lambda_1^n \hat{x}_1 \hat{x}_1 + \lambda_2^n \hat{x}_2 \hat{x}_2 + \lambda_3^n \hat{x}_3 \hat{x}_3,$$

και επομένως το ίδιο το δυαδικό ικανοποιεί την χαρακτηριστική του εξίσωση

$$T^3 - T^2 \text{tr}(T) + T \text{tr}(\text{adj}(T)) - \det(T) \mathbb{I} = 0.$$

Με την βοήθεια της παραπάνω εξίσωσης, που είναι γνωστή ως εξίσωση *Cayley Hamilton*, οποιαδήποτε δύναμη ενός δυαδικού T^n προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός των T^2, T και $\mathbb{I}$ με συντελεστές που εξαρτώνται από τα

$$\text{tr}(T) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$\text{tr}(\text{adj}(T)) = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1$$

και

$$\det(T) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3.$$

1.1.3 Ιδιόμορφη αναπαράσταση δυαδικών

Για τυχόν δυαδικό D παρατηρούμε ότι τα δυαδικά $D^T \cdot D$ και $D \cdot D^T$ είναι συμμετρικά. Εάν το D είναι πλήρες ισχύει ότι

$$D \cdot D^T = D \cdot (D^T \cdot D) \cdot (D)^{-1}.$$

Τα δύο δυαδικά επομένως είναι όμοια μεταξύ τους και έχουν τις ίδιες κύριες συνιστώσες (Άσκηση 1.9). Γράφοντας

$$D \cdot D^T = \lambda_1^2 \hat{x}_1 \hat{x}_1 + \lambda_2^2 \hat{x}_2 \hat{x}_2 + \lambda_3^2 \hat{x}_3 \hat{x}_3$$

και

$$D^T \cdot D = \lambda_1^2 \hat{y}_1 \hat{y}_1 + \lambda_2^2 \hat{y}_2 \hat{y}_2 + \lambda_3^2 \hat{y}_3 \hat{y}_3$$

παρατηρούμε ότι οι δύο εξισώσεις θα ικανοποιούνται πάντα εάν θέσουμε

$$D = \lambda_1 \hat{x}_1 \hat{y}_1 + \lambda_2 \hat{x}_2 \hat{y}_2 + \lambda_3 \hat{x}_3 \hat{y}_3.$$

Ορίζοντας τώρα ως

$$R_1 = \hat{x}_1 \hat{z}_1 + \hat{x}_2 \hat{z}_2 + \hat{x}_3 \hat{z}_3$$

την περιστροφή από μια τυχαία ορθοκανονική βάση $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3$ στην βάση $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3$ και

$$R_2 = \hat{z}_1 \hat{y}_1 + \hat{z}_2 \hat{y}_2 + \hat{z}_3 \hat{y}_3$$

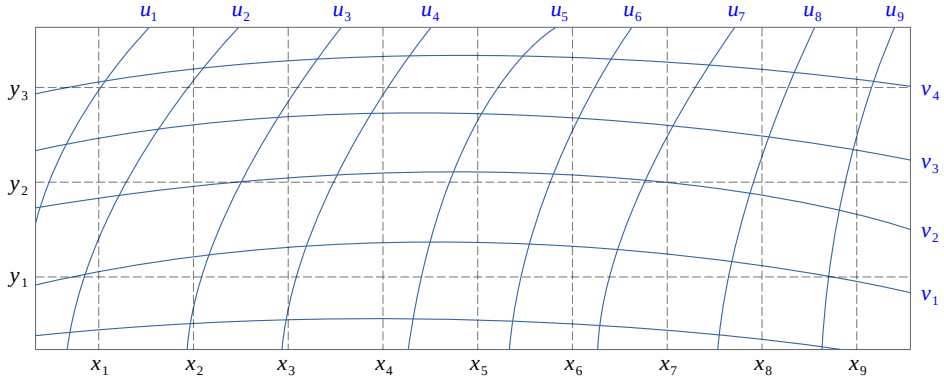
την περιστροφή από την βάση $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3$ στην $\hat{z}_1, \hat{z}_2, \hat{z}_3$ παρατηρούμε ότι οποιοδήποτε δυαδικό μπορεί να αναπαρασταθεί ως γινόμενο περιστροφών με έναν συμμετρικό πίνακα M

$$D = R_1 \cdot M \cdot R_2$$

όπου $M = \lambda_1 \hat{z}_1 \hat{z}_1 + \lambda_2 \hat{z}_2 \hat{z}_2 + \lambda_3 \hat{z}_3 \hat{z}_3$. Η αναπαράσταση αυτή που ονομάζεται *ιδιόμορφη* δεν είναι μοναδική καθώς εξαρτάται από την αυθαίρετη επιλογή της βάσης $\hat{z}_i$. Εφ'όσον ισχύει

$$D \cdot \hat{y}_i = \lambda_i \hat{y}_i, \quad \text{και} \quad \hat{x}_i \cdot D = \lambda_i \hat{x}_i$$

τα $\hat{y}_i$ ονομάζονται δεξιές κύριες διευθύνσεις του D και τα $\hat{x}_i$ αριστερές κύριες διευθύνσεις με ιδιόμορφες τιμές λ_i αντίστοιχα.



Σχήμα 1.5: Οποιοδήποτε σημείο στο επίπεδο μπορεί να αναπαρασταθεί είτε σε καρτεσιανές είτε σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες. Για να συμβαίνει αυτό κατά μοναδικό τρόπο θα πρέπει από κάθε σημείο να περνά ένα και μόνο ζευγάρι συντεταγμένων καμπυλών u_i και v_j . Σε αυτή την περίπτωση οι καρτεσιανές συντεταγμένες x και y εκφράζονται ως συναρτήσεις των u και v .

1.2 Καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων

Έστω u, v, w καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων τέτοιο ώστε οι καρτεσιανές συνιστώσες ενός διανύσματος $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ να εκφράζονται σαν συναρτήσεις των u, v, w

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w).$$

Ορίζουμε τώρα τα εφαπτομενικά διανύσματα

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \hat{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \hat{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = \frac{\partial x}{\partial w} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial w} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial w} \hat{k}$$

εάν $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = 0$, τότε τα αντίστοιχα μοναδιαία διανύσματα

$$\hat{u} = \frac{1}{h_u} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \hat{v} = \frac{1}{h_v} \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \quad \hat{w} = \frac{1}{h_w} \frac{\partial \vec{r}}{\partial w},$$

όπου $h_u = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\|$, $h_\nu = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \nu} \right\|$ και $h_w = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \right\|$, αποτελούν ορθοκανονική βάση στο σημείο $\vec{r}$.

Η στοιχειώδης μετατόπιση $d\vec{r}$ υπολογίζεται εύκολα από την σχέση

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k} \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial \nu} d\nu + \frac{\partial x}{\partial w} dw \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial \nu} d\nu + \frac{\partial y}{\partial w} dw \right) \hat{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial \nu} d\nu + \frac{\partial z}{\partial w} dw \right) \hat{k} \\ &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \nu} d\nu + \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} dw \\ &= h_u du \hat{u} + h_\nu d\nu \hat{\nu} + h_w dw \hat{w} \end{aligned}$$

το μήκος της οποίας ισούται με

$$\|d\vec{r}\|^2 = h_u^2 (du)^2 + h_\nu^2 (d\nu)^2 + h_w^2 (dw)^2.$$

Παίρνοντας κατάλληλα εξωτερικά γινόμενα της στοιχειώδης μετατόπισης στην διεύθυνση των $\hat{u}$, $\hat{\nu}$ και $\hat{w}$ προκύπτουν οι εξής στοιχειώδεις επιφάνειες

$$\begin{aligned} dS_w &= (h_u du \hat{u}) \times (h_\nu d\nu \hat{\nu}) = h_u h_\nu du d\nu \hat{w} \quad (\text{Στ. επ. στο επίπεδο } \hat{u}-\hat{\nu}) \\ dS_u &= (h_\nu d\nu \hat{\nu}) \times (h_w dw \hat{w}) = h_\nu h_w d\nu dw \hat{u} \quad (\text{Στ. επ. στο επίπεδο } \hat{\nu}-\hat{w}) \\ dS_\nu &= (h_w dw \hat{w}) \times (h_u du \hat{u}) = h_w h_u dw du \hat{\nu} \quad (\text{Στ. επ. στο επίπεδο } \hat{w}-\hat{u}), \end{aligned}$$

και ο στοιχειώδης όγκος από το μικτό γινόμενο

$$dV = (h_u du \hat{u}) \cdot [(h_\nu d\nu \hat{\nu}) \times (h_w dw \hat{w})] = h_u h_\nu h_w du d\nu dw.$$

1.2.1 Βάθμωση σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες

Έστω

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

η βάθμωση σε καρτεσιανή μορφή. Από τον κανόνα της αλυσίδας για τις μερικές παραγώγους προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \cdot \nabla \\ \frac{\partial}{\partial v} &= \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \cdot \nabla \\ \frac{\partial}{\partial w} &= \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \cdot \nabla.\end{aligned}$$

Εφ'όσον όμως $\mathbb{I} = \hat{u}\hat{u} + \hat{v}\hat{v} + \hat{w}\hat{w}$

$$\begin{aligned}\nabla &= \mathbb{I} \cdot \nabla = \hat{u}(\hat{u} \cdot \nabla) + \hat{v}(\hat{v} \cdot \nabla) + \hat{w}(\hat{w} \cdot \nabla) \\ &= \frac{\hat{u}}{h_u} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\hat{v}}{h_v} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\hat{w}}{h_w} \frac{\partial}{\partial w}\end{aligned}$$

που δεν είναι τίποτα άλλο παρά η έκφραση της βάθμωσης σε καμπυλόγραμμαμες συντεταγμένες. Στην γενική περίπτωση τα διανύσματα βάσης δεν είναι σταθερά αλλά μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο, ο υπολογισμός της απόκλισης και του στροβιλισμού σε τυχαίο διάνυσμα απαιτεί επομένως την γνώση της απόκλισης και του στροβιλισμού στα διανύσματα της βάσης έτσι ώστε αν $\vec{f} = f_u \hat{u} + f_v \hat{v} + f_w \hat{w}$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{f} &= (\hat{u} \cdot \nabla) f_u + (\hat{v} \cdot \nabla) f_v + (\hat{w} \cdot \nabla) f_w \\ &\quad + (\nabla \cdot \hat{u}) f_u + (\nabla \cdot \hat{v}) f_v + (\nabla \cdot \hat{w}) f_w\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{f} &= (\nabla f_u) \times \hat{u} + (\nabla f_v) \times \hat{v} + (\nabla f_w) \times \hat{w} \\ &= f_u \nabla \times \hat{u} + f_v \nabla \times \hat{v} + f_w \nabla \times \hat{w}.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το $\vec{f}$ με ∇ στον τύπο της απόκλισης βρίσκουμε την έκφραση της Λαπλασιανής σε καμπυλόγραμμαμες συντεταγμένες

$$\begin{aligned}\Delta &= [(\hat{u} \cdot \nabla) + (\nabla \cdot \hat{u})](\hat{u} \cdot \nabla) + [(\hat{v} \cdot \nabla) + (\nabla \cdot \hat{v})](\hat{v} \cdot \nabla) \\ &\quad + [(\hat{w} \cdot \nabla) + (\nabla \cdot \hat{w})](\hat{w} \cdot \nabla).\end{aligned}$$

1.3 Ασκήσεις

Άσκηση 1.1. Από τους κανόνες εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου προκύπτει εύκολα ότι

$$\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) = \hat{j} \cdot (\hat{k} \times \hat{i}) = \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j}).$$

Με βάση αυτό αποδείξτε την ιδιότητα της κυκλικής μετάθεσης του μικτού γινομένου τριών διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Μπορείτε να δώσετε μια γεωμετρική εξήγηση για την παραπάνω σχέση; (Συμβουλευτείτε το Σχ. 1.3).

Άσκηση 1.2. Αποδείξτε ότι αν τρία διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{c}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε ισχύει

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0.$$

Τσεκάρετε κατά πόσο τα διανύσματα

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} \\ \vec{b} &= 4\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} \\ \vec{c} &= \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}\end{aligned}$$

είναι γραμμικώς εξαρτημένα, εάν ναι εκφράστε το ένα συναρτήσει των άλλων.

Άσκηση 1.3. Δείξτε ότι οποιοδήποτε δυαδικό D μπορεί πάντα να γραφεί ισοδύναμα ως

$$D = \vec{a}_1 \hat{e}_1 + \vec{a}_2 \hat{e}_2 + \vec{a}_3 \hat{e}_3 \quad \text{και} \quad D = \hat{e}_1 \vec{b}_1 + \hat{e}_2 \vec{b}_2 + \hat{e}_3 \vec{b}_3,$$

οπου $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ και $\hat{e}_3$ τυχαία ορθοκανονική βάση.

Άσκηση 1.4. Υπολογίστε τα διπλά γινόμενα $F \cdot \cdot D$, $F \times \cdot D$, $F \cdot \times D$ και $F \times \times D$ για τα δυαδικά

$$F = 4\hat{i}\hat{k} + 6\hat{j}\hat{j} - 3\hat{k}\hat{j} + \hat{k}\hat{k}$$

και

$$D = 3\hat{i}\hat{i} + 2\hat{j}\hat{j} - \hat{j}\hat{k} + 5\hat{k}\hat{k}.$$

Άσκηση 1.5. Αποδείξτε ότι αν τα διανύσματα $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ και $\hat{e}_3$ αποτελούν ορθοκανονική βάση τότε το δυαδικό που ορίζεται από την σχέση

$$\mathbb{I} = \hat{e}_1\hat{e}_1 + \hat{e}_2\hat{e}_2 + \hat{e}_3\hat{e}_3$$

είναι ο ταυτοτικός τελεστής. Ισχύει δηλ $\mathbb{I} \cdot \mathbb{I} = \mathbb{I}$ και $\mathbb{I} \cdot \Sigma = \Sigma$, $\mathbb{I} \cdot \vec{a}$ για κάθε δυαδικό Σ και διάνυσμα $\vec{a}$.

Άσκηση 1.6. Αποδείξτε την ακόλουθη σχέση

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{d} (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \cdot \vec{d} (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \cdot \vec{d} (\vec{a} \times \vec{b}).$$

(Χρησιμοποιείστε τον τύπο για το τριπλό εξωτερικό γινόμενο και υπολογίστε το $\vec{a} \cdot [(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{d}]$ δύο φορές, μία κάνοντας πρώτα τις πράξεις που βρίσκονται μες στην αγκύλη και μία θέτοντας το $\vec{b} \times \vec{c}$ ως ένα ξεχωριστό διάνυσμα $\vec{u}$). Δείξτε τώρα ότι

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \mathbb{I} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Άσκηση 1.7. Εάν T συμμετρικό δυαδικό, αποδείξτε την ακόλουθη σχέση

$$\vec{a} \cdot T \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot T \cdot \vec{a}.$$

Άσκηση 1.8. Αποδείξτε την ακόλουθη σχέση για την ορίζουσα του γινομένου δύο τυχαίων δυαδικών F και D

$$\det(F \cdot D) = \det(F) \det(D).$$

Άσκηση 1.9. Εάν F πλήρες δυαδικό τότε λέμε ότι τα δυαδικά D και $F \cdot D \cdot F^{-1}$ είναι όμοια μεταξύ τους. Αποδείξτε ότι οι κύριες συνιστώσες ενός συμμετρικού δυαδικού T και του δυαδικού $F \cdot T \cdot F^{-1}$ είναι οι ίδιες. (Αρκεί να δείξετε ότι οι συντελεστές της χαρακτηριστικής εξίσωσης και στις δύο περιπτώσεις είναι οι ίδιοι.)

Άσκηση 1.10. Αποδείξτε τις ακόλουθες σχέσεις για το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$

$$\nabla \cdot \vec{r} = 3, \quad \nabla \times \vec{r} = 0, \quad \nabla \vec{r} = \mathbb{I}.$$

Άσκηση 1.11. Δείξτε ότι για συνάρτηση f και διάνυσμα $\vec{a}$

$$\nabla \cdot (f\vec{a}) = f(\nabla \cdot \vec{a}) + (\nabla f) \cdot \vec{a}$$

και

$$\nabla \times (f\vec{a}) = f(\nabla \times \vec{a}) + (\nabla f) \times \vec{a}.$$

Χρησιμοποιείτε αυτές τις σχέσεις για να αναπαράγετε τους τύπους της απόκλισης και του στροβιλισμού διανύσματος καθώς επίσης και της Λαπλασιανής σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες.

Άσκηση 1.12. Εφαρμόστε τους τύπους της απόκλισης, στροβιλισμού και της Λαπλασιανής σε σφαιρικές και κυλινδρικές συντεταγμένες.

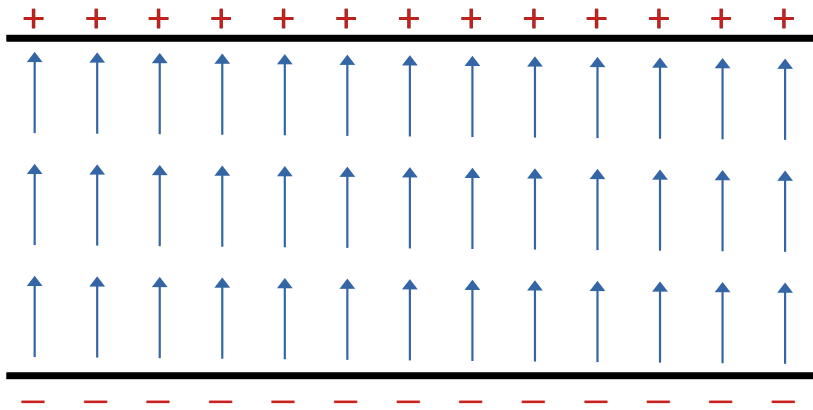
Κεφάλαιο 2

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΤΑΣΗΣ

Οι νόμοι που περιγράφουν την συμπεριφορά μακροσκοπικών συστημάτων, στο πλείστον των περιπτώσεων, είναι ανεξάρτητοι από την μικροσκοπική τους δομή. Για να περιγραφεί η θερμοδυναμική συμπεριφορά ενός ιδανικού αερίου για παράδειγμα απαιτούνται μόνο τρεις αριθμοί: η πίεση, ο όγκος που αυτό καταλαμβάνει στον χώρο και η θερμοκρασία του αερίου. Παρά το γεγονός ότι το αέριο αποτελείται από άτομα η χωρική και χρονική κλίμακα για την οποία ενδιαφερόμαστε είναι κατά πολλές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από τις αντίστοιχες κλίμακες της ατομικής φυσικής έτσι ώστε να μπορούμε να αγνοούμε με ασφάλεια φαινόμενα όπως τις πυρηνικές δυνάμεις που συγκρατούν τα κουάρκ στον πυρήνα ενός ατόμου ή τις διεγέρσεις και αποδιεγέρσεις των ηλεκτρονίων του. Με παρόμοιο τρόπο όταν οι διαστάσεις ενός υλικού είναι κατά πολύ μεγαλύτερες από το τυπικό μέγεθος ενός ατόμου μπορούμε να συμπεριφερθούμε σε αυτό σαν να αποτελείται από ένα συνεχές και απείρως διαιρέσιμο κομμάτι. Η παραδοχή αυτή είναι η βασική παραδοχή της μηχανικής του συνεχούς μέσου. Οι φυσικές ποσότητες που περιγράφουν το υλικό σε αυτή την περίπτωση αποτελούν πεδία με διαφορετικές, εν γένει, τιμές στα διάφορα σημεία του χώρου.

Ένα υλικό στο οποίο οι φυσικές ποσότητες είναι ανεξάρτητες της θέσης ονομάζεται ομογενές ενώ ένα υλικό στο οποίο οι ποσότητες έχουν την ίδια τιμή σε κάθε διεύθυνση ονομάζεται ισότροπο. Η ομογένεια δεν συνεπάγεται απαραίτητα την ισοτροπία. Το ηλε-

κτρικό πεδίο το οποίο αναπτύσσεται ανάμεσα στις πλάκες ενός πυκνωτή για παράδειγμα είναι ομογενές καθώς έχει το ίδιο μέτρο και διεύθυνση σε κάθε σημείο μεταξύ των πλακών του δεν είναι όμως ισότροπο (έχει προτιμητέα διεύθυνση κάθετη στις πλάκες).

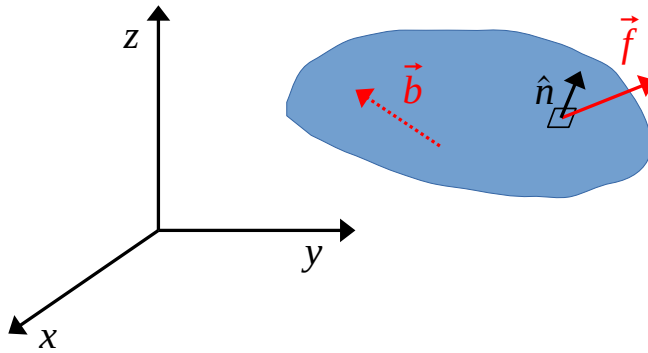


Σχήμα 2.1: Το ομογενές πεδίο που αναπτύσσεται στα άκρα ενός πυκνωτή είναι ένα παράδειγμα μιας ομογενούς αλλά μη ισότροπης ποσότητας.

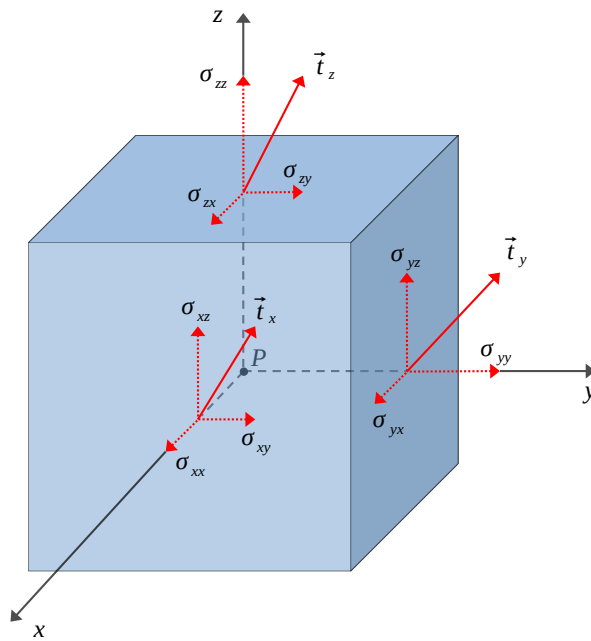
Οι δυνάμεις που ασκούνται σε τυχόν υλικό σώμα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Τις δυνάμεις μάζας $\vec{b}$, με μονάδες μέτρησης δύναμης ανά μονάδα μάζας $[F]/[M]$, και τις επιφανειακές δυνάμεις, με μονάδες μέτρησης δύναμης ανά μονάδα επιφάνειας $[F]/[L]^2$, (Σχήμα 2.2). Παραδείγματα δυνάμεων μάζας αποτελούν η δύναμη της βαρύτητας και οι δυνάμεις αδράνειας. Η πίεση και η διατμητική τάση που ασκείται σε μία στοιχειώδη επιφάνεια αποτελούν παραδείγματα επιφανειακών δυνάμεων.

2.1 Ο τανυστής τάσης

Οι επιφανειακές δυνάμεις που ασκούνται στις έδρες ενός στοιχειώδους όγκου γύρω από κάποιο σημείο P του χώρου ορίζουν την κατάσταση τάσης του υλικού στο σημείο αυτό (Σχήμα 2.3). Αναλύοντας τις επιφανειακές δυνάμεις $\vec{t}_x$, $\vec{t}_y$ και $\vec{t}_z$ στην καρτεσιανή βάση



Σχήμα 2.2: Δυνάμεις που ασκούνται σε ένα συνεχές σώμα. Δυνάμεις μάζας, $\vec{b}$ και επιφανειακές δυνάμεις $\vec{f}$.



Σχήμα 2.3: Η κατάσταση τάσης στις έδρες ενός στοιχειώδους όγκου.

$\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ έχουμε

$$\vec{t}_x = \sigma_{xx}\hat{i} + \sigma_{xy}\hat{j} + \sigma_{xz}\hat{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{t}_y &= \sigma_{yx}\hat{i} + \sigma_{yy}\hat{j} + \sigma_{yz}\hat{k} \\ \vec{t}_z &= \sigma_{zx}\hat{i} + \sigma_{zy}\hat{j} + \sigma_{zz}\hat{k}.\end{aligned}$$

Ορίζουμε τώρα τον ακόλουθο τανυστή τάσης

$$\Sigma = \hat{i}\vec{t}_x + \hat{j}\vec{t}_y + \hat{k}\vec{t}_z.$$

Οι επιφανειακές δυνάμεις προκύπτουν από την δεξιά δράση του τανυστή τάσης επάνω στο αντίστοιχο επιφανειακό διάνυσμα

$$\vec{t}_x = \hat{i} \cdot \Sigma, \quad \vec{t}_y = \hat{j} \cdot \Sigma, \quad \vec{t}_z = \hat{k} \cdot \Sigma.$$

Η τάση που ασκείται πάνω σε τυχαία στοιχειώδη επιφάνεια dS με μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}$ κάθετο σε αυτήν δίνεται από την σχέση

$$\vec{t}_{\hat{n}} = \hat{n} \cdot \Sigma.$$

Αναλύουμε τώρα την τάση στην διεύθυνση του $\hat{n}$ και σε μία, κάθετη, διεύθυνση $\hat{n}_{\perp}$ εφαπτομενική στην επιφάνεια

$$\vec{t}_{\hat{n}} = \sigma_N \hat{n} + \sigma_S \hat{n}_{\perp}.$$

Η προβολή της τάσης στο διάνυσμα $\hat{n}$ δίνει την τιμή της πίεσης

$$\sigma_N = \vec{t}_{\hat{n}} \cdot \hat{n} = \hat{n} \cdot \Sigma \cdot \hat{n},$$

που ασκείται κάθετα στην στοιχειώδη επιφάνεια ενώ η προβολή στην διεύθυνση $\hat{n}_{\perp}$ την διατμητική τάση

$$\sigma_S = \vec{t}_{\hat{n}} \cdot \hat{n}_{\perp} = \hat{n} \cdot \Sigma \cdot \hat{n}_{\perp}$$

που ασκείται παράλληλα στην επιφάνεια στο σημείο αυτό. Τα διαγώνια στοιχεία του τανυστή τάσης επομένως δίνουν την πίεση που ασκείται στην αντίστοιχη διεύθυνση ενώ τα μη διαγώνια στοιχεία τις συνιστώσες της διάτμησης.

2.2 Εξισώσεις ισορροπίας

Για ένα υλικό μέσο που ισορροπεί το άθροισμα των δυνάμεων που του ασκούνται και των ροπών που αυτές προκαλούν θα πρέπει

να ισούται με μηδέν. Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τις μεταφορικές κινήσεις προκύπτει

$$\oint_{\partial V} \vec{t}_{\hat{n}} dS + \int_V \rho \vec{b} dV = 0$$

όπου ρ η πυκνότητά του υλικού, V ο όγκος του και ∂V το σύνορο που καθορίζει την επιφάνειά του. Εφόσον $\vec{t}_{\hat{n}} = \hat{n} \cdot \Sigma$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Gauss και να μετατρέψουμε το κλειστό επιφανειακό ολοκλήρωμα σε ολοκλήρωμα όγκου για το $\nabla \cdot \Sigma$. Προκύπτει λοιπόν

$$\int_V (\nabla \cdot \Sigma + \rho \vec{b}) dV = 0.$$

Εφόσον η εξίσωση αυτή ισχύει για κάθε δυνατό όγκο V θα πρέπει

$$\nabla \cdot \Sigma + \rho \vec{b} = 0,$$

που είναι η διαφορική μορφή της εξίσωσης ισορροπίας για την μεταφορική κίνηση του υλικού.

Εφαρμόζοντας τώρα τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τις περιστροφικές κινήσεις θα πρέπει

$$\oint_{\partial V} \vec{r} \times (\hat{n} \cdot \Sigma) dS + \int_V \vec{r} \times (\rho \vec{b}) dV = 0.$$

Όμως $\vec{r} \times (\hat{n} \cdot \Sigma) = -\hat{n} \cdot (\Sigma \times \vec{r})$ και

$$-\nabla \cdot (\Sigma \times \vec{r}) = \vec{r} \times (\nabla \cdot \Sigma) + \frac{1}{2} \mathbb{I} \dot{\times} (\Sigma - \Sigma^T).$$

Μετατρέποντας το επιφανειακό ολοκλήρωμα σε ολοκλήρωμα όγκου προκύπτει

$$\int_V \vec{r} \times (\nabla \cdot \Sigma + \rho \vec{b}) dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbb{I} \dot{\times} (\Sigma - \Sigma^T) dV = 0.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα όμως από τις εξισώσεις ισορροπίας για τις μεταφορικές κινήσεις ισούται με μηδέν και επομένως

$$\int_V \mathbb{I} \dot{\times} (\Sigma - \Sigma^T) dV = 0$$

που συνεπάγεται την συμμετρικότητα του τανυστή τάσης

$$\Sigma = \Sigma^T.$$

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε και από το Σχήμα 2.3. Για να μηδενίζεται η ροπή που ασκείται στον στοιχειώδη κύβο θα πρέπει οι διατμητικές τάσεις

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$$

να είναι ίσες μεταξύ τους.

2.3 Τετραγωνική επιφάνειας τάσης του Cauchy

Έστω τετραγωνική επιφάνεια που περιγράφεται από την σχέση

$$\vec{r} \cdot \Sigma \cdot \vec{r} = \pm k^2$$

όπου Σ η τιμή του τανυστή τάσης στο σημείο P . Λύνοντας την εξίσωση ως προς μία συντεταγμένη, έστω z , προκύπτει μια συνάρτηση της μορφής $z = z(x, y)$ (με κατάλληλη επιλογή του προσήμου στο δεξί μέλος έτσι ώστε αυτή να βγαίνει πάντα πραγματική). Η παραπάνω εξίσωση ορίζει μια οικογένεια από όμοιες επιφάνειες με κέντρο το P , μία για κάθε διαφορετική τιμή του k . Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η εξίσωση μιας σφαιρικής επιφάνειας $\vec{r} \cdot \mathbb{I} \cdot \vec{r} = R^2$ (η οποία προκύπτει θέτοντας $\Sigma = \mathbb{I}$) όπου μεταβάλλοντας το R παίρνουμε μια οικογένεια από σφαιρικά κελύφη.

Αντικαθιστώντας $\vec{r} = r\hat{r}$, βρίσκουμε ότι η πίεση στο σημείο P που ασκείται κάθετα στην στοιχειώδη επιφάνεια με μοναδιαίο διάνυσμα το $\hat{r}$ είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης του P από το σημείο της επιφάνειας στην διεύθυνση του $\vec{r}$

$$\sigma_N = \pm \frac{k^2}{r^2}.$$

Η εξίσωση

$$\vec{r} \cdot \Sigma \cdot \vec{r} = \sigma_N r^2$$

είναι γνωστή ως η τετραγωνική επιφάνεια τάσης του Cauchy.

2.4 Κύριες συνιστώσες τανυστή τάσης

Όταν ο τανυστής τάσης είναι συμμετρικός μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\Sigma = \sigma_1 \hat{n}_1 \hat{n}_1 + \sigma_2 \hat{n}_2 \hat{n}_2 + \sigma_3 \hat{n}_3 \hat{n}_3$$

όπου σ_i και $\hat{n}_i$, με $i = 1, 2, 3$, οι κύριες συνιστώσες και διευθύνσεις του. Είναι εύκολο ναδειχθεί ότι εφόσον

$$\sigma_N = \hat{n} \cdot \Sigma \cdot \hat{n} = \sigma_1 (\hat{n} \cdot \hat{n}_1)^2 + \sigma_2 (\hat{n} \cdot \hat{n}_2)^2 + \sigma_3 (\hat{n} \cdot \hat{n}_3)^2$$

θα ισχύει

$$\sigma_N \leq \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) [(\hat{n} \cdot \hat{n}_1)^2 + (\hat{n} \cdot \hat{n}_2)^2 + (\hat{n} \cdot \hat{n}_3)^2]$$

και

$$\sigma_N \geq \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) [(\hat{n} \cdot \hat{n}_1)^2 + (\hat{n} \cdot \hat{n}_2)^2 + (\hat{n} \cdot \hat{n}_3)^2].$$

Το διάνυσμα

$$\hat{n} = (\hat{n} \cdot \hat{n}_1) \hat{n}_1 + (\hat{n} \cdot \hat{n}_2) \hat{n}_2 + (\hat{n} \cdot \hat{n}_3) \hat{n}_3$$

όμως είναι μοναδιαίο και άρα

$$\hat{n} \cdot \hat{n} = (\hat{n} \cdot \hat{n}_1)^2 + (\hat{n} \cdot \hat{n}_2)^2 + (\hat{n} \cdot \hat{n}_3)^2 = 1.$$

Προκύπτει τελικά

$$\min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_N \leq \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3).$$

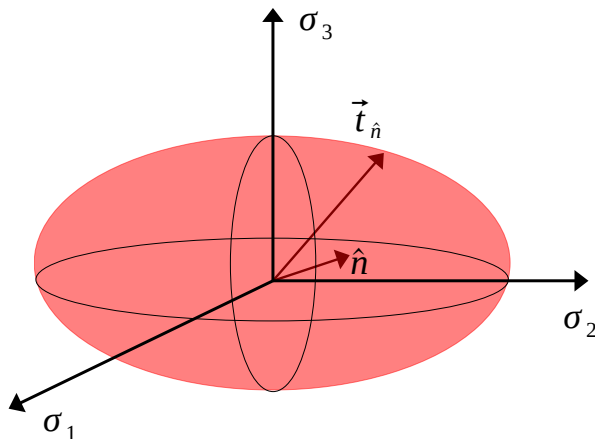
Η πίεση επομένως που ασκείται κάθετα σε τυχαία στοιχειώδη επιφάνεια με μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}$ βρίσκεται πάντα μεταξύ της ελάχιστης και της μέγιστης κύριας συνιστώσας του τανυστή τάσης στο σημείο P .

Για την τάση στην στοιχειώδη επιφάνεια με μοναδιαίο $\hat{n}$ έχουμε

$$\vec{t}_{\hat{n}} = \hat{n} \cdot \Sigma = \sigma_1 (\hat{n} \cdot \hat{n}_1) \hat{n}_1 + \sigma_2 (\hat{n} \cdot \hat{n}_2) \hat{n}_2 + \sigma_3 (\hat{n} \cdot \hat{n}_3) \hat{n}_3$$

απ' όπου προκύπτει

$$\vec{t}_{\hat{n}} \cdot \hat{n}_1 = \sigma_1 (\hat{n} \cdot \hat{n}_1), \quad \vec{t}_{\hat{n}} \cdot \hat{n}_2 = \sigma_2 (\hat{n} \cdot \hat{n}_2), \quad \vec{t}_{\hat{n}} \cdot \hat{n}_3 = \sigma_3 (\hat{n} \cdot \hat{n}_3).$$



Σχήμα 2.4: Το ελλειψοειδές τάσης του Lamé.

Οι συνιστώσες της τάσης σε μια τυχαία στοιχειώδη επιφάνεια, στην βάση που ορίζεται από τις κύριες διευθύνσεις του τανυστή τάσης ικανοποιούν την εξίσωση

$$\frac{(\vec{t}_{\hat{n}} \cdot \hat{n}_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(\vec{t}_{\hat{n}} \cdot \hat{n}_2)^2}{\sigma_2^2} + \frac{(\vec{t}_{\hat{n}} \cdot \hat{n}_3)^2}{\sigma_3^2} = 1.$$

Ο γεωμετρικός τόπος των πιθανών τάσεων σε ένα σημείο λοιπόν σχηματίζει ένα ελλειψοειδές με ημιάξονες τα σ_1 , σ_2 και σ_3 όπως στο Σχήμα 2.4 γνωστό ως το ελλειψοειδές τάσης του Lamé.

2.5 Μέγιστα και ελάχιστα μέτρα διατμήσεων

Το μέτρο της τάσης σε μια τυχαία στοιχειώδη επιφάνεια με μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}$ ισούται με

$$\|\vec{t}_{\hat{n}}\|^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$$

όπου $n_1 = \hat{n} \cdot \hat{n}_1$, $n_2 = \hat{n} \cdot \hat{n}_2$ και $n_3 = \hat{n} \cdot \hat{n}_3$ οι συνιστώσες του $\hat{n}$ στο τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων που ορίζεται από τις κύριες διευθύνσεις. Όμως

$$\|\vec{t}_{\hat{n}}\|^2 = \sigma_N^2 + \sigma_S^2$$

και

$$\sigma_N^2 = (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2$$

από τις οποίες προκύπτει η ακόλουθη σχέση για το μέτρο της διάτμησης

$$\sigma_S^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2)^2.$$

Εφαρμόζουμε τώρα την μέθοδο πολλαπλασιαστών του Lagrange για να βρούμε τα ακρότατα της σ_S (ως προς τα κατευθύνοντα συνημίτονα n_1, n_2 και n_3) από τα ακρότατα της συνάρτησης

$$\sigma_S^2 + \lambda(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1)$$

υπό τον περιορισμό ότι $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$. Μηδενίζοντας τις μερικές παραγώγους ως προς n_1, n_2 και n_3

$$n_1[\sigma_1^2 - 2\sigma_1(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) + \lambda] = 0,$$

$$n_2[\sigma_2^2 - 2\sigma_2(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) + \lambda] = 0,$$

$$n_3[\sigma_3^2 - 2\sigma_3(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) + \lambda] = 0$$

βρίσκουμε ότι για

$$\hat{n} = \pm \hat{n}_1, \quad \hat{n} = \pm \hat{n}_2 \quad \text{και} \quad \hat{n} = \pm \hat{n}_3$$

η διάτμηση μηδενίζεται, $\sigma_S = 0$. Αυτές δεν είναι τίποτα άλλο παρά οι κύριες διευθύνσεις του τανυστή τάσης στις οποίες το διάνυσμα της τάσης ταυτίζεται με την πίεση. Θέτοντας $n_1 = 0$ και απαλείφοντας το λ από τις άλλες δύο εξισώσεις προκύπτει

$$n_2^2 = n_3^2 = \frac{1}{2} \implies \sigma_S^2 = \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)^2}{4}.$$

Ομοίως αν $n_2 = 0$

$$n_1^2 = n_3^2 = \frac{1}{2} \implies \sigma_S^2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{4}$$

ενώ αν $n_3 = 0$

$$n_1^2 = n_2^2 = \frac{1}{2} \implies \sigma_S^2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}{4}.$$

Υποθέτοντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ η μέγιστη διάτμηση θα έχει μέτρο

$$\sigma_S = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}$$

με διεύθυνση που τέμνει το τεταρτημόριο που σχηματίζουν οι κύριες διευθύνσεις $\hat{n}_1$ και $\hat{n}_3$.

2.6 Οι κύκλοι του Mohr

Οι σχέσεις

$$\begin{aligned}\sigma_N &= \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2, \\ \sigma_N^2 + \sigma_S^2 &= \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2, \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1\end{aligned}$$

ορίζουν ένα σύστημα εξισώσεων που μπορεί να λυθεί ως προς τα κατευθύνοντα συνημίτονα n_1 , n_2 και n_3 . Αντικαθιστώντας την τιμή $n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$ στις δύο πρώτες προκύπτει

$$\begin{aligned}\sigma_N - \sigma_3 &= (\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2, \\ \sigma_N^2 + \sigma_S^2 - \sigma_3^2 &= (\sigma_1^2 - \sigma_3^2)n_1^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)n_2^2.\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με $\sigma_2 + \sigma_3$ και αφαιρώντας την δεύτερη βρίσκουμε την ακόλουθη σχέση για το n_1

$$n_1^2 = \frac{(\sigma_N - \sigma_2)(\sigma_N - \sigma_3) + \sigma_S^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}.$$

Εφόσον το αρχικό σύστημα εξισώσεων παραμένει αναλλοίωτο κάτω από εναλλαγές των δεικτών οι λύσεις για τα κατευθύνοντα συνημίτονα n_2 και n_3 προκύπτουν από κυκλικές μεταθέσεις των 1, 2, 3

$$\begin{aligned}n_2^2 &= \frac{(\sigma_N - \sigma_3)(\sigma_N - \sigma_1) + \sigma_S^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}, \\ n_3^2 &= \frac{(\sigma_N - \sigma_1)(\sigma_N - \sigma_2) + \sigma_S^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}.\end{aligned}$$

Θέτοντας

$$R_1^2 = \left(\sigma_N - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \sigma_S^2$$

$$R_2^2 = \left(\sigma_N - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \sigma_S^2$$

και

$$R_3^2 = \left(\sigma_N - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \sigma_S^2$$

μπορούμε να φέρουμε τις λύσεις στην μορφή

$$n_1^2 = \frac{R_1^2 - \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

$$n_2^2 = \frac{R_2^2 - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)}$$

$$n_3^2 = \frac{R_3^2 - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Εφόσον $n_i^2 \geq 0$ για $i = 1, 2, 3$ προκύπτει ότι

$$R_1 \geq \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

$$R_2 \leq \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

και

$$R_3 \geq \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Οι εξισώσεις για τα R_i ορίζουν κύκλους στον χώρο σ_N - σ_S με κέντρα στα σημεία

$$\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0 \right), \quad \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0 \right), \quad \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right)$$

και επιτρεπτές ακτίνες R_1, R_2, R_3 που καθορίζονται από τις ανισώσεις. Οι πιθανές τιμές της πίεσης και της διάτμησης καταλαμβάνουν την σκιασμένη περιοχή του Σχήματος 2.5. Η μέγιστη τιμή της διάτμησης $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ που βρήκαμε στην προηγούμενη ενότητα προκύπτει εύκολα από την δεύτερη ανίσωση και αντιστοιχεί σε εκείνο το

σημείο του εξωτερικού κύκλου που βρίσκεται ακριβώς πάνω από το κέντρο του.

Το σημείο (σ_N, σ_S) που αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη τιμή του επιφανειακού διανύσματος $\hat{n}$ στην βάση των κύριων συνιστωσών του τανυστή τάσης προκύπτει από την τομή του πρώτου και τρίτου κύκλου με ακτίνες

$$R_1^2 = n_1^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

και

$$R_3^2 = n_3^2(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η ανάλυση των κύκλων του Mohr δεν περιορίζεται στον τανυστή της τάσης μόνο αλλά σε οποιονδήποτε συμμετρικό τανυστή.

2.6.1 Καταστάσεις επίπεδης τάσης

Για έναν επίπεδο τανυστή τάσης κάποια από τις κύριες συνιστώσες του μηδενίζεται. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο σε αυτή την περίπτωση ισούται με

$$\lambda^2 - \lambda \text{tr} \Sigma + \det \Sigma = 0$$

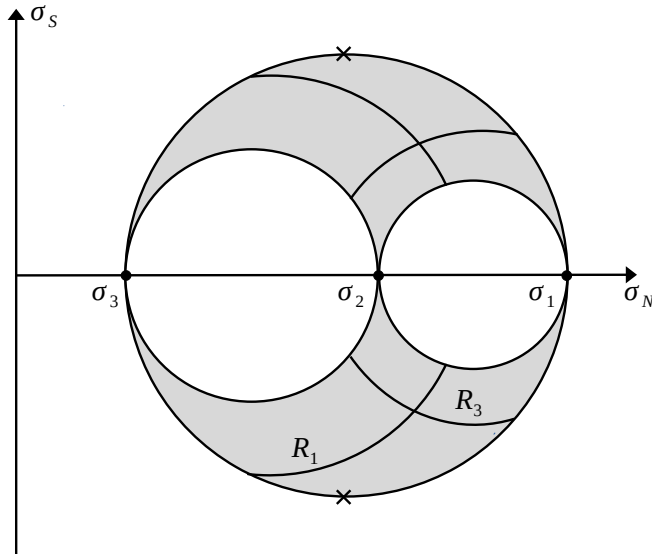
και η εξίσωση Cayley-Hamilton παίρνει την μορφή

$$\Sigma^2 - \Sigma \text{tr} \Sigma + \mathbb{I} \det \Sigma = 0.$$

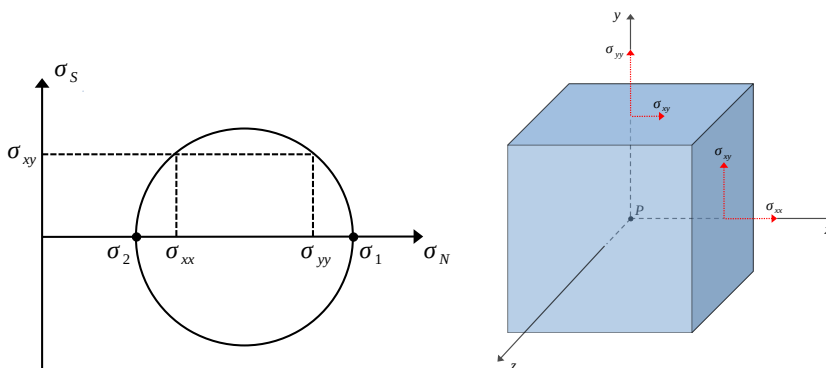
Σε σύστημα συντεταγμένων που περιλαμβάνει την κύρια διεύθυνση του τανυστή τάσης με μηδενική κύρια συνιστώσα η ανάλυση των κύκλων του Mohr απλοποιείται αρκετά. Έστω για παράδειγμα τανυστής τάσης της μορφής

$$\Sigma = \sigma_{xx} \hat{i} \hat{i} + \sigma_{xy} \hat{i} \hat{j} + \sigma_{xy} \hat{j} \hat{i} + \sigma_{yy} \hat{j} \hat{j}$$

με $\text{tr} \Sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ και $\det \Sigma = \sigma_{xx} \sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2$ (η διεύθυνση μηδενικής συνιστώσας σε αυτή την περίπτωση είναι το $\hat{k}$). Παίρνοντας



Σχήμα 2.5: Οι κύκλοι του Mohr για τον τανυστή τάσης. Σημειώνεται το μέγιστο μέτρο διάτμησης με $\times$ καθώς επίσης και οι κύκλοι σταθερής ακτίνας R_1 και R_3 από την τομή των οποίων προκύπτουν οι τιμές της πίεσης και διάτμησης για δεδομένες τιμές του n_1 και n_3 .



Σχήμα 2.6: Κύκλος του Mohr για κατάσταση επίπεδης τάσης.

το εσωτερικό γινόμενο της εξίσωσης Cayley-Hamilton με το τυχόν μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}$ από δεξιά και από αριστερά προκύπτει

$$\left(\sigma_N - \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_S^2 = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις για το ίχνος και την ορίζουσα του Σ που βρήκαμε προηγουμένως και το γεγονός ότι $\hat{n} \cdot \Sigma = \sigma_N \hat{n} + \sigma_S \hat{n}_\perp$. Οι τιμές της πίεσης και της διάτμησης σε μία κατάσταση επίπεδης τάσης βρίσκονται επάνω στον κύκλο ακτίνας

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

με κέντρο το

$$\left(\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}, 0\right).$$

Για $\hat{n} = \hat{i}$, $\sigma_N = \sigma_{xx}$ ενώ για $\hat{n} = \hat{j}$, $\sigma_N = \sigma_{yy}$. Και στις δύο περιπτώσεις με απλή αντικατάσταση προκύπτει $\sigma_S^2 = \sigma_{xy}^2$. Η κατάσταση τάσης για τον στοιχειώδη όγκο με επιφανειακά διανύσματα τα $\hat{i}$, $\hat{j}$ και $\hat{k}$ καθώς και το σημείο επάνω στον κύκλο του Mohr που αντιστοιχεί στις τιμές των σ_N και σ_S που μόλις βρήκαμε δίνεται στο Σχήμα 2.6. Παρατηρούμε ότι στην διεύθυνση $\hat{k}$ δεν ασκούνται καθόλου δυνάμεις. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η αντίστοιχη επιφάνεια είναι ελεύθερη. Παρόμοια διαγράμματα συναντώνται πολύ συχνά σε βιβλία αντοχής υλικών.

2.7 Ασκήσεις

Άσκηση 2.1. Έστω τανυστής τάσης σε κάποιο σημείο P του χώρου της μορφής

$$\Sigma = \hat{i}(7\hat{i} - 2\hat{k}) + 5\hat{j}\hat{j} - 2\hat{k}(\hat{i} - 2\hat{k}).$$

Να βρεθεί το διάνυσμα τάσης που ασκείται σε μία στοιχειώδη επιφάνεια με μοναδιαίο διάνυσμα

$$\hat{n} = \frac{1}{3}(2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$$

και η τιμή της πίεσης σ_N και της διατμητικής τάσης σ_S στο σημείο αυτό.

Άσκηση 2.2. Τανυστής τάσης σε κάποιο σημείο P του χώρου έχει την μορφή

$$\Sigma = \sigma \mathbb{I} + \sigma[a(\hat{i}\hat{j} + \hat{j}\hat{i}) + b(\hat{i}\hat{k} + \hat{k}\hat{i}) + c(\hat{j}\hat{k} + \hat{k}\hat{j})],$$

όπου σ σταθερά. Να βρεθούν οι τιμές των a , b και c έτσι ώστε η τάση πάνω στην στοιχειώδη επιφάνεια με μοναδιαίο διάνυσμα

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

να μηδενίζεται.

Άσκηση 2.3. Τανυστής τάσης έχει την μορφή

$$\Sigma = y\hat{i}(3x\hat{i} + 5y\hat{j}) + \hat{j}(5y^2\hat{i} + 2z\hat{k}) + 2z\hat{k}\hat{j}$$

Να βρεθούν

- α) Η τάση που ασκείται στην επιφάνεια που εφάπτεται με τον κύλινδρο $y^2 + z^2 = 4$.
- β) Το πεδίο δυνάμεων μάζας $\vec{b}$ που πρέπει να ασκείται σε σώμα πυκνότητας ρ ώστε αυτό να ισορροπεί.

(Υπόδειξη: το κάθετο διάνυσμα στο εφαπτόμενο επίπεδο μια επιφάνειας της μορφής $f(\vec{r}) = \text{σταθ}$ ισούται με την βάρθρωση ∇f .)

Άσκηση 2.4. Ναδειχθεί ότι το διάνυσμα που είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας τάσης του Cauchy στο $\vec{r}$ είναι παράλληλο στην τάση που ασκείται στην στοιχειώδη επιφάνεια με μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{r}$ στο κέντρο της.

Άσκηση 2.5. Ναδειχθεί ότι το μέτρο της διάτμησης στην στοιχειώδη επιφάνεια με μοναδιαίο διάνυσμα

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + \hat{n}_3)$$

κάθετο σε αυτήν δίνεται από την σχέση

$$\sigma_S^2 = \frac{1}{9}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2],$$

όπου $\hat{n}_i$ η κύρια διεύθυνση και σ_i η κύρια συνιστώσα του τανυστή τάσης με $i = 1, 2, 3$.

Άσκηση 2.6. Οι κύριες συνιστώσες του τανυστή τάσης σε σημείο P διατεταγμένες σε φθίνουσα σειρά έτσι ώστε $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ικανοποιούν την σχέση

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}.$$

Να βρεθούν οι συνιστώσες του μοναδιαίου επιφανειακού διανύσματος $\hat{n}$ στο τρισσορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων που ορίζουν οι κύριες διευθύνσεις του τανυστή τάσης έτσι ώστε οι τιμές της πίεσης και διάτμησης στο σημείο P να ισούνται με $\sigma_N = \sigma_2$ και $\sigma_S = (\sigma_1 - \sigma_3)/4$.

Άσκηση 2.7. Βρείτε τις κύριες συνιστώσες και διευθύνσεις του τανυστή τάσης

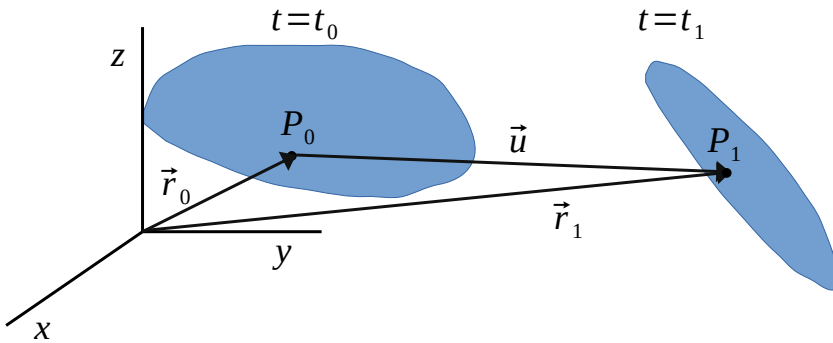
$$\Sigma = 5\hat{i}\hat{i} - 6\hat{j}(\hat{j} + 2\hat{k}) + \hat{k}(-12\hat{j} + \hat{k})$$

και κατασκευάστε τους αντίστοιχους κύκλους του Mohr. Βρείτε τις τιμές των ακτίνων R_1 και R_3 , η τομή των οποίων δίνει τις τιμές της πίεσης και διάτμησης στην στοιχειώδη επιφάνεια με μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}$, στις περιπτώσεις όπου το $\hat{n}$ ταυτίζεται με τα καρτεσιανά επίπεδα $\hat{n} = \hat{i}$, $\hat{n} = \hat{j}$ και $\hat{n} = \hat{k}$.

Κεφάλαιο 3

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Έστω ότι την χρονική στιγμή t_0 το σώμα καταλαμβάνει κάποιον όγκο στον χώρο. Λόγω των δυνάμεων που του ασκούνται αυτό θα αρχίσει να παραμορφώνεται και την χρονική στιγμή t_1 θα βρεθεί σε κάποιο άλλο σημείο του χώρου με διαφορετικό όγκο και σχήμα. Για την περιγραφή της παραμόρφωσης απαιτούνται οι αρχικές και



Σχήμα 3.1: Παραμόρφωση ενός υλικού σώματος.

τελικές θέσεις των υλικών σημείων που απαρτίζουν το σώμα. Η μετατόπιση ενός σημείου που αρχικά βρίσκεται στο σημείο P_0 και καταλήγει στο σημείο P_1 ισούται με

$$\vec{u} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$$

όπου $\vec{r}_0$ και $\vec{r}_1$ οι αποστάσεις των σημείων από την αρχή των αξόνων. Η γνώση του πεδίου μετατοπίσεων για ένα υλικό μας επιτρέπει να βρούμε τον τρόπο με τον οποίο αυτό θα παραμορφωθεί. Στην περίπτωση που η παραμόρφωση δεν οδηγεί στον σχηματισμό ιδιομορφίας (πολλά αρχικά σημεία που να καταλήγουν στο ίδιο τελικό σημείο) μπορούμε να θεωρήσουμε τις εξής ισοδύναμες περιγραφές:

- **Περιγραφή Lagrange**

όπου οι τελικές θέσεις δίνονται συναρτήσει των αρχικών

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(\vec{r}_0) = \vec{r}_1(x_0, y_0, z_0).$$

- **Περιγραφή Euler**

όπου οι αρχικές θέσεις δίνονται συναρτήσει των τελικών

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\vec{r}_1) = \vec{r}_0(x_1, y_1, z_1).$$

Εάν υποθέσουμε ότι και οι δύο συναρτήσεις είναι συνεχείς με συνεχείς πρώτες παραγώγους (ανήκουν δηλαδή στην κλάση C^1) τότε ικανή και αναγκαία συνθήκη για να αντιστρέψουμε την $\vec{r}_1$ για να βρούμε την $\vec{r}_0$ είναι η *Ιακωβιανή*

$$\nabla_0 \vec{r}_1 = \hat{i} \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x_0} + \hat{j} \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial y_0} + \hat{k} \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial z_0}$$

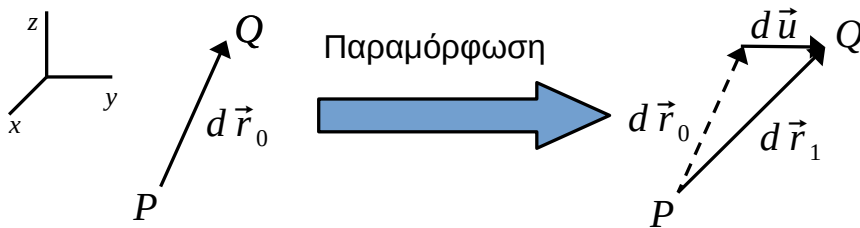
να έχει ορίζουσα διάφορη του μηδενός.

Απόδειξη: Έστω $d\vec{r}_0$ και $d\vec{r}_1$ οι στοιχειώδεις αποστάσεις δύο σημείων P, Q του υλικού πριν και μετά την παραμόρφωση όπως στο Σχήμα 3.2. Για το στοιχειώδες διάνυσμα $d\vec{r}_1$ προκύπτει

$$\begin{aligned} d\vec{r}_1 &= \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial z_0} dz_0 \\ &= d\vec{r}_0 \cdot \nabla_0 \vec{r}_1. \end{aligned}$$

Για να βρούμε το $d\vec{r}_0$ αρκεί να πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο κάθε μέλους από τα δεξιά με τον τανυστή $(\nabla_0 \vec{r}_1)^{-1}$. Για να υπάρχει ο αντίστροφος όμως θα πρέπει $\det(\nabla_0 \vec{r}_1) \neq 0$. $\square$

Η διαφορά των στοιχειωδών αποστάσεων πριν και μετά την παραμόρφωση αποτελεί ένα μέτρο του βαθμού παραμόρφωσης του



Σχήμα 3.2: Η παραμόρφωση ενός σώματος μεταβάλλει το μήκος και την διεύθυνση της στοιχειώδους απόστασης μεταξύ δύο σημείων P και Q του υλικού. Απουσία παραμόρφωσης το σημείο Q θα έπρεπε να απέχει απόσταση $d\vec{r}_0$ από το P (διακεκομμένη). Η διαφορά των δύο αποστάσεων ορίζει την στοιχειώδη μετατόπιση $d\vec{u} = d\vec{r}_1 - d\vec{r}_0$.

υλικού. Από την έκφραση του $d\vec{r}_1$ συναρτήσει του $d\vec{r}_0$ προκύπτει ότι το τετράγωνο της στοιχειώδους απόστασης των σημείων P και Q μετά την παραμόρφωση ισούται με

$$\|d\vec{r}_1\|^2 = d\vec{r}_0 \cdot [(\nabla_0 \vec{r}_1) \cdot (\nabla_0 \vec{r}_1)^T] \cdot d\vec{r}_0.$$

Ο τανυστής $G = (\nabla_0 \vec{r}_1) \cdot (\nabla_0 \vec{r}_1)^T$ που δίνει το μέτρο του στοιχειώδους διανύσματος μετά την παραμόρφωση συναρτήσει του αρχικού είναι γνωστός ως ο τανυστής παραμόρφωσης του Green.

Από τον ορισμό της μετατόπισης προκύπτει ότι $\nabla_0 \vec{u} = \nabla_0 \vec{r}_1 - \mathbb{I}$ και επομένως

$$d\vec{r}_1 = d\vec{r}_0 \cdot [\mathbb{I} + \nabla_0 \vec{u}]$$

και άρα

$$G = [\mathbb{I} + \nabla_0 \vec{u}] \cdot [\mathbb{I} + (\nabla_0 \vec{u})^T].$$

3.1 Φυσική ερμηνεία τανυστή παραμόρφωσης

Έστω

$$\hat{n} = \frac{d\vec{r}_0}{\|d\vec{r}_0\|}$$

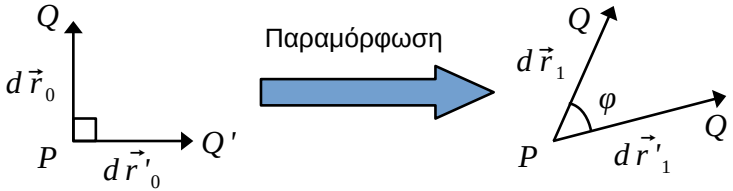
το μοναδιαίο διάνυσμα στην διεύθυνση της στοιχειώδους απόστασης του σημείου P από το σημείο Q πριν την παραμόρφωση. Διαιρώντας

την σχέση που δίνει το μέτρο της στοιχειώδους απόστασης μετά την παραμόρφωση με $\|d\vec{r}_0\|$ προκύπτει

$$\frac{\|d\vec{r}_1\|}{\|d\vec{r}_0\|} = \sqrt{\hat{n} \cdot G \cdot \hat{n}}.$$

Τα διαγώνια στοιχεία του τανυστή παραμόρφωσης επομένως δίνουν τον συντελεστή επιμήκυνσης της απόστασης μεταξύ δύο σημείων στην αρχική διεύθυνση $\hat{n}$.

Έστω τώρα σημεία Q και Q' με αρχικές αποστάσεις κάθετες μεταξύ τους από το σημείο P . Μετά την παραμόρφωση οι δύο αποστάσεις θα σχηματίζουν γωνία φ μεταξύ τους.



Σχήμα 3.3: Η παραμόρφωση ενός υλικού μεταβάλλει την γωνία μεταξύ δύο κάθετων αρχικά στοιχειωδών αποστάσεων.

Ισχύει ότι

$$d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}'_1 = \cos \varphi \|d\vec{r}_1\| \|d\vec{r}'_1\|$$

όμως $d\vec{r}_1 = d\vec{r}_0 \cdot [\mathbb{I} + \nabla_0 \vec{u}]$ και επομένως

$$\begin{aligned} d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}'_1 &= d\vec{r}_0 \cdot [\mathbb{I} + \nabla_0 \vec{u}] \cdot [\mathbb{I} + (\nabla_0 \vec{u})^T] \cdot d\vec{r}'_0 \\ &= d\vec{r}_0 \cdot G \cdot d\vec{r}'_0 \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τα αριστερά μέλη και διαιρώντας με $\|d\vec{r}_0\|$ και $\|d\vec{r}'_0\|$ προκύπτει

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\hat{n} \cdot G \cdot \hat{n}'}{\sqrt{\hat{n} \cdot G \cdot \hat{n}} \sqrt{\hat{n}' \cdot G \cdot \hat{n}'}}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση για τα διαγώνια στοιχεία του G που βρήκαμε προηγουμένως. Το ημίτονο της γωνίας παραμόρφωσης μεταξύ δύο αρχικά κάθετων μεταξύ τους αποστάσεων στην διεύθυνση $\hat{n}$ και $\hat{n}'$ εξαρτάται από τα διαγώνια και μη διαγώνια στοιχεία του τανυστή παραμόρφωσης.

3.2 Το όριο των μικρών παραμορφώσεων

Ορίζουμε τώρα τον *τανυστή έντασης* του *Lagrange* ως

$$L = \frac{1}{2}[\nabla_0 \vec{u} + (\nabla_0 \vec{u})^T + (\nabla_0 \vec{u}) \cdot (\nabla_0 \vec{u})^T],$$

έτσι ώστε

$$G = \mathbb{I} + 2L.$$

Στο όριο των μικρών παραμορφώσεων μπορούμε να αγνοήσουμε τους όρους δεύτερης τάξης ως προς παραγώγους της μετατόπισης και επομένως

$$L = \frac{1}{2}[\nabla_0 \vec{u} + (\nabla_0 \vec{u})^T].$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση για τον συντελεστή επιμήκυνσης προκύπτει

$$\frac{\|d\vec{r}_1\|}{\|d\vec{r}_0\|} = \sqrt{1 + 2\hat{n} \cdot L \cdot \hat{n}}.$$

Αναπτύσσοντας την ρίζα κατά Taylor και κρατώντας όρους πρώτης τάξης ως προς L βρίσκουμε

$$\hat{n} \cdot L \cdot \hat{n} = \frac{\|d\vec{r}_1\| - \|d\vec{r}_0\|}{\|d\vec{r}_0\|}.$$

Το δεξί μέλος ισούται με τον *συντελεστή γραμμικής διαστολής*. Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι (εφόσον και η γωνία παραμόρφωσης στην περίπτωση αυτή θα είναι μικρή)

$$2\hat{n} \cdot L \cdot \hat{n}' \simeq \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Στο όριο των μικρών παραμορφώσεων λοιπόν τα διαγώνια στοιχεία του τανυστή της έντασης δίνουν την σχετική επιμήκυνση της στοιχειώδους απόστασης μεταξύ δύο σημείων του υλικού ενώ τα μη διαγώνια την γωνία παραμόρφωσης.

Όταν η ορίζουσα της Ιακωβιανής είναι διάφορη του μηδενός τότε ορίζεται ο τανυστής $\nabla_1 \vec{r}_0$. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} (\nabla_1 \vec{r}_0) \cdot (\nabla_0 \vec{r}_1) &= (\mathbb{I} - \nabla_1 \vec{u}) \cdot (\mathbb{I} + \nabla_0 \vec{u}) \\ &= \mathbb{I} - \nabla_1 \vec{u} + \nabla_0 \vec{u} - (\nabla_1 \vec{u}) \cdot (\nabla_0 \vec{u}) \\ &= \mathbb{I} - \nabla_1 \vec{u} + \nabla_0 \vec{u} - (\nabla_1 \vec{r}_0) \cdot (\nabla_0 \vec{u})^2. \end{aligned}$$

Είναι εύκολο όμως ναδειχθεί ότι $(\nabla_1 \vec{r}_0) \cdot (\nabla_0 \vec{r}_1) = \mathbb{I}$ (Άσκηση 3.5) και επομένως για μικρές παραμορφώσεις

$$\nabla_0 \vec{u} = \nabla_1 \vec{u}.$$

Ο τανυστής της έντασης γραμμένος στην μορφή

$$E = \frac{1}{2}[\nabla_1 \vec{u} + (\nabla_1 \vec{u})^T]$$

είναι γνωστός ως ο τανυστής έντασης του Euler.

3.3 Η στοιχειώδης μετατόπιση

Αναλύοντας τον τανυστή $\nabla_0 \vec{u}$ στο συμμετρικό και αντισυμμετρικό του μέρος

$$\nabla_0 \vec{u} = \frac{1}{2}[\nabla_0 \vec{u} + (\nabla_0 \vec{u})^T] + \frac{1}{2}[\nabla_0 \vec{u} - (\nabla_0 \vec{u})^T]$$

παρατηρούμε ότι αυτός γράφεται σαν άθροισμα του τανυστή έντασης του Lagrange και ενός αντισυμμετρικού τανυστή

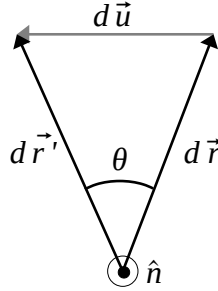
$$W = \frac{1}{2}[\nabla_0 \vec{u} - (\nabla_0 \vec{u})^T]$$

που ονομάζεται τανυστής στροφής του Lagrange. Η στοιχειώδης μετατόπιση $d\vec{u}$ προκύπτει από την δράση του τανυστή $\nabla_0 \vec{u}$ με το στοιχειώδες διάνισμα $d\vec{r}_0$ από τα δεξιά

$$\begin{aligned} d\vec{u} &= d\vec{r}_1 - d\vec{r}_0 \\ &= d\vec{r}_0 \cdot (\nabla_0 \vec{r}_1 - \mathbb{I}) \\ &= d\vec{r}_0 \cdot (\nabla_0 \vec{u}) \end{aligned}$$

και επομένως

$$d\vec{u} = d\vec{r}_0 \cdot L + d\vec{r}_0 \cdot W.$$



Σχήμα 3.4: Στοιχειώδη περιστροφή κατά γωνία θ γύρω από τον άξονα $\hat{n}$.

Αποδεικνύεται ότι

$$\begin{aligned}
 d\vec{r}_0 \cdot \vec{W} &= -\frac{d\vec{r}_0}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_0} \hat{i} - \hat{i} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_0} \right) + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial y_0} \hat{j} - \hat{j} \frac{\partial \vec{u}}{\partial y_0} \right) + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial z_0} \hat{k} - \hat{k} \frac{\partial \vec{u}}{\partial z_0} \right) \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \left[d\vec{r}_0 \times \left(\hat{i} \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_0} \right) + d\vec{r}_0 \times \left(\hat{j} \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial y_0} \right) + d\vec{r}_0 \times \left(\hat{k} \times \frac{\partial \vec{u}}{\partial z_0} \right) \right] \\
 &= -\frac{1}{2} d\vec{r}_0 \times (\nabla_0 \times \vec{u}).
 \end{aligned}$$

Θέτοντας

$$\vec{w} = \frac{1}{2} \nabla_0 \times \vec{u}$$

η στοιχειώδης μετατόπιση ισούται με την δράση του ταχυστή έντασης του Lagrange επάνω στο διάνυσμα $d\vec{r}_0$ από τα δεξιά και με μία στοιχειώδη στροφή που καθορίζεται από το διάνυσμα $\vec{w}$

$$d\vec{u} = d\vec{r}_0 \cdot L + \vec{w} \times d\vec{r}_0.$$

Όταν η ορίζουσα της Ιακωβιανής είναι διάφορη του μηδενός η στοιχειώδη μετατόπιση μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned}
 d\vec{u} &= d\vec{r}_1 \cdot E + d\vec{r}_1 \cdot \Omega \\
 &= d\vec{r}_1 \cdot E + \vec{\omega} \times d\vec{r}_1
 \end{aligned}$$

όπου

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla_1 \times \vec{u}$$

και Ω ο τανυστής στροφής του *Euler*. Για να δούμε γιατί οι τανυστές W και Ω συνδέονται με στροφές αρκεί να μελετήσουμε την στοιχειώδη μετατόπιση ενός διανύσματος όταν αυτό περιστρέφεται κατά μία απειροστή γωνία θ γύρω από έναν άξονα στην διεύθυνση $\hat{n}$. Από το Σχήμα 3.4 προκύπτει

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + d\vec{u}.$$

Όταν το $\theta \ll 1$ το μέτρο του $d\vec{u}$ είναι περίπου ίσο με $\theta \|d\vec{r}'\|$ με διεύθυνση κάθετη στο $\hat{n}$ και $d\vec{r}'$, επομένως

$$d\vec{u} \simeq \vec{w} \times d\vec{r}$$

όπου $\vec{w} = \theta \hat{n}$.

3.4 Κύριες διευθύνσεις τανυστή έντασης

Εφόσον ο τανυστής της έντασης είναι συμμετρικός υπάρχει τρισορθογώνια βάση $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ και $\hat{x}_3$ όπου αυτός παίρνει την απλή μορφή

$$L = \ell_1 \hat{x}_1 \hat{x}_1 + \ell_2 \hat{x}_2 \hat{x}_2 + \ell_3 \hat{x}_3 \hat{x}_3.$$

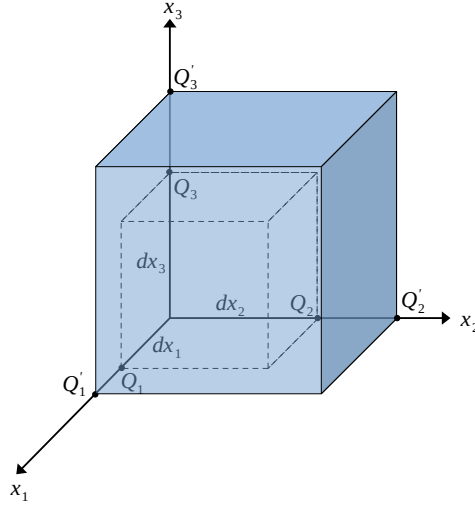
Έστω dx_1, dx_2 και dx_3 οι στοιχειώδεις αποστάσεις των σημείων Q_1, Q_2 και Q_3 από το κέντρο του συστήματος συντεταγμένων x_1, x_2 και x_3 όπως στο Σχήμα 3.5. Για μία παραμόρφωση με μηδενικό τανυστή στροφής, $W = 0$, το στοιχειώδες διάνυσμα μετατόπισης για κάθε απόσταση θα ισούται με

$$d\vec{u}_1 = \ell_1 dx_1 \hat{x}_1, \quad d\vec{u}_2 = \ell_2 dx_2 \hat{x}_2, \quad d\vec{u}_3 = \ell_3 dx_3 \hat{x}_3.$$

Εφόσον οι μετατοπίσεις είναι στην ίδια διεύθυνση με τις αποστάσεις συνεπάγεται ότι μετά την παραμόρφωση τα σημεία Q_1, Q_1 και Q_3 θα καταλαμβάνουν τα σημεία Q'_1, Q'_2 και Q'_3 αντίστοιχα με αποστάσεις

$$dX_1 = (1 + \lambda_1)dx_1, \quad dX_2 = (1 + \lambda_2)dx_2, \quad dX_3 = (1 + \lambda_3)dx_3.$$

από το κέντρο. Στο όριο των μικρών παραμορφώσεων, κρατώντας όρους πρώτης τάξης ως προς τις κύριες συνιστώσες του τανυστή



Σχήμα 3.5: Η παραμόρφωση ενός στοιχειώδους όγκου στις κύριες διευθύνσεις του τανυστή έντασης.

έντασης ο παραμορφωμένος όγκος που ορίζουν τα Q'_1 , Q'_2 και Q'_3 θα ισούται με

$$\begin{aligned} dX_1 dX_2 dX_3 &= (1 + \ell_1)(1 + \ell_2)(1 + \ell_3) dx_1 dx_2 dx_3 \\ &\simeq (1 + \ell_1 + \ell_2 + \ell_3) dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι ο συντελεστής κυβικής διαστολής κ ισούται με το ίχνος του τανυστή έντασης L

$$\kappa = \frac{dX_1 dX_2 dX_3 - dx_1 dx_2 dx_3}{dx_1 dx_2 dx_3} = \text{tr}(L).$$

3.5 Συνθήκες συμβατότητας

Έστω ότι μας δίνεται η ένταση και θέλουμε να βρούμε το πεδίο μετατόπισης από την οποία αυτή προέρχεται. Από τον ορισμό της έντασης προκύπτει ότι

$$\nabla_0 \times L = \frac{1}{2} \nabla_0 \times (\nabla_0 \vec{u})^T.$$

Ισχύει όμως

$$(\nabla_0 \times L)^T = \frac{1}{2} \nabla_0 (\nabla_0 \times \vec{u})$$

και επομένως

$$\nabla_0 \times (\nabla_0 \times L)^T = 0,$$

αυτές είναι οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί ο ταχυστής της έντασης για να μπορεί να βρεθεί το πεδίο μετατοπίσεων. Παρόμοιες συνθήκες ικανοποιεί και ο ταχυστής έντασης του Euler

$$\nabla_1 \times (\nabla_1 \times E)^T = 0.$$

3.6 Ασκήσεις

Άσκηση 3.1. Η θέση $\vec{r}_1$ ενός υλικού σημείου μετά την παραμόρφωση ισούται με

$$\vec{r}_1 = x_0\hat{i} + (y_0 + Az_0)\hat{j} + (z_0 + Ay_0)\hat{k}$$

όπου $\vec{r}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}$ η αρχική του θέση και A σταθερά. Να βρεθεί η έκφραση του διανύσματος μετατόπισης $\vec{u}$ στην περιγραφή Euler και Lagrange.

Άσκηση 3.2. Παραμόρφωση περιγράφεται από πεδίο μετατοπίσεων της μορφής

$$\vec{u}(\vec{r}_0) = (3y_0 - 4z_0)\hat{i} + (2x_0 - z_0)\hat{j} + (4y_0 - x_0)\hat{k}$$

στην περιγραφή Lagrange. Να βρεθεί η σχετική απόσταση μεταξύ δύο σημείων P και Q μετά την παραμόρφωση εάν αυτά αρχικά βρίσκονται στις θέσεις

$$\vec{r}_P = \hat{i} + 3\hat{k} \quad \text{και} \quad \vec{r}_Q = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 6\hat{k}.$$

Άσκηση 3.3. Ομογενής παραμόρφωση περιγράφεται από πεδίο μετατοπίσεων της μορφής

$$\vec{u}(\vec{r}_0) = A \cdot \vec{r}_0$$

στην περιγραφή Lagrange όπου A τανυστής με σταθερές συνιστώσες. Αποδείξτε ότι η παραμόρφωση ενός επιπέδου της μορφής

$$\vec{r}_0 = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\vec{a}, \vec{b}$ σταθερά παραμένει επίπεδο. Δείξτε το ίδιο για μια ευθεία.

Άσκηση 3.4. Οι τελικές θέσεις των σημείων ενός σώματος μετά την παραμόρφωση δίνονται από την σχέση

$$\vec{r}_1(\vec{r}_0) = \vec{r}_0 + A(z_0\hat{j} + y_0\hat{k})$$

όπου $\vec{r}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}$ οι αρχικές θέσεις των σημείων. Να βρεθούν

- α) Ο τανυστής παραμόρφωσης του Green.
- β) Το μέτρο των στοιχειωδών αποστάσεων $dy\hat{j}$ και $dz\hat{k}$ μετά την παραμόρφωση.
- γ) Το μέτρο της στοιχειώδους απόστασης $dy\hat{j} + dz\hat{k}$ μετά την παραμόρφωση.
- δ) Οι συντελεστές επιμήκυνσης των περιπτώσεων β) και γ).
- ε) Ο τανυστής έντασης του Lagrange.

Άσκηση 3.5. Αποδείξτε την ακόλουθη σχέση

$$(\nabla_1 \vec{r}_0) \cdot (\nabla_0 \vec{r}_1) = \mathbb{I}$$

για το αρχικό και το μετατοπισμένο διάνυσμα θέσης μετά την παραμόρφωση.

(Υπόδειξη: αρκεί να δείξετε ότι $\frac{\partial \vec{r}_0}{\partial x_1} \cdot \nabla_0 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ και ομοίως για τα y_1 και z_1 .)

Άσκηση 3.6. Συνάγετε κατά πόσο η ακόλουθη έκφραση για τον τανυστή έντασης του Euler

$$E = \hat{i}[3y^2\hat{i} + (3xy + z)\hat{j} - \frac{y}{2}\hat{k}] + \hat{j}[(3xy + z)\hat{i} + \frac{x}{2}\hat{k}] + \hat{k}(-\frac{y}{2}\hat{i} + \frac{x}{2}\hat{j} + 2z\hat{k})$$

είναι φυσικά αποδεκτή.

Κεφάλαιο 4

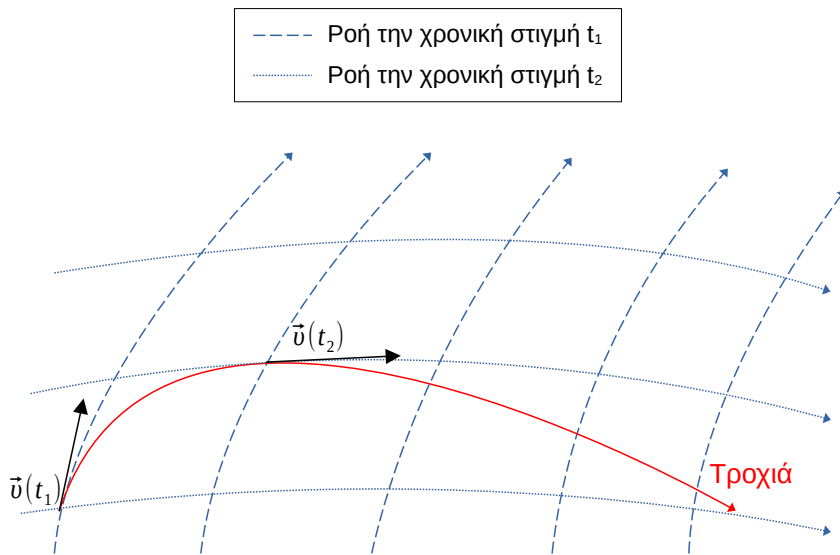
ΚΙΝΗΣΗ ΚΑΙ ΡΟΗ

4.1 Τροχιές και γραμμές ροής

Η κίνηση και η ροή ενός συνεχούς μέσου είναι έννοιες που αναφέρονται στην συνεχή μεταβολή της θέσης και του σχήματος ενός υλικού. Έστω $\vec{r} = \vec{r}(t)$ το διάνυσμα θέσης ενός υλικού σημείου που κινείται μέσα στον χώρο. Διακρίνουμε τώρα δύο ειδών καμπύλες τις τροχιές και τις γραμμές ροής.

- *Τροχιά* ενός υλικού σημείου ονομάζουμε το σύνολο των σημείων του χώρου που αυτό καταλαμβάνει κατά την διάρκεια της κίνησης του.
- *Γραμμή ροής* ονομάζουμε εκείνη την καμπύλη που σε κάθε σημείο της η ταχύτητα είναι εφαπτομενική σε αυτήν.

Στην γενική περίπτωση οι δύο καμπύλες δεν ταυτίζονται. Οι γραμμές ροής εξαρτώνται από το πεδίο ταχυτήτων $\vec{v}(t)$ και αναφέρονται σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή t . Για ένα υλικό στο οποίο το πεδίο ροής αλλάζει η μορφή των γραμμών θα μεταβάλλεται από στιγμή σε στιγμή ενώ η τροχιά ενός σημείου θα ακολουθεί την στιγμιαία κατεύθυνση της ροής όπως στο Σχήμα 4.1. Στην περίπτωση όπου $\partial\vec{v}/\partial t = 0$ οι δύο καμπύλες ταυτίζονται και το υλικό σημείο κινείται με κατεύθυνση εφαπτομενική στο πεδίο ροής. Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η ροή είναι σταθερή.



Σχήμα 4.1: Γραμμές ροής και τροχιά υλικού σημείου. Η ροή στην γενική περίπτωση είναι χρονοεξαρτώμενη και μεταβάλλεται όσο περνάει ο χρόνος. Η ταχύτητα ενός υλικού σημείου είναι εφαπτομενική στο εκάστοτε πεδίο ροής. Το σύνολο των σημείων του χώρου που αυτό καταλαμβάνει ορίζει την τροχιά του.

4.2 Η μεταφορική παράγωγος

Έστω $h(\vec{r}, t)$ φυσικό μέγεθος που περιγράφει τις συνθήκες που επικρατούν στο υλικό σημείο $\vec{r}(t)$ καθώς αυτό κινείται στον χώρο. Η στοιχειώδης μεταβολή του h ισούται με

$$dh = d\vec{r} \cdot (\nabla h) + \frac{\partial h}{\partial t} dt.$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ποσότητας στο σημείο $\vec{r}(t)$ εξαρτάται από την ταχύτητα $\vec{v}(t) = d\vec{r}/dt$ με την οποία κινείται το υλικό σημείο επάνω στην τροχιά του και από τον τρόπο που αυτή μεταβάλλεται σε σχέση με τον χρόνο. Από την παραπάνω σχέση προκύπτει

$$\frac{dh}{dt} = \vec{v} \cdot (\nabla h) + \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Ο τελεστής

$$\frac{d}{dt} = \vec{v} \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t}$$

εξαρτάται από το πεδίο ταχυτήτων $\vec{v}$ και είναι γνωστός ως η μεταφορική ή ολική χρονική παράγωγος. Ο τελεστής $\partial/\partial t$ δίνει την τοπικό ρυθμό μεταβολής της ποσότητας και είναι γνωστός ως η τοπική χρονική παράγωγος.

4.3 Ρυθμός παραμόρφωσης

Η χωρική μεταβολή της ταχύτητας στην περιγραφή Euler δίνεται από τον τανυστή $\nabla \vec{v}$. Αναλύοντας τον τανυστή αυτόν στο συμμετρικό και στο αντισυμμετρικό του μέρος προκύπτει

$$\nabla \vec{v} = D + V$$

όπου

$$D = \frac{1}{2}[\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T]$$

και

$$V = \frac{1}{2}[\nabla \vec{v} - (\nabla \vec{v})^T].$$

Ο ταχυστής D είναι γνωστός ως ο ταχυστής ρυθμού παραμόρφωσης και ο ταχυστής V ως ο ταχυστής στροβίλωσης ή σπιν. Υπολογίζοντας την μεταφορική παράγωγο της χωρικής μεταβολής του πεδίου $\vec{u}$ βρίσκουμε

$$\frac{d(\nabla \vec{u})}{dt} = \vec{v} \cdot \nabla (\nabla \vec{u}) + \frac{\partial (\nabla \vec{u})}{\partial t}$$

όμως

$$\vec{v} \cdot \nabla (\nabla \vec{u}) = \nabla [(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{u}] - (\nabla \vec{v}) \cdot (\nabla \vec{u})$$

και

$$\frac{\partial (\nabla \vec{u})}{\partial t} = \nabla \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

και επομένως εφόσον $\vec{v} = d\vec{u}/dt$

$$\begin{aligned} \frac{d(\nabla \vec{u})}{dt} &= \nabla \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{u} \right] \\ &= \nabla \vec{v} - (\nabla \vec{v}) \cdot (\nabla \vec{u}). \end{aligned}$$

Στο όριο των μικρών παραμορφώσεων ο δεύτερος όρος είναι αμελητέος. Συνεπάγεται ότι ο ταχυστής ρυθμού παραμόρφωσης ισούται με την μεταφορική παράγωγο του ταχυστή έντασης του Euler και η στροβίλωση με την παράγωγο του ταχυστή στροφής

$$D = \frac{dE}{dt} \quad \text{και} \quad V = \frac{d\Omega}{dt}.$$

4.4 Μεταφορικές παράγωγοι όγκου και ολοκληρώματος

Έστω $\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t)$ η θέση ενός υλικού σημείου στην περιγραφή Lagrange. Η στοιχειώδης μεταβολή του αρχικού διανύσματος θέσης ισούται με

$$d\vec{r}_0 = dx_0 \hat{i} + dy_0 \hat{j} + dz_0 \hat{k}$$

με στοιχειώδη όγκο

$$dV_0 = dx_0 dy_0 dz_0.$$

Σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή $t = \text{σταθ}$ η χωρική μεταβολή του διανύσματος θέσης $\vec{r}$ ισούται με

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z_0} dz_0.$$

Ο στοιχειώδης όγκος που αυτή ορίζει δίνεται από το μικτό γινόμενο

$$\begin{aligned} dV_t &= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_0} dx_0 \right) \cdot \left[\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y_0} dy_0 \right) \times \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial z_0} dz_0 \right) \right] \\ &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_0} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y_0} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial z_0} \right) dV_0 \end{aligned}$$

όμως

$$\nabla_0 \vec{r} = \hat{i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_0} + \hat{j} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_0} + \hat{k} \frac{\partial \vec{r}}{\partial z_0}$$

η Ιακωβιανή και

$$J = \det(\nabla_0 \vec{r}) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_0} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y_0} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial z_0} \right).$$

Συνεπάγεται ότι ο στοιχειώδης όγκος την χρονική στιγμή dV_t ισούται με τον αρχικό όγκο dV_0 επί την ορίζουσα της Ιακωβιανής

$$dV_t = J dV_0.$$

Παίρνοντας την μεταφορική παράγωγο μπορούμε να βρούμε πως μεταβάλλεται ο στοιχειώδης όγκος γύρω από το υλικό σημείο $\vec{r}(t)$ καθώς αυτό κινείται στον χώρο. Θα ισχύει

$$\frac{d(dV_t)}{dt} = \frac{dJ}{dt} dV_0$$

όπου

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_0} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y_0} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial z_0} \right) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y_0} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial z_0} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_0} \right) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z_0} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_0} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_0} \right).$$

Αντικαθιστώντας

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_0} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_0} \cdot \nabla \vec{v}, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial y_0} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_0} \cdot \nabla \vec{v} \quad \text{και} \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial z_0} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z_0} \cdot \nabla \vec{v}$$

στην έκφραση από πάνω προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= (\nabla \vec{v}) : \left[\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y_0} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial z_0} \right) \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_0} + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial z_0} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_0} \right) \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_0} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x_0} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_0} \right) \frac{\partial \vec{r}}{\partial z_0} \right] \\ &= J \nabla \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποίησαμε τον τύπο

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \mathbb{I} &= \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b}) \\ &= (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a})\vec{b} + (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} \end{aligned}$$

και ότι

$$(\nabla \vec{v}) : \mathbb{I} = \text{tr}(\nabla \vec{v}) = \nabla \cdot \vec{v}.$$

Η μεταφορική παράγωγος του στοιχειώδους όγκου στην περιγραφή Euler επομένως ισούται με

$$\frac{d(dV_t)}{dt} = (\nabla \cdot \vec{v}) dV_t.$$

Οποιοδήποτε μέγεθος Q που δίνεται από το ολοκλήρωμα μιας πεδιακής ποσότητας $q(\vec{r}, t)$ στον όγκο V_t

$$Q(t) = \int_{V_t} q(\vec{r}, t) dV_t$$

μπορούμε να το παραγωγίσουμε ως προς τον χρόνο και να πάρουμε

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \int_{V_t} \left(\frac{dq}{dt} dV_t + q \frac{d(dV_t)}{dt} \right) \\ &= \int_{V_t} \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla q + q \nabla \cdot \vec{v} \right) dV_t \\ &= \int_{V_t} \left[\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (q\vec{v}) \right] dV_t. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον νόμο του Gauss αντικαθιστούμε το δεύτερο ολοκλήρωμα με ένα κλειστό επιφανειακό ολοκλήρωμα επάνω στην συνοριακή επιφάνεια S_t για να βρούμε

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{V_t} \frac{\partial q}{\partial t} dV_t + \oint_{S_t} \hat{n} \cdot (q\vec{v}) dS_t.$$

Η χρονική μεταβολή ενός φυσικού μεγέθους επομένως εξαρτάται από δύο παράγοντες. Τον τοπικό ρυθμό μεταβολής της ποσότητας στον όγκο V_t (ο οποίος κατά την διάρκεια της ροής μεταφέρεται και αλλάζει σχήμα) και στην ροή της ποσότητας διαμέσου της συνοριακής επιφάνειας S_t .

Από τον τρόπο που έχει οριστεί, ο όγκος V_t αποτελείται πάντα από τα ίδια σημεία τα οποία κινούμενα επάνω στις τροχιές τους προκαλούν αλλαγές στην θέση και στο σχήμα της συνοριακής του επιφάνειας S_t . Συνεπάγεται ότι η συνολική μάζα

$$m = \int_{V_t} \rho(\vec{r}, t) dV_t$$

παραμένει πάντα σταθερή όπου $\rho(\vec{r}, t)$ η πυκνότητα του υλικού. Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο βρίσκουμε

$$\frac{dm}{dt} = \int_{V_t} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV_t = 0.$$

Από την οποία προκύπτει η εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0.$$

4.5 Εξισώσεις κίνησης

Η συνολική ορμή $\vec{P}$ ενός όγκου πυκνότητας $\rho(\vec{r}, t)$ υπολογίζεται από την σχέση

$$\vec{P}(t) = \int \vec{v} dm = \int_{V_t} \rho \vec{v} dV_t.$$

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα η συνολική δύναμη που ασκείται στο υλικό ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της ορμής. Προκύπτει λοιπόν

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= \oint_{S_t} \vec{t}_{\hat{n}} dS_t + \int_{V_t} \rho \vec{b} dV_t \\ &= \int_{V_t} (\nabla \cdot \Sigma + \rho \vec{b}) dV_t. \end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{P}}{dt} &= \int \frac{d\vec{v}}{dt} dm + \int \vec{v} \frac{dm}{dt} \\ &= \int_{V_t} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV_t\end{aligned}$$

και επομένως

$$\nabla \cdot \Sigma + \rho \vec{b} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Αυτή είναι η μορφή των εξισώσεων κίνησης σε διαφορική μορφή. Για ένα στατικό μέσο όπου $d\vec{v}/dt = 0$

$$\nabla \cdot \Sigma + \rho \vec{b} = 0$$

από την οποία ανακτάμε την μορφή των εξισώσεων ισορροπίας που βρήκαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τις περιστροφικές κινήσεις γνωρίζουμε ότι η συνισταμένη των ροπών που ασκούνται στο εσωτερικό του όγκου V_t ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής

$$\frac{d}{dt} \int (\vec{r} \times \vec{v}) dm = \oint_{S_t} \vec{r} \times (\hat{n} \cdot \Sigma) dS_t + \int_{V_t} \vec{r} \times (\rho \vec{b}) dV_t.$$

Σε προηγούμενο κεφάλαιο αποδείξαμε ότι για έναν συμμετρικό τα-
νυστή τάσης το δεξί μέλος μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$\int_{V_t} \vec{r} \times (\nabla \cdot \Sigma + \rho \vec{b}) dV_t.$$

Όμως

$$\frac{d}{dt} \int (\vec{r} \times \vec{v}) dm = \int_{V_t} (\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}) \rho dV_t.$$

Εξισώνοντας τα δύο μέλη καταλήγουμε πάλι στην εξίσωση κίνησης.

4.6 Αρχή διατήρησης μηχανική ενέργειας

Η κινητική ενέργεια που περιέχεται στον όγκο V_t ισούται με

$$K = \frac{1}{2} \int v^2 dm.$$

Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο προκύπτει ότι ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας ισούται με

$$\frac{dK}{dt} = \int \rho \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} dV_t.$$

Από τις εξισώσεις κίνησης όμως

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla \cdot \Sigma + \rho \vec{b}$$

και

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \Sigma) \cdot \vec{v} &= \nabla \cdot (\Sigma \cdot \vec{v}) - (\nabla \vec{v}) : \Sigma \\ &= \nabla \cdot (\Sigma \cdot \vec{v}) - D : \Sigma \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την έκφραση για την βάρθρωση της ταχύτητας που βρήκαμε προηγουμένως, την συμμετρία του τανυστή τάσης και το γεγονός ότι το διπλό εσωτερικό γινόμενο ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού τανυστή ισούται πάντα με μηδέν. Ορίζοντας ως

$$\frac{dU}{dt} = \int_{V_t} (D : \Sigma) dV_t$$

τον ρυθμό μεταβολής της εσωτερικής ενέργειας που περικλείεται στον όγκο V_t καταλήγουμε σε μία σχέση της μορφής

$$\frac{d(K + U)}{dt} = \oint_{S_t} \vec{t}_{\hat{n}} \cdot \vec{v} dS_t + \int_{V_t} \rho \vec{b} \cdot \vec{v} dV_t$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον νόμο του Gauss για να μετατρέψουμε το ολοκλήρωμα όγκου για το $\nabla \cdot (\Sigma \cdot \vec{v})$ σε επιφανειακό. Ο ρυθμός μεταβολής της μηχανική ενέργειας $K+U$ ισούται με τον ρυθμό μεταβολής του έργου που προκαλούν οι δυνάμεις μάζας στο εσωτερικό του όγκου V_t και οι επιφανειακές δυνάμεις στο σύνορό S_t .

4.7 Ασκήσεις

Άσκηση 4.1. Αποδείξτε ότι η εξίσωση συνέχειας μπορεί να γραφεί εναλλακτικά στην μορφή

$$\frac{d(\rho J)}{dt} = 0,$$

όπου J η ορίζουσα της Ιακωβιανής. (Χρησιμοποιείτε την συνήθη μορφή της εξίσωσης συνέχειας και το γεγονός ότι $dJ/dt = J \nabla \cdot \vec{v}$).

Άσκηση 4.2. Δείξτε ότι για το ακόλουθο πεδίο ταχυτήτων

$$\vec{v} = \frac{A}{(x^2 + y^2)^2} \left[(x^2 - y^2)\hat{i} + 2xy\hat{j} \right]$$

η πυκνότητα ρ είναι σταθερή.

Άσκηση 4.3. Έστω δισδιάστατο πεδίο ταχυτήτων της μορφής

$$\vec{v} = -\frac{Ay}{(x^2 + y^2)^2} \hat{i} + v_y \hat{j}.$$

Να βρεθεί η μορφή της συνιστώσας v_y συναρτήσει των μεταβλητών x και y έτσι ώστε η πυκνότητα να είναι σταθερή. Δείξτε ότι οι γραμμές ροής σε αυτή την περίπτωση σχηματίζουν ομόκεντρους κύκλους.

Κεφάλαιο 5

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

Η γραμμική ελαστικότητα αποτελεί περίπτωση μικρών παραμορφώσεων. Σε ένα γραμμικό υλικό η σχέση που συνδέει την τάση Σ με την ένταση E δίνεται από τον γενικευμένο νόμο του Hooke

$$\Sigma = \tilde{C} : E$$

όπου $\tilde{C}$ ο τανυστής ελαστικότητας. Από την παραπάνω σχέση έπεται ότι ο $\tilde{C}$ είναι τανυστής τάξης 4. Οι $3^4 = 81$ σταθερές συνιστώσες του διαφέρουν από υλικό σε υλικό και είναι χαρακτηριστικές του μέσου. Για έναν συμμετρικό τανυστή τάξης θα ισχύει

$$(\tilde{C} : E)^T = \tilde{C} : E$$

ενώ για έναν συμμετρικό τανυστή έντασης (όπως στην περίπτωση των μικρών παραμορφώσεων που εξετάζουμε εδώ)

$$\tilde{C} : E = \tilde{C} : E^T.$$

Οποιονδήποτε τανυστή 4ης τάξης μπορούμε πάντα να τον φέρουμε στην μορφή

$$\tilde{C} = \sum_{ij} C_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j$$

όπου $\hat{e}_i$ ορθοκανονική βάση και C_{ij} τανυστές τάξης 2. Αντικαθιστώντας στην πρώτη ισότητα προκύπτει ότι

$$\sum_{ij} C_{ij}^T (\hat{e}_i \hat{e}_j : E) = \sum_{ij} C_{ij} (\hat{e}_i \hat{e}_j : E)$$

που ικανοποιείται όταν $C_{ij}^T = C_{ij}$. Από την δεύτερη ισότητα βρίσκουμε

$$\sum_{ij} C_{ij}(\hat{e}_i \hat{e}_j : E) = \sum_{ij} C_{ij}(\hat{e}_i \hat{e}_j : E^T)$$

και εφόσον $\hat{e}_i \hat{e}_j : E^T = \hat{e}_j \hat{e}_i : E$ θα πρέπει να ισχύει $C_{ij} = C_{ji}$. Ο τανυστής ελαστικότητας θα περιγράφεται πλέον από 6 ανεξάρτητους, συμμετρικούς τανυστές δεύτερης τάξης ρίχνοντας τον συνολικό αριθμό ανεξαρτήτων συνιστωσών από 81 σε 36.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο βρήκαμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της εσωτερικής ενέργειας ισούται με

$$\frac{dU}{dt} = \int_{V_t} (D : \Sigma) dV_t$$

όπου $D = dE/dt$. Για γραμμικά υλικά

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \int_{V_t} \left(\frac{dE}{dt} : \tilde{C} : E \right) dV_t \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{V_t} E : \tilde{C} : E dV_t \right) + \frac{1}{2} \int_{V_t} \left(\frac{dE}{dt} : \tilde{C} : E - E : \tilde{C} : \frac{dE}{dt} \right) dV_t. \end{aligned}$$

Η εσωτερική ενέργεια λοιπόν δίνεται από την σχέση

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_t} (E : \tilde{C} : E) dV_t + \int^t \mathcal{U}(t') dt'$$

όπου

$$\mathcal{U}(t') = \frac{1}{2} \int_{V_{t'}} \left(\frac{dE}{dt'} : \tilde{C} : E - E : \tilde{C} : \frac{dE}{dt'} \right) dV_{t'}.$$

Ο όρος $\mathcal{U}(t')$ περιέχει όρους τρίτης τάξης ως προς παραγώγους της μετατόπισης. Στο όριο των μικρών παραμορφώσεων επομένως αυτός μηδενίζεται που σημαίνει ότι

$$\frac{dE}{dt} : \tilde{C} : E = E : \tilde{C} : \frac{dE}{dt}.$$

Αντικαθιστώντας όπου

$$E = \sum_{ij} \varepsilon_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j$$

προκύπτει ότι

$$\sum_{ijkl} (\hat{e}_i \hat{e}_j) : C_{kl} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} \varepsilon_{kl} = \sum_{ijkl} (\hat{e}_k \hat{e}_l) : C_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} \varepsilon_{kl}$$

που ικανοποιείται όταν

$$(\hat{e}_i \hat{e}_j) : C_{kl} = (\hat{e}_k \hat{e}_l) : C_{ij}.$$

Η παραπάνω ισότητα μειώνει περαιτέρω τον αριθμό ανεξαρτήτων συνιστωσών του τανυστή ελαστικότητας. Καθώς η έκφραση είναι συμμετρική ως προς την εναλλαγή των ζευγαριών δεικτών ij και kl συνεπάγεται ότι στην γραμμική περίπτωση ο $\tilde{C}$ θα περιγράφεται από 21 το πολύ ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές.

5.1 Ισότροπα υλικά

Έστω S συμμετρία του χώρου και $\Sigma' = S \cdot \Sigma \cdot S^T$, $E' = S \cdot E \cdot S^T$ η τάση και η ένταση που προκύπτει από την δράση της συμμετρίας επάνω στους τανυστές Σ και E . Εφόσον το υλικό παραμένει γραμμικό ανεξάρτητα από την αλλαγή συντεταγμένων ο γενικευμένος νόμος του Hooke θα ισχύει πάντα και επομένως

$$\Sigma' = \tilde{C}' : E'$$

όπου $\tilde{C}'$ ο νέος τανυστής ελαστικότητας. Εάν $\tilde{C}' = \tilde{C}$ τότε λέμε ότι ο τανυστής ελαστικότητας παραμένει αναλλοίωτος ως προς τη δράση του S . Το σύνολο των συμμετριών που αφήνουν αναλλοίωτες τις ελαστικές ιδιότητες ενός υλικού ικανοποιούν την σχέση

$$S \cdot (\tilde{C} : E) \cdot S^T = \tilde{C} : (S \cdot E \cdot S^T)$$

και επιβάλουν επιπλέον περιορισμούς για το $\tilde{C}$ μειώνοντας ακόμη περισσότερο τον αριθμό των ανεξαρτήτων συνιστωσών που τον περιγράφουν.

Ένα υλικό για το οποίο ο τανυστής ελαστικότητας παραμένει αναλλοίωτος κάτω από οποιαδήποτε συμμετρία του τριδιάστατου

χώρου (που περιλαμβάνει ανακλάσεις ως προς οποιοδήποτε επίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων και περιστροφές ως προς τυχαίο άξονα) ονομάζεται *ισότροπο*. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν μόνο δύο ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές λ και μ γνωστές ως οι *σταθερές του Lamé*. Ο γενικευμένος νόμος του Hooke για ισότροπα υλικά είναι της μορφής

$$\Sigma = \lambda \text{tr}(E)\mathbb{I} + 2\mu E$$

όπου $\text{tr}(E)$ το ίχνος του τανυστή έντασης. Ισχύει ότι

$$\text{tr}(\Sigma) = (3\lambda + 2\mu)\text{tr}(E)$$

και άρα

$$\text{tr}(E) = \frac{\text{tr}(\Sigma)}{3\lambda + 2\mu}.$$

Αντικαθιστώντας στον γενικευμένο νόμο του Hooke μπορούμε να βρούμε την ένταση που προκαλεί μια τάση από την σχέση

$$E = \frac{1}{Y}[(1 + \nu)\Sigma - \nu \text{tr}(\Sigma)\mathbb{I}]$$

όπου

$$Y = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

το μέτρο Young και

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

ο συντελεστής Poisson.

Παράδειγμα 5.1. (Μονοαξονική τάση.)

Έστω τάση της μορφής

$$\Sigma = \hat{\hat{i}}\hat{\hat{i}}$$

που ασκεί μια πίεση σ στην διεύθυνση του άξονα x . Η ένταση που αυτή προκαλεί θα ισούται με

$$E = \frac{\sigma}{Y}[\hat{\hat{i}}\hat{\hat{i}} - \nu(\hat{\hat{j}}\hat{\hat{j}} + \hat{\hat{k}}\hat{\hat{k}})].$$

Παρατηρούμε ότι η τάση προκαλεί μια διαστολή του υλικού στην διεύθυνση x ενώ συστέλλει ομοιόμορφα τις κάθετες διευθύνσεις y και z . Παράδειγμα τέτοιας παραμόρφωσης αποτελεί ένας κύλινδρος στον οποίο ασκούνται αντίθετες δυνάμεις στις δύο βάσεις του παράλλες στον άξονα συμμετρίας.

Παράδειγμα 5.2. (Απλή διάτμηση)

Σε αυτή την περίπτωση ο τανυστής τάσης έχει μόνο μη διαγώνιες συνιστώσες

$$\Sigma = \sigma(\hat{i}\hat{j} + \hat{j}\hat{i}).$$

Συνεπάγεται ότι $tr(\Sigma) = 0$ και επομένως

$$E = \frac{1 + \nu}{Y} \Sigma.$$

Η παραμόρφωση που αντιστοιχεί σε αυτή την ένταση δεν μεταβάλλει τα μήκη παρά μόνο την γωνία μεταξύ των αξόνων x και y κατά γωνία ίση με $(1 + \nu)/2Y$. Παραμόρφωση αυτού του είδους επιτυγχάνεται συστρέφοντας τις βάσεις ενός κυλίνδρου με αντίθετη φορά.

Παράδειγμα 5.3. (Ομοιόμορφη υδροστατική πίεση)

Σε αυτή την περίπτωση ο τανυστής της τάσης είναι ισότροπος

$$\Sigma = \sigma \mathbb{I}$$

και

$$E = \frac{1 - 2\nu}{Y} \sigma \mathbb{I}.$$

5.2 Ελαστοστατική και ελαστοδυναμική

Αντικαθιστώντας την τιμή της τάσης από τον γενικευμένο νόμο του Hooke στην εξίσωση κίνησης

$$\nabla \cdot \Sigma + \rho \vec{b} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}$$

προκύπτει μια διαφορική εξίσωση για το πεδίο μετατόπισης $\vec{u}$ η λύση της οποίας δίνει τον τρόπο με τον οποίο θα παραμορφωθεί το

υλικό όταν σε αυτό ασκηθούν τάσεις, υπό την παρουσία εξωτερικών δυνάμεων μάζας $\vec{b}$. Για την επίλυσή της απαιτούνται αρχικές και συνοριακές συνθήκες. Οι αρχικές συνθήκες επιβάλλουν την γνώση της αρχικής μετατόπισης και του πεδίου ταχυτήτων την χρονική στιγμή t_0

$$\vec{u}_0 = \vec{u}(\vec{r}, t_0) \quad \text{και} \quad \vec{v}_0 = \vec{v}(\vec{r}, t_0).$$

Για τις συνοριακές συνθήκες διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

- i) Δοσμένη μετατόπιση $\vec{u} = \vec{g}$ στο σύνορο S .
- ii) Δοσμένη πίεση $\hat{n} \cdot \Sigma = T$ επάνω στην συνοριακή επιφάνεια S .
- iii) Δοσμένη μετατόπιση $\vec{u} = \vec{g}$ σε ένα υποσύνολο $\Omega \subset S$ της συνοριακής επιφάνειας και δοσμένη πίεση $\hat{n} \cdot \Sigma = T$ στο συμπλήρωμα $\Omega^c \subset S$.

Εάν η μετατόπιση επάνω στην συνοριακή επιφάνεια ισούται με μηδέν ($\vec{g} = 0$) τότε λέμε ότι η επιφάνεια είναι σκληρή. Αν η τιμή της τάσης μηδενίζεται στο σύνορο ($T = 0$) τότε η επιφάνεια ονομάζεται ελεύθερη. Για ένα ομογενές και ισότροπο υλικό όπου οι συντελεστές λ και μ έχουν την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία του μέσου

$$\nabla \cdot \Sigma = \lambda \nabla [\text{tr}(E)] + 2\mu \nabla \cdot E$$

όμως

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{2} [\Delta \vec{u} + \nabla (\nabla \cdot \vec{u})]$$

και

$$\text{tr}(E) = \nabla \cdot \vec{u}.$$

Επομένως

$$\nabla \cdot \Sigma = \mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}).$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση κίνησης βρίσκουμε

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \rho \vec{b} = \rho \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2}.$$

Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή ως η εξίσωση Navier-Cauchy. Εάν $d^2 \vec{u}/dt^2 = 0$ τότε έχουμε ένα πρόβλημα ελαστοστατικής. Σε αντίθετη περίπτωση το πρόβλημα είναι ελαστοδυναμικό.

5.3 Εγκάρσια και διαμήκη κύματα

Έστω ότι οι δυνάμεις μάζας είναι αμελητέες σε σχέση με την τάση και μπορούν να αγνοηθούν σε πρώτη προσέγγιση. Αντικαθιστώντας $\vec{b} = 0$ στην εξίσωση Navier-Cauchy και διαιρώντας με την πυκνότητα βρίσκουμε

$$\frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{u} + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) = \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2}.$$

Αναλύουμε τώρα την μετατόπιση ως το άθροισμα ενός αστροβίλιου πεδίου $\vec{u}_P$ και ενός πεδίου $\vec{u}_S$ με μηδενική απόκλιση

$$\vec{u} = \vec{u}_P + \vec{u}_S$$

όπου $\nabla \times \vec{u}_P = 0$ και $\nabla \cdot \vec{u}_S = 0$. Όμως

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{u}_P) = \nabla (\nabla \cdot \vec{u}_P) - \Delta \vec{u}_P = 0$$

από το οποίο προκύπτει ότι $\nabla (\nabla \cdot \vec{u}_P) = \Delta \vec{u}_P$. Τελικά

$$\frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{u}_S + \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \Delta \vec{u}_P = \frac{d^2 \vec{u}_S}{dt^2} + \frac{d^2 \vec{u}_P}{dt^2}$$

που ικανοποιείται όταν

$$\frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{u}_S = \frac{d^2 \vec{u}_S}{dt^2} \quad \text{και} \quad \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \Delta \vec{u}_P = \frac{d^2 \vec{u}_P}{dt^2}.$$

Παρατηρούμε ότι οι μετατοπίσεις ικανοποιούν και οι δύο κυματικές εξισώσεις με φασικές ταχύτητες $c_S^2 = \mu/\rho$ και $c_P^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$. Η μετατόπιση $\vec{u}_P$ έχει ακτινική διεύθυνση με κέντρο την πηγή του κύματος ενώ η μετατόπιση $\vec{u}_S$ είναι εφαπτομενική, κάθετη στην $\vec{u}_P$. Τα κύματα P ταλαντώνονται στην διεύθυνση διάδοσης του κύματος και είναι διαμήκη ενώ τα κύματα S εγκάρσια. Παρατηρούμε ότι $c_P > c_S$. Αυτός είναι ο λόγος που σε έναν σεισμό το έδαφος πρώτα δονείται και μετά αρχίζει να κουνιέται δεξιά και αριστερά. Η χρονική απόσταση Δt μεταξύ των δύο κυμάτων εξαρτάται από το εστιακό βάθος r από το κέντρο του σεισμού και ισούται με

$$\Delta t = r \sqrt{\rho \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}}.$$

5.4 Ασκήσεις

Άσκηση 5.1. Δείξτε ότι η απόκλιση του τανυστή έντασης του Euler E ισούται με

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{2}[\Delta \vec{u} + \nabla(\nabla \cdot \vec{u})]$$

και το ίχνος του με

$$\text{tr}(E) = \nabla \cdot \vec{u}.$$

Άσκηση 5.2. Δείξτε ότι απουσία δυνάμεων μάζας το ακόλουθο πεδίο μετατοπίσεων

$$\vec{u} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \Delta \vec{F} - \nabla \nabla \cdot \vec{F} \right]$$

για ένα ομογενές και ισότροπο υλικό ικανοποιεί την εξίσωση Navier-Cauchy εάν

$$\Delta^2 \vec{F} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = 0.$$

Άσκηση 5.3. Δείξτε ότι η εσωτερική ενέργεια U για ένα γραμμικό και ισότροπο υλικό δίνεται από την σχέση

$$U = \frac{1}{2Y} \int [(1 + \nu)\Sigma : \Sigma - \nu(\text{tr}\Sigma)^2] dV$$

όπου Y το μέτρο Young και ν ο συντελεστής Poisson.

Άσκηση 5.4. Έστω κύλινδρος ύψους L και ακτίνας a . Βρείτε την εσωτερική ενέργεια του κυλίνδρου για έναν τανυστή τάσεων της μορφής

$$\Sigma = G(-y\hat{i} + x\hat{j})\hat{k}$$

όπου G σταθερά.

Κεφάλαιο 6

ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

Για ένα ρευστό σε ισορροπία ο τανυστής της τάσης έχει την μορφή

$$\Sigma = -p\mathbb{I}$$

όπου p η υδροστατική πίεση (το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει ότι αυτή συμπιέζει το ρευστό). Εάν το ρευστό κινείται θα ασκούνται σε αυτό επιπλέον δυνάμεις λόγω τριβής. Σε αυτή την περίπτωση ο τανυστής τάσεων θα ισούται με

$$\Sigma = -p\mathbb{I} + \Gamma.$$

Ο τανυστής Γ είναι χαρακτηριστικός του ρευστού και ονομάζεται τανυστής ιξώδους τάσης. Ένα ρευστό με μηδενικό ιξώδες ($\Gamma = 0$) ονομάζεται ιδανικό. Στην γενική περίπτωση η πίεση είναι συνάρτηση της πυκνότητας ρ και της θερμοκρασίας T του ρευστού και δίνεται από μία καταστατική εξίσωση της μορφής $p = p(\rho, T)$. Χαρακτηριστικό παράδειγμα το ιδανικό αέριο για το οποίο

$$p = \rho RT$$

όπου R η σταθερά των ιδανικών αερίων. Όταν η πίεση είναι συνάρτηση της πυκνότητας μόνο $p = p(\rho)$ τότε το ρευστό ονομάζεται βαροτροπικό.

6.1 Νευτώνεια ρευστά

Ο ταυιστής ιξώδους τάσης Γ συνδέεται με τον ταυιστή ρυθμού παραμόρφωσης D με μία σχέση της μορφής

$$\Gamma = f(D).$$

Ένα ρευστό για το οποίο η σχέση είναι μη γραμμική ονομάζεται *μη-Νευτώνειο*. Σε αντίθετη περίπτωση ισχύει

$$\Gamma = \tilde{K} : D$$

και το ρευστό ονομάζεται *Νευτώνειο*. Ο ταυιστής τέταρτης τάξης $\tilde{K}$ περιέχει ως συνιστώσες τους συντελεστές ιξώδους του ρευστού και αποτελεί το ανάλογο του ταυιστή ελαστικότητας $\tilde{C}$. Για ένα ομογενές και ισότροπο ρευστό ο ταυιστής των τάσεων ισούται με

$$\Sigma = -p\mathbb{I} + \lambda^* \text{tr}(D)\mathbb{I} + 2\mu^* D$$

όπου λ^* και μ^* σταθερές. Υπολογίζοντας το ίχνος στα δύο μέλη προκύπτει ότι

$$p = -\frac{1}{3}\text{tr}(\Sigma) + \kappa^* \text{tr}(D)$$

όπου

$$\kappa^* = \lambda^* + \frac{2\mu^*}{3}$$

ο συντελεστής ιξώδους μάζας.

6.2 Η εξίσωση Navier-Stokes

Η απόκλιση του ταυιστή τάσεων για ένα ομογενές και ισότροπο ρευστό ισούται με

$$\nabla \cdot \Sigma = -\nabla p + \lambda^* \nabla(\text{tr} D) + 2\mu^* \nabla \cdot D$$

όπου $\text{tr} D = \nabla \cdot \vec{v}$ και

$$\nabla \cdot D = \frac{1}{2}[\Delta \vec{v} + \nabla(\nabla \cdot \vec{v})].$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση κίνησης

$$\nabla \cdot \Sigma + \rho \vec{b} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}$$

προκύπτει

$$-\nabla p + (\lambda^* + \mu^*) \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) + \mu^* \Delta \vec{v} + \rho \vec{b} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Για ένα ασυμπίεστο ρευστό ($d\rho/dt = 0$) από την εξίσωση συνέχειας προκύπτει ότι $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ και επομένως

$$-\nabla p + \mu^* \Delta \vec{v} + \rho \vec{b} = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή ως η εξίσωση Navier-Stokes. Μαζί με την εξίσωση συνέχειας

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

αποτελεί ένα σύστημα τεσσάρων μερικών διαφορικών εξισώσεων με αγνώστους τα p και $\vec{v}$ για την επίλυσή του οποίου απαιτείται η γνώση των συνοριακών και αρχικών συνθηκών. Για ένα ιξώδες ρευστό η ταχύτητα μηδενίζεται επάνω στο σύνορο ($\vec{v} = 0$). Η συνοριακή αυτή συνθήκη έχει εξαχθεί πειραματικά καθώς έχει παρατηρηθεί ότι ένα ιξώδες ρευστό παραμένει ακίνητο στα τοιχώματα του. Για ένα ιδανικό ρευστό μονάχα η κάθετη στην συνοριακή επιφάνεια ταχύτητα μηδενίζεται $\hat{n} \cdot \vec{v}$ (ώστε να μη υπάρχει διαρροή του ρευστού δια μέσω του τοιχώματος). Η ύπαρξη ή μη φυσικά αποδεκτών λύσεων (που να μην απειρίζονται για μεγάλους χρόνους και αποστάσεις) της εξίσωσης Navier-Stokes αποτελεί ανοιχτό πρόβλημα η λύση του οποίου συνοδεύεται από βραβείο ενός εκατομμυρίου δολαρίων από το ινστιτούτο Clay.

6.3 Ιδανικά ρευστά

Για ιδανικά ρευστά $\mu^* = 0$ και η εξίσωση Navier-Stokes ανάγεται στην εξίσωση Euler

$$\rho \vec{b} - \nabla p = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Για ένα βαροτροπικό ρευστό $\rho = \rho(p)$ υπό την παρουσία διατηρητικού πεδίου δυνάμεων μάζας, $\vec{b} = -\nabla\Omega$ ισχύει ότι

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla(\Omega + P)$$

όπου

$$P(p) = \int \frac{dp}{\rho}$$

συνάρτηση πίεσης για την οποία ισχύει

$$\nabla P = \frac{\nabla p}{\rho}.$$

Όμως

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

όπου

$$\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$

και επομένως

$$\nabla \left(\Omega + P + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}).$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της σχέσης αυτής ως προς $d\vec{r}$ ισούται με

$$\int d \left(\Omega + P + \frac{v^2}{2} \right) + \int_C \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{r}$$

όπου η ολοκλήρωση υπολογίζεται κατά μήκος της καμπύλης C που δίνεται από μία εξίσωση της μορφής $\vec{r} = \vec{r}(s)$. Για μία γραμμική ροής ισχύει ότι

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

και επομένως

$$\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{r} = 0.$$

Σε αυτή την περίπτωση η ποσότητα

$$\Omega + P + \frac{v^2}{2} + \int_C \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{r}$$

παίρνει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία της γραμμής ροής και εξαρτάται μόνο από τον χρόνο η εξίσωση

$$\Omega + P + \frac{v^2}{2} + \int_C \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{r} = \beta(t)$$

είναι γνωστή ως η εξίσωση *Bernoulli*. Για ένα αστρόβιλο πεδίο ταχυτήτων ($\nabla \times \vec{v} = 0$) η εξίσωση Bernoulli παίρνει την ίδια τιμή επάνω σε οποιαδήποτε καμπύλη C . Στην περίπτωση σταθερού πεδίου ταχυτήτων $\partial \vec{v} / \partial t = 0$ η σταθερά $\beta(t)$ είναι ανεξάρτητη του χρόνου.

Ορίζουμε τώρα ως κυκλοφορία της ταχύτητας γύρω από μία κλειστή καμπύλη την ποσότητα

$$\mathcal{C} = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r}.$$

Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο προκύπτει ότι

$$\frac{d\mathcal{C}}{dt} = \oint_C \left[\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} + \vec{v} \cdot d\vec{v} \right].$$

Για ένα βαροτροπικό ιδανικό ρευστό υπό την επήρεια διατηρητικών δυνάμεων μάζας η κυκλοφορία είναι σταθερή

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{C}}{dt} &= - \oint_C \nabla(\Omega + P) \cdot d\vec{r} + \frac{1}{2} \oint_C dv^2 \\ &= \oint_C d \left(\frac{v^2}{2} - \Omega - P \right) = 0. \end{aligned}$$

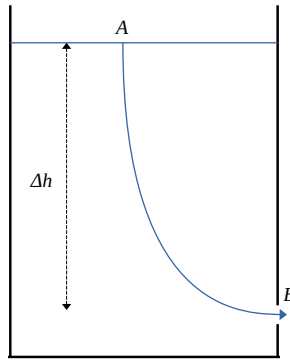
Αυτό είναι γνωστό ως το θεώρημα *Kelvin*.

6.4 Εφαρμογές εξίσωσης Bernoulli

Για σταθερή ροή και αστρόβιλο πεδίο ταχυτήτων η εξίσωση Bernoulli παίρνει την μορφή

$$\Omega + P + \frac{v^2}{2} = \text{σταθερά}.$$

Για ένα βαρυτικό πεδίο δυνάμεων $\Omega = gh$ όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας και h το ύψος σε σχέση με κάποια στάθμη αναφοράς.



Σχήμα 6.1

Εάν η πίεση είναι ανεξάρτητη της πυκνότητας ισχύει ότι $P = p/\rho$. Σε αυτή την περίπτωση

$$gh + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{σταθερά}.$$

Έστω τώρα δοχείο από το οποίο ρέει ιδανικό ρευστό μέσω μίας οπής στο κάτω μέρος του όπως στο Σχήμα 6.1. Για τα σημεία A και B θα ισχύει

$$gh_A + \frac{p_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} = gh_B + \frac{p_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2}.$$

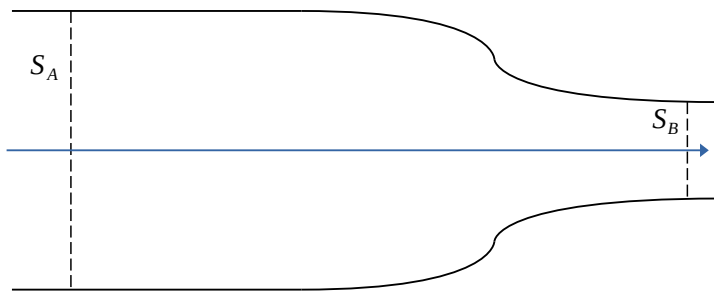
Οι πιέσεις στα σημεία αυτά είναι και οι δύο ίσες με την ατμοσφαιρική. Υπό την προσέγγιση ότι η ροή είναι τέτοια ώστε στο σημείο A η ταχύτητα του ρευστού να ισούται με μηδέν, μπορούμε να λύσουμε την ισότητα ως προς v_B και να βρούμε το μέτρο της ταχύτητας του ρευστού κατά την έξοδό του από το δοχείο

$$v_B = \sqrt{2g\Delta h}$$

όπου Δh η απόσταση της οπής από την πάνω επιφάνεια.

Ας θεωρήσουμε τώρα ρευστό που ρέει οριζόντια δια μέσω σωλήνα με μεταβαλλόμενη διατομή στην κατεύθυνση της ροής όπως στο Σχήμα 6.2. Για τα σημεία A και B θα ισχύει

$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} = \frac{p_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2}.$$



Σχήμα 6.2

Για ένα ασυμπίεστο ρευστό $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. Εφαρμόζοντας τον νόμο του Gauss στον όγκο που περικλείεται από τα τοιχώματα του σωλήνα και τις διατομές S_A και S_B προκύπτει ότι

$$\int_V \nabla \cdot \vec{v} dV = \oint \hat{n} \cdot \vec{v} dS = v_B S_B - v_A S_A = 0.$$

Το γινόμενο της ταχύτητας επί το εμβαδό της διατομής του σωλήνα παραμένει πάντα σταθερό. Στα σημεία όπου ο σωλήνας στενεύει η ροή αυξάνεται ενώ σε σημεία με πιο μεγάλη διατομή η ροή ελαττώνεται. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του Bernoulli βρίσκουμε

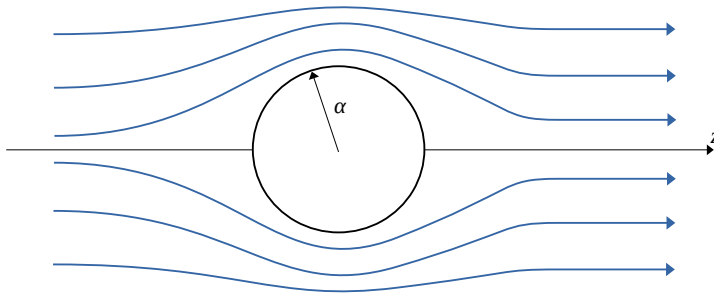
$$p_A - p_B = \frac{\rho v_A^2}{2} \frac{S_A^2 - S_B^2}{S_B^2}.$$

Η πίεση στο σημείο A επομένως είναι μεγαλύτερη από την πίεση στο σημείο B . Στα σημεία όπου η ταχύτητα της ροής είναι μεγαλύτερη η πίεση μειώνεται και αντίστροφα.

6.5 Προβλήματα ρευστομηχανικής

6.5.1 Κίνηση στερεάς σφαίρας σε ιδανικό ρευστό

Έστω τώρα ιδανικό ασυμπίεστο ρευστό που ρέει γύρω από σφαίρα ακτίνας a όπως στο Σχήμα 6.3. Εκμεταλλευόμενοι την συμμετρία του προβλήματος θα χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες



Σχήμα 6.3

για να μελετήσουμε αυτή την περίπτωση. Για ένα αστρόβιλο πεδίο ταχυτήτων θα ισχύει

$$\vec{v} = -\nabla\varphi.$$

όπου φ δυναμικό ταχύτητας. Εφόσον $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ προκύπτει ότι το δυναμικό θα ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace

$$\Delta\varphi = 0.$$

Επειδή η ροή έχει αξιμουθιακή συμμετρία γύρω από οριζόντιο άξονα που περνάει από το κέντρο της σφαίρας το δυναμικό θα εξαρτάται μόνο από την απόσταση r από το κέντρο και την πολική γωνία θ . Η γενική λύση της εξίσωσης Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες έχει την μορφή

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$

όπου A_{ℓ} , B_{ℓ} συντελεστές και

$$P_{\ell}(x) = \frac{1}{2^{\ell} \ell!} \frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}} (x^2 - 1)^{\ell}$$

τα πολυώνυμα Legendre. Από την βάθμωση του δυναμικού σε σφαιρικές συντεταγμένες βρίσκουμε ότι η ταχύτητα ισούται με

$$\begin{aligned} \vec{v}(r, \theta) &= -\hat{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\hat{\theta}}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ &= -\sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\ell A_{\ell} r^{\ell-1} - (\ell+1) \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+2}} \right) P_{\ell}(\cos \theta) \hat{r} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{\ell=0} \left(A_{\ell} r^{\ell-1} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+2}} \right) \sin \theta \frac{dP_{\ell}(x)}{dx} \hat{\theta}.$$

Στην επιφάνεια της σφαίρας η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας $\hat{r} \cdot \vec{v}(a, \theta)$ μηδενίζεται. Συνεπάγεται ότι

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\ell A_{\ell} a^{\ell-1} - (\ell+1) \frac{B_{\ell}}{a^{\ell+2}} \right) P_{\ell}(\cos \theta) = 0$$

από την οποία προκύπτει

$$B_{\ell} = \frac{\ell A_{\ell}}{\ell+1} a^{2\ell+1}.$$

Για να είναι πεπερασμένη η ταχύτητα σε μεγάλη απόσταση από το κέντρο της σφαίρας ($r \rightarrow \infty$) θα πρέπει

$$A_{\ell} = 0 \quad \text{για} \quad \ell \geq 2$$

και επομένως

$$\vec{v}(r, \theta) = -A_1 \hat{k} + \frac{A_1 a^3}{2r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\phi})$$

όπου χρησιμοποίησαμε την σχέση $P_1(x) = x$ και αντικαταστήσαμε όπου $\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta} = \hat{k}$. Μακριά από την σφαίρα η ροή του ρευστού είναι ομογενής στην διεύθυνση του άξονα z

$$\vec{v}_{\infty} = v(t) \hat{k}$$

από την οποία προκύπτει η τιμή $A_1 = -v(t)$ για τον συντελεστή A_1 .

6.5.2 Ακουστικά κύματα σε ιδανικά ρευστά

Απουσία εξωτερικών δυνάμεων η εξίσωση Navier-Stokes ενός ιδανικού ρευστού έχει την μορφή

$$-\nabla p = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Από την απόκλιση των δύο μελών προκύπτει

$$\Delta p = -\nabla \cdot \left(\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) - \nabla \cdot [\rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}]$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό για την μεταφορική παράγωγο της ταχύτητας. Όμως

$$\nabla \cdot \left(\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot (\rho \vec{v})] - \nabla \cdot \left(\vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)$$

και από την εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{v}).$$

Συνεπάγεται ότι

$$\Delta p = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \nabla \cdot [\vec{v} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}].$$

Στο όριο των μικρών παραμορφώσεων η ποσότητα εντός της αγκύλης είναι δεύτερης τάξης ως προς παραγώγους της ταχύτητας και επομένως μπορεί να αγνοηθεί σε πρώτη προσέγγιση. Τελικά προκύπτει

$$\Delta p = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}.$$

Για ένα βαροτροπικό υλικό $p = p(\rho)$ και

$$\Delta p = \left(\nabla \frac{dp}{d\rho} \right) \cdot (\nabla \rho) + \frac{dp}{d\rho} \Delta \rho.$$

Ομοίως μπορεί ναδειχθεί ότι

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d\rho}{dp} \right) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

Για αμελητέες μεταβολές της ποσότητας $dp/d\rho$ ως προς τον χώρο και τον χρόνο ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος των παραπάνω εξισώσεων μπορεί να αγνοηθεί και επομένως

$$\Delta p = \frac{1}{dp/d\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad \text{και} \quad \Delta \rho = \frac{1}{dp/d\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$$

δύο κυματικές εξισώσεις με φασική ταχύτητα

$$c = \frac{dp}{d\rho}.$$

Κάτω από αυτές τις συνθήκες σε ένα ιδανικό ρευστό μπορούν να διαδοθούν κύματα πίεσης και πυκνότητας. Η ταχύτητα c σε αυτή την περίπτωση είναι η ταχύτητα του ήχου. Σε ένα ιδανικό αέριο

$$p = b\rho^\gamma$$

όπου $\gamma = c_P/c_V$ ο λόγος των ειδικών θερμοτήτων και b σταθερά. Αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$c = \gamma b\rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{p}{\rho}.$$

6.5.3 Νευτώνεια ρευστά σε κίνηση

Ρευστό ανάμεσα από κινούμενες πλάκες

Έστω ιξώδες ρευστό μεταξύ δύο απείρων πλακών, σε απόσταση d μεταξύ τους, παράλληλων στο επίπεδο xy . Ας υποθέσουμε τώρα ότι η κάτω πλάκα παραμένει ακίνητη και ότι η πάνω κινείται με μια σταθερή ταχύτητα $\vec{v}_0$. Απουσία εξωτερικών δυνάμεων μάζας η εξ. Navier-Stokes έχει την μορφή

$$\mu^* \Delta \vec{v} - \nabla p = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Για αμελητέα μεταβολή της πίεσης, $\nabla p = 0$. Εάν η ροή είναι σταθερή τότε $d\vec{v}/dt = 0$. Σε αυτή την περίπτωση

$$\Delta \vec{v} = 0.$$

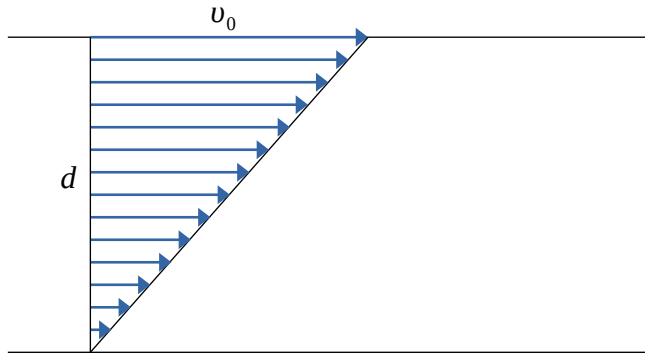
Από την γεωμετρία του προβλήματος είναι προφανές ότι η ταχύτητα μεταβάλλεται μόνο κατά την διεύθυνση του άξονα z και επομένως

$$\frac{d^2 \vec{v}}{dz^2} = 0 \implies \vec{v}(z) = \vec{a}z + \vec{c}$$

όπου $\vec{a}$ και $\vec{c}$ σταθερά διανύσματα. Η ταχύτητα του ρευστού στην κάτω πλάκα θα μηδενίζεται ενώ στην πάνω θα ισούται με $\vec{v}_0$. Προκύπτει ότι $\vec{a} = \vec{v}_0/d$ και $\vec{c} = 0$ και άρα

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}_0}{d} z.$$

Στο Σχήμα 6.4 δίνεται το πεδίο των ταχυτήτων σε έναν άξονα κάθετο στις πλάκες.



Σχήμα 6.4

Σταθερή ροή ανάμεσα από ακίνητες πλάκες.

Έστω τώρα ότι οι πλάκες είναι ακίνητες και το ρευστό ρέει ανάμεσά τους. Σε αυτή την περίπτωση λαμβάνουμε υπόψιν την βαθμίδα της πίεσης και επομένως

$$\mu^* \Delta \vec{v} = \nabla p.$$

Εάν η ροή εκτελείται στην διεύθυνση του άξονα x θα ισχύει

$$\mu^* \frac{d^2 v(z)}{dz^2} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

και

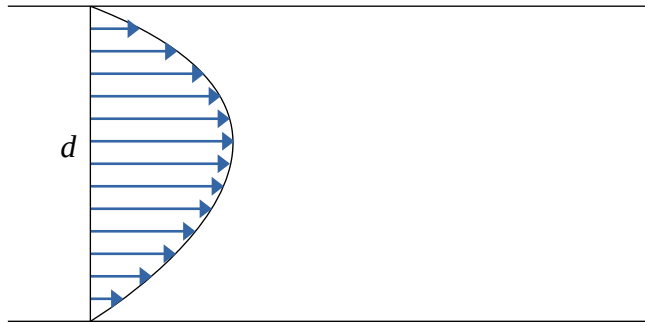
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Συνεπάγεται ότι η πίεση θα εξαρτάται μονάχα από την μεταβλητή x . Εφόσον όμως οι συντεταγμένες x και z είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους θα πρέπει να ισχύει

$$\frac{dp}{dx} = a \quad \text{και} \quad \mu^* \frac{d^2 v(z)}{dz^2} = a$$

για κάποια σταθερά a από τις οποίες προκύπτει

$$p(x) = ax + p_0 \quad \text{και} \quad v(z) = \frac{a}{2\mu^*} z^2 + bz + v_0.$$



Σχήμα 6.5

Οι συνοριακές συνθήκες επιβάλλουν στην κάτω και στην πάνω πλάκα η ταχύτητα να μηδενίζεται και επομένως $v_0 = 0$ και $b = -ad/2\mu^*$. Τελικά

$$v(z) = \frac{az}{2\mu^*}(z - d).$$

Το πεδίο ταχυτήτων επάνω στον άξονα z δίνεται στο Σχήμα 6.5.

6.6 Υδροστατική

Στην υδροστατική το πεδίο ταχυτήτων ισούται με μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση Navier-Stokes γίνεται

$$\rho \vec{b} - \nabla p = 0$$

την οποία μπορούμε να λύσουμε ως προς την πίεση για να βρούμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες ισχύει η ισορροπία.

6.6.1 Παραδείγματα ισορροπίας ρευστών

Απουσία εξωτερικών δυνάμεων

Σε αυτή την περίπτωση $\vec{b} = 0$ και επομένως η πίεση είναι σταθερή σε όλα τα σημεία του ρευστού. Η διαπίστωση αυτή είναι γνωστή ως ο νόμος του *Pascal*.

Ρευστό σε ομογενές πεδίο βαρύτητας

Στο πεδίο βαρύτητας της γης

$$\vec{b} = -g\hat{k}$$

και επομένως

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

Προκύπτει ότι

$$p(z) = -\rho g z + c.$$

όπου c σταθερά. Θέτοντας την πίεση ίση με την ατμοσφαιρική $p(z) = p_0$ συνεπάγεται ότι η ελεύθερη επιφάνεια ενός στατικού ρευστού στο βαρυτικό πεδίο της Γής είναι επίπεδη

$$z = \frac{c - p_0}{\rho g}.$$

Ομογενές ρευστό σε δοχείο που επιταχύνεται προς μία διεύθυνση

Ας θεωρήσουμε ότι το δοχείο που περιέχει το ρευστό επιταχύνεται στην διεύθυνση του άξονα x με επιτάχυνση a . Η εξωτερική δύναμη σε αυτή την περίπτωση θα ισούται με το άθροισμα της βαρυτικής δύναμης και της δύναμης αδράνειας

$$\vec{b} = -g\hat{k} - a\hat{i}$$

και άρα

$$\nabla p = -\rho(g\hat{k} + a\hat{i})$$

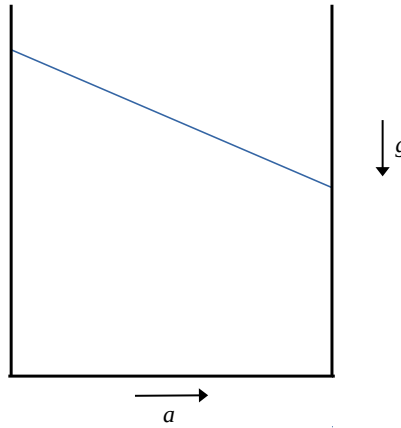
που ικανοποιείται για

$$p(x, z) = -\rho(gz + ax) + c.$$

Η εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας θα δίνεται από την σχέση

$$z = -\frac{a}{g}x + \frac{c - p_0}{\rho g}$$

που σχηματίζει ευθεία με κλίση που μειώνεται όσο αυξάνεται η επιτάχυνση όπως στο Σχήμα 6.6.



Σχήμα 6.6

Ρευστό σε δοχείο που περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα

Σε αυτή την περίπτωση η δύναμη αδράνειας ισούται με την φυγόκεντρο $\omega^2 \rho \vec{r}$ όπου $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ η κάθετη απόσταση από τον άξονα περιστροφής και ω η γωνιακή ταχύτητα. Παρουσία βαρυτικού πεδίου

$$\nabla p = \rho[\omega^2(x\hat{i} + y\hat{j}) - g\hat{k}]$$

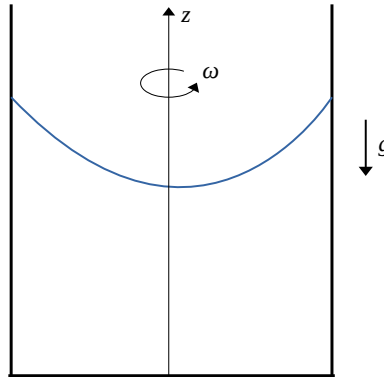
που ικανοποιείται για

$$p = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} - \rho g z + c.$$

Η εξίσωση της ελεύθερης επιφάνειας δίνεται από την σχέση

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + \frac{c - p}{\rho g}$$

που σχηματίζει παραβολή όπως στο Σχήμα 6.7.



Σχήμα 6.7

6.7 Ασκήσεις

Άσκηση 6.1. Βρείτε την μορφή του τανυστή τάσης στην περίπτωση όπου ο συντελεστής ιξώδους μάζας κ μηδενίζεται.

Άσκηση 6.2. Έστω ότι η ατμόσφαιρα της Γής αποτελεί ιδανικό αέριο η θερμοκρασία T του οποίου μεταβάλλεται σε σχέση με το ύψος z από την επιφάνειά της σύμφωνα με την σχέση

$$T(z) = T_0 - az$$

όπου T_0 και a σταθερές. Δείξτε ότι η πίεση σε αυτή την περίπτωση θα δίνεται από την σχέση

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{az}{T_0} \right)^{g/Ra}$$

όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας, R η σταθερά των ιδανικών αερίων και p_0 η τιμή της ατμόσφαιρας στην επιφάνεια της Γής.

Άσκηση 6.3. Η πίεση ενός βαροτροπικού ρευστού είναι της μορφής

$$p = \lambda \rho^k$$

όπου λ και k σταθερές. Να βρεθεί η μορφή της πίεσης συναρτήσει της απόστασης z από την επιφάνεια της Γής και της τιμής της στο

ύψος $z = 0$ υπό την παρουσία βαρυτικών δυνάμεων της μορφής $-g\hat{k}$ όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

