

Εξήρα Α. Πεδία με spin=1.

(α) Το μιγαδικό πεδίο Proca είναι ισοδύναμο με δυο πραγματικά πεδία Proca $\rightarrow$ 6 βαθμοί ελευθερίας.

(β) Το πεδίο των W είναι μιγαδικό πεδίο Proca με $2 \times 3 = 6$ βαθμούς ελευθερίας.

Το πεδίο του Z είναι πραγματικό πεδίο Proca με 3 βαθμούς ελευθερίας.

(γ) Σε πλήρη ενοποίηση, οι σταθερές ζεύξης $\tilde{g}$ κ' $\tilde{g}'$ των $SU(2)$ κ' $U(1)$, αντίστοιχα, θα ήταν ίσες.

• θ_W : γωνία Weinberg

• $\tan \theta_W = \frac{\tilde{g}'}{\tilde{g}} \rightarrow$ $\theta_W = \tan^{-1}\left(\frac{\tilde{g}'}{\tilde{g}}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$.

$\mathcal{L}(A) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, λαγκρανζιανή πυκνότητα.

(α') Η συζυγής ορμή του $A_\mu(x)$ είναι εξ' ορισμού:

$\pi_A^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu(\vec{x}, t))}$, όπου $\mathcal{L}$ είναι η λαγκρανζιανή.

όπως

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} &= -\frac{1}{4} \frac{\partial (F_{\kappa\lambda}(\vec{x}',t) F_{\kappa\lambda}(\vec{x}',t))}{\partial (\partial_\nu A_\mu(\vec{x},t))} = -\frac{1}{4} \cdot 2 F_{\kappa\lambda}(\vec{x}',t) \frac{\partial F_{\kappa\lambda}(\vec{x}',t)}{\partial (\partial_\nu A_\mu(\vec{x},t))} \\
 &= -\frac{1}{2} F_{\kappa\lambda}(\vec{x}',t) \left(\frac{\partial (\partial_\kappa A_\lambda(\vec{x}',t))}{\partial (\partial_\nu A_\mu(\vec{x},t))} - \frac{\partial (\partial_\lambda A_\kappa(\vec{x}',t))}{\partial (\partial_\nu A_\mu(\vec{x},t))} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} F_{\kappa\lambda}(\vec{x}',t) (\delta_\kappa^\nu \delta_\lambda^\mu - \delta_\lambda^\nu \delta_\kappa^\mu) \delta(\vec{x} - \vec{x}') \\
 &= -\frac{1}{2} \delta(\vec{x} - \vec{x}') (F_{\kappa\lambda}^{\nu\mu}(\vec{x}',t) - F_{\kappa\lambda}^{\mu\nu}(\vec{x}',t)) \\
 &= \delta(\vec{x} - \vec{x}') F^{\mu\nu}(\vec{x}',t)
 \end{aligned}$$

έπεται από τα παραπάνω ότι:

$$\begin{aligned}
 \pi_A^\mu(\vec{x},t) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\mu)} = \int d^3x' \delta(\vec{x} - \vec{x}') F^{\mu 0}(\vec{x}',t) = F^{\mu 0}(\vec{x},t) \\
 &= -F^{0\mu}(\vec{x},t)
 \end{aligned}$$

ελδκότεροι:

$$\begin{aligned}
 \pi_A^0 &= 0 \\
 \pi_A^i &= -F^{0i} = -E^i
 \end{aligned}$$

$$\Theta^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \partial_\nu A_\rho - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}$$

+) $(\vec{x}, t)$

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} (\partial^\nu A_\rho) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

$$\Theta^{\mu\nu} = -F^{\mu\rho} (\partial^\nu A_\rho) + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda}$$

$$\begin{aligned} \Theta^{\mu\nu} - \Theta^{\nu\mu} &= -F^{\mu\rho} (\partial^\nu A_\rho) + F^{\nu\rho} (\partial^\mu A_\rho) \\ &= -\partial^\nu (F^{\mu\rho} A_\rho) + (\partial^\nu F^{\mu\rho}) A_\rho + \partial^\mu (F^{\nu\rho} A_\rho) - (\partial^\mu F^{\nu\rho}) A_\rho \\ &= -\eta^{\nu\lambda} \partial_\lambda (F^{\mu\rho} A_\rho) + \eta^{\nu\lambda} (\partial_\lambda F^{\mu\rho}) A_\rho \\ &\quad + \eta^{\mu\kappa} \partial_\kappa (F^{\nu\rho} A_\rho) + \eta^{\mu\kappa} (\partial_\kappa F^{\nu\rho}) A_\rho \end{aligned}$$

για $\kappa = \lambda = \rho$ ισχύουν οι κλασικές εξισώσεις κίνησης: $\partial_\rho F^{\mu\rho} = 0$
 $\partial_\rho F^{\nu\rho} = 0$
 Έπεται από τα παραπάνω ότι:

$$\Theta^{\mu\nu} - \Theta^{\nu\mu} = -\partial_\rho (F^{\mu\rho} A^\nu - F^{\nu\rho} A^\mu) \neq 0$$

ο $\Theta^{\mu\nu}$ δεν
 είναι συμμετρικός
 πίνακας $\Theta^{\mu\nu} \neq \Theta^{\nu\mu}$

$$\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_\rho (F^{\mu\rho} A^\nu)$$

$$\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = -F^{\mu\rho} F^\nu{}_\rho + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda}$$

$$\tilde{\Theta}^{\mu\nu} = -F^{\mu\rho}F^{\nu}_{\rho} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}$$

$$(\delta') \quad \tilde{\Theta}^{00} = \left(-F^{0\rho}F^0_{\rho} + \frac{1}{4}\eta^{00}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda} \right) = \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{E} + \vec{B}\cdot\vec{B}) \equiv \mathcal{H}$$

Διότι

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2(|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2), \quad F^{0i} = E^i \quad \& \quad F^{ij} = -\epsilon^{ijk}B_k$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi^\mu(\partial_0 A_\mu) - \mathcal{L} = \pi^i(\partial_0 A_i) - \mathcal{L} \quad , \quad \text{(Hamiltonian density)} \\ &= -E^i(F_{0i} + \partial_i A_0) - \frac{1}{2}(|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2) \\ &= |\vec{E}|^2 - E^i\partial_i A_0 - \frac{1}{2}(|\vec{E}|^2 - |\vec{B}|^2) \end{aligned}$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3x' (|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2) \quad , \quad \text{διότι} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{θεωρία Maxwell}$$

(Hamiltonian).

$E^i A_0 = 0$ στα πέρατα
χωροχρόνου.

$$\partial_\mu \tilde{\Theta}^{\mu\nu} = 0 \longrightarrow \partial_0 \tilde{\Theta}^{00} = 0 \longrightarrow \text{Διατήρηση Ενέργειας}$$

(α') Για $\lambda > 0$ το δυναμικό είναι φραγμένο από κάτω
(κ' άρα κ' η ενέργεια είναι φραγμένη από κάτω)

Για $\mu^2 < 0$ υπάρχει ένα τοπικό μέγιστο για $\phi = 0$
κ' ελάχιστο για $|\phi|^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda}$.

Τα ελάχιστα του δυναμικού βρίσκονται στον κύκλο
 $|\phi| = \alpha$ στο μιγαδικό επίπεδο, όπου $\alpha = \sqrt{-\frac{\mu^2}{2\lambda}}$.

Τα ελάχιστα του δυναμικού φέρουν ένα δύνολο
εκφυλισμένων καταστάσεων. Η θεμελιώδης κατά-
σταση (θ.κ.) δεν είναι μοναδική.

Αποδ

$$\phi_{\theta.k} = \text{σταθερό}, \text{ ανεξάρτητο } t, \vec{x}, \quad \vec{E} = 0 = \vec{B}$$

$$\phi_{\theta.k} = \min V(\phi, \phi^*) \quad , \quad V(\phi, \phi^*) = \mu^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4$$

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \phi} = \mu^2 \phi^* + 2\lambda \phi^* (\phi \phi^*) = \phi^* (\mu^2 + 2\lambda |\phi|^2)$$

$$0 = \frac{\partial V}{\partial \phi^*} = \mu^2 \phi + 2\lambda \phi (\phi \phi^*) = \phi (\mu^2 + 2\lambda |\phi|^2)$$

i) $\mu^2 > 0$, $\phi = 0 = \phi^*$ Η θ.κ. είναι μοναδική.

ii) $\mu^2 < 0$, $\phi = 0 = \text{τοπικό μέγιστο}$
 $|\phi|^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda} = \alpha^2$ ελάχιστα.

(6')

$$\mathcal{L}'(A_\mu, \phi_1, \phi_2) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ - |D_\mu \phi_1|^2 - |D_\mu \phi_2|^2 \\ - \mu^2 (\alpha + \phi_1)^2 + \phi_2^2 \\ - \lambda (\alpha + \phi_1)^2 + \phi_2^2)^2$$

$$\bullet (\alpha + \phi_1(x))^2 + \phi_2(x)^2 = \underline{\alpha^2} + \underline{2\alpha\phi_1(x)} + \underline{\phi_1^2(x)} + \underline{\phi_2^2(x)}$$

$$\bullet ((\alpha + \phi_1)^2 + \phi_2^2)^2 = \underline{\alpha^4} + \underline{4\alpha^2\phi_1^2} + (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \\ + \underline{4\alpha^3\phi_1} + \underline{2\alpha^2(\phi_1^2 + \phi_2^2)} + 4\alpha\phi_1(\phi_1^2 + \phi_2^2)$$

$$\bullet D_\mu \Phi = (\partial_\mu - iA_\mu)(\alpha + \phi_1(x) + i\phi_2(x))$$

$$\mathcal{L}'(A_\mu, \phi_1, \phi_2) \cong -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - (\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) - (\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_2) \\ - (\alpha^2 A_\mu A^\mu - 2\mu^2 \phi_1^2 - 0 \cdot \phi_2^2) \\ - (\mu^2 \alpha^2 + \lambda \alpha^4) + 2\alpha A^\mu (\partial_\mu \phi_2) \\ + 2A^\mu (\phi_1 \partial_\mu \phi_2 - \phi_2 \partial_\mu \phi_1)$$

όπου

$$(\mu^2 + 6\alpha^2 \lambda) \phi_1^2 = -2\mu^2 \phi_1^2 \\ (\mu^2 + 2\alpha^2 \lambda) \phi_2^2 = 0 \cdot \phi_2^2$$

δύο πραγματικά πεδία. Ορίσω επί του ϕ μετασχηματισμό βαθμίδας $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \theta(x)$. Το $\theta(x)$ απορροφά μέσω του μετασχηματισμού κι μένει ένας βαθμός ελευθερίας του πεδίου Higgs, $\chi(x)$, μετά το αυθόρμητο θάψιμο συμμετρίας.

- Η $\mathcal{L}'$ ήταν διαμορφωμένη με λάθος τρόπο για την καταγραφή των φυσικών βαθμών ελευθερίας καθώς το δυναμικό $\mathcal{L}'$ εξαρτάται από τις παραγώγους των πεδίων.

π.χ. $A^\mu (\partial_\mu \phi_2)$ δείχνει ότι το διαδιδόμενο φωτόνιο θα μπορούσε να μετατραπεί σε ϕ_2 .

□

σχημα- ~~εξ~~η Β. πεδία με spin=0.

ποροφα

ελευθερ

επαίδιμο

αταμέπ

αμικό δε

ιο θα

(d) Η εξίσωση Klein-Gordon δεν μπορεί να ερμηνευτεί ως κλασική εξίσωση ενός σωματιδίου διότι:

i) οδηγεί σε αρνητικές πιθανότητες.

ii) Η χαμιλτονιανή δεν είναι οραχμένη από κάτω.

(ε') $(\square - m^2)\phi(x) = 0$, είναι οι εξισώσεις κίνησης
① για τη πεδιακή θεωρία Klein-Gordon

$$\phi(x) = e^{i k_\mu x^\mu} \quad ②$$

$$\textcircled{1} \sim \textcircled{2} \quad \boxed{k^\mu k_\mu + m^2 = 0} \longrightarrow \boxed{-|\vec{k}|^2 + k^0 \cdot k^0 + m^2 = 0}$$

$k^\mu = (k^0, \vec{k})$, $k^0 = \text{χωνιακή}$
δυνατότητα

$$\Sigma. \quad (\alpha') \quad |\phi|^2 = \phi \phi^* = e^{i\theta(x)} \phi(x) e^{-i\theta(x)} \phi^*(x) = \phi(x) \phi^*(x) = |\phi|^2$$

$$\bullet \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \rightarrow F_{\mu\nu}' = \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \theta(x)) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \theta(x)) \\ = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$$\text{διότι} \quad \partial_\mu \partial_\nu \theta(x) = \partial_\nu \partial_\mu \theta(x).$$

$$\bullet \quad |D_\mu \phi|^2 = (\partial_\mu \phi - i A_\mu \phi) (\partial^\mu \phi - i A^\mu \phi)^* \quad \left\{ \begin{array}{l} |D_\mu' \phi'| = |D_\mu \phi| \\ |D_\mu' \phi'| = |D_\mu \phi| \end{array} \right.$$

$$= (\partial_\mu \phi - i A_\mu \phi) (\partial^\mu \phi^* + i A^\mu \phi^*)$$

$$\bullet \quad D_\mu' \phi' = e^{i\theta(x)} D_\mu \phi$$

$$\begin{aligned}
 S[\phi, A] &= \int d^4x \mathcal{L} \\
 &= \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \\
 &\quad - \int d^4x \left((\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi)^* - m^2 \phi \phi^* \right) \\
 &\quad - i \int d^4x \left(\phi^* \partial_\mu \phi - \phi (\partial_\mu \phi^*) \right) A^\mu \\
 &\quad - \int d^4x A_\mu A^\mu \phi \phi^*
 \end{aligned}$$

$\delta S = 0 \quad \forall \delta A_\mu \rightarrow$ εξισώσεις Euler-Lagrange.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - i(\phi^* \partial^\nu \phi - \phi \partial^\nu \phi^*) - 2A^\nu \phi \phi^* = 0$$

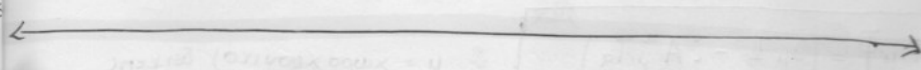
ή: $\mathcal{J}^\nu = -i(\phi^* \partial^\nu \phi - \phi \partial^\nu \phi^*)$

$$\left. \begin{aligned} &\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mathcal{J}^\nu \\ &\text{εξισώσεις} \\ &\text{Euler-Lagrange} \end{aligned} \right\}$$

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = -\partial_\nu \mathcal{J}^\nu = 0$$

$\swarrow$ $\searrow$
 συμμετρικό $\rightarrow$ αντισυμμετρικό ως προς την εναλλαγή
 ως προς των $\rightarrow$ των δεικτών $\rightarrow$ των δεικτών.

ζητούμε



3. Χρησιμοποιώ μια ισοτριπλέτα πραγματικών βαθμωτών πεδίων

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}, \quad \phi_1, \phi_2, \phi_3 \text{ πραγματικά βαθμωτά πεδία.}$$

- Οι γεννήτορες ικανοποιούν της σχέδου $[T_i, T_j] = i \epsilon_{ijk} T_k$ για την $SO(3)$
 $\epsilon_{123} = 1.$

(θ.κ)

• Για $\lambda > 0$ κ' $\mu^2 < 0$, η θεμελιώδης κατάσταση είναι εκφυλισμένη

$$\Phi^T \Phi = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \rightarrow \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda}, \quad \{\theta, \kappa\} = S^2.$$

Αποδ.

- $\Phi_{\theta, \kappa} = \Phi$ ανεξάρτητο των $\vec{x}, t$,

- $\Phi_{\theta, \kappa} = V_{min}$, $V = \mu^2 \Phi^T \Phi + \lambda (\Phi^T \Phi)^2$,

- $\frac{\partial V}{\partial \Phi} = 0 = \frac{\partial V}{\partial \Phi^T} \rightarrow \begin{cases} \Phi^T (\mu^2 + 2\lambda \Phi^T \Phi) = 0 \\ \Phi (\mu^2 + 2\lambda \Phi^T \Phi) = 0 \end{cases}$

- για $\lambda > 0$, το δυναμικό κ' άρα κ' η ενέργεια είναι φραγμένη από κάτω.

- για $\mu^2 > 0$, η θ.κ είναι μοναδική, $\Phi = 0 = \Phi^T$.

για $\mu^2 < 0$, $\Phi^T \Phi = a^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda}$, ελάχιστο του δυναμικού ε η θ.κ είναι εκφυλισμένη.

• $D_\mu = (\partial_\mu \mathbb{1} - i A_\mu^a T_a)$
 $D_\mu \phi_i = \partial_\mu \phi_i + \epsilon_{ijk} A_\mu^j \phi_k$

, μ = χωροχρονικό δείκτης
 $i, j, k = 1, 2, 3$ δείκτης που αναφέρεται στην Lie άλγεβρα που χρησιμοποιώ.

Επιλέγω θ.κ. $\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$.

Παραμετροποιώ χώρο από τη θ.κ. $\Phi = g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a + \chi(x) \end{pmatrix}, g \in SO(3)$
 ορίσω τον μετασχηματισμό βασίδας:

$$A_\mu(x) \longrightarrow g B_\mu g^{-1} + i g \partial_\mu g^{-1}, \quad g = g(x) = e^{i(\theta_1(x)T_1 + \theta_2(x)T_2 + \theta_3(x)T_3)}$$

πραγματικό
 $B_\mu = B_\mu(x), \chi(x) = \text{βαθμωτό πεδίο}$

ισοδύναμα,

α μπορούμε να ορίσω: $\Phi = \tilde{g}^{-1}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a + \chi(x) \end{pmatrix}, \tilde{g} = e^{-i(\theta_1(x)T_1 + \theta_2(x)T_2 + \theta_3(x)T_3)}$

$$A_\mu(x) \longrightarrow \tilde{g}^{-1}(x) B_\mu(x) \tilde{g}(x) + i \tilde{g}^{-1}(x) \partial_\mu \tilde{g}(x)$$

Επιστρέφω στο μοντέλο $\mathcal{L}(\Phi, A_\mu)$ κ το διατυπώνω στην gauge ισοδύναμη μορφή $\mathcal{L}'(\chi, B_\mu)$

$$\mathcal{L}(\chi, B_\mu) = \underbrace{\left[\mathbb{1}_{3 \times 3} \partial_\mu + \begin{pmatrix} 0 & B_\mu^{(3)} & B_\mu^{(2)} \\ -B_\mu^{(3)} & 0 & B_\mu^{(1)} \\ -B_\mu^{(2)} & -B_\mu^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a + \chi(x) \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} }_{\text{λλλ}}$$

$$- \underbrace{\mu^2 (\alpha + \chi(x))^2}_{\Phi^\dagger \Phi} - \underbrace{\lambda (\alpha + \chi(x))^4}_{(\Phi^\dagger \Phi)^2}$$

όπως

$$D_\mu = \begin{pmatrix} (a + \chi(x)) B_\mu^{(2)} \\ (a + \chi(x)) B_\mu^{(1)} \\ \partial_\mu \chi \end{pmatrix},$$

$$- (D_\mu \Phi)^T (D^\mu \Phi) = - (a + \chi(x))^2 (B_\mu^{(1)} B^{\mu(1)} + B_\mu^{(2)} B^{\mu(2)}) - (\partial_\mu \chi) (\partial^\mu \chi).$$

Άρα : i) $B_\mu^{(1)}, B_\mu^{(2)}$ έχουν ίσες μάζες, όπου $(μ_0 a)^2 \sim a^2$.

ii) το $B_\mu^{(3)}$ έχει μηδενική μάζα.

Εναλλακτικά;

$$\text{υπολογίζω: } D_\mu \Phi = \left[\mathbb{1} \partial_\mu - i (A_\mu^1 T_1 + A_\mu^2 T_2 + A_\mu^3 T_3) \right] \Phi$$

Κ' αντικαθιστώ βρήν σχέση για τη λαγκρανζιανή πυκνότητα.

□

Έμα Γ. πεδία με $\text{spin} = 1/2$

(πριν το σπάσιμο συμμετρίας)

(α') Τα πεδία Weyl για τα αριστερότροπα λεπτόνια της πρώτης οικογένειας έχουν 4 βαθμούς ελευθερίας, καθώς κάθε πεδίο Weyl έχει δύο βαθμούς ελευθερίας (ως μιγαδικό).

(β') το πεδίο Weyl για το δεξιότροπο λεπτόνιο της πρώτης οικογένειας έχουν 2 βαθμούς ελευθερίας, θεωρώντας ότι το νεutrino του ηλεκτρονίου έχει μηδενική μάζα.

(γ') όχι.

Οι βαθμοί ελευθερίας των πεδίων του καθιερωμένου προτύπου πριν κ' μετά το σπάσιμο συμμετρίας είναι σε όλες τις περιπτώσεις οι ίδιοι.

(δ') Το πεδίο Dirac ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon.

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = -2\eta^{\mu\nu}.$$

Για διευκόλυνση θεωρώ $m=0$.

$$-\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = \eta^{\mu\nu}$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu)^2 = -\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu = -\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \partial_\mu \partial_\nu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \square$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = 0 \rightarrow (i\gamma^\mu \partial_\mu)^2 \psi(x) = 0 \rightarrow \square \psi(x) = 0.$$

$$2. \quad (a') \quad x^\nu \longrightarrow x'^\nu = \Lambda^\nu_\mu x^\mu \quad (1)$$

$$\bullet \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) \longrightarrow (i\gamma^\mu \partial'_\mu - m)\psi'(x'). \quad (2)$$

$$\bullet \quad \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x). \quad (3)$$

$$\bullet \quad \partial'_\nu = \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (4)$$

Άρα

$$(i\gamma^\nu \partial'_\nu - m)\psi'(x') \stackrel{(3)}{=} (i\gamma^\nu (\Lambda^{-1})^\mu_\nu \partial_\mu - m \mathbb{1}_{4 \times 4}) S(\Lambda)\psi(x) \stackrel{(4)}{=} 0$$

- Πολλαπλασιάζω από αριστερά με $S^{-1}(\Lambda)$:

$$S^{-1}(\Lambda) i\gamma^\nu (\Lambda^{-1})^\mu_\nu S(\Lambda) \partial_\mu \psi(x) - m\psi(x) = 0$$

$$i \underbrace{S^{-1}(\Lambda) \gamma^\nu (\Lambda^{-1})^\mu_\nu S(\Lambda)}_{\gamma^\mu} \partial_\mu \psi(x) - m\psi(x) = 0$$

$$\gamma^\mu = S^{-1}(\Lambda) \gamma^\nu (\Lambda^{-1})^\mu_\nu S(\Lambda).$$

Θέλω

$$S(\Lambda) \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu \gamma^\nu$$

$$J^\mu = \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x)$$

$$\partial_\mu J^\mu = (\partial_\mu \bar{\Psi}(x)) \gamma^\mu \Psi(x) + \bar{\Psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \Psi(x))$$

$$= (im\bar{\Psi}\Psi) - (im\Psi\bar{\Psi}) = 0, \text{ όταν ισχύει η εξίσωση Dirac}$$

$$\text{που } (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0 \text{ εξίσωση Dirac.}$$

$$\bar{\Psi}(x) (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0 \text{ συζυγή εξίσωση Dirac, } \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0.$$

$$J_5^\mu = \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \gamma^5 \Psi(x)$$

$$\partial_\mu J_5^\mu = (\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \gamma^5 \Psi + \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 (\partial_\mu \Psi)$$

$$= im\bar{\Psi}\gamma^5\Psi - \bar{\Psi}\gamma^5\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi) \longrightarrow [\gamma^\mu, \gamma^5]_+ = 0$$

$$= im\bar{\Psi}\gamma^5\Psi + im\bar{\Psi}\gamma^5\Psi$$

$$= 2im\bar{\Psi}\gamma^5\Psi \begin{cases} = 0, & m=0 \longrightarrow \text{διατηρείται μόνο} \\ & \text{όταν } m=0. \\ \neq 0, & m \neq 0. \end{cases}$$

$$(8') \quad \gamma_5^{\mu}(x) \xrightarrow{\Lambda} \psi_{(x')}^{\dagger} \gamma^0 \gamma^{\mu} \gamma_5 \psi_{(x')}$$

$$= \psi_{(x)}^{\dagger} S^{\dagger}(\Lambda) \gamma^0 \gamma^{\mu} \gamma_5 S(\Lambda) \psi, \quad \bar{\psi}_{(x')} = \bar{\psi}_{(x)} S^{-1}(\Lambda)$$

$$= \bar{\psi} S^{-1}(\Lambda) \gamma^{\mu} \gamma_5 S(\Lambda) \psi$$

$$\Lambda = S(\Lambda) S^{-1}(\Lambda)$$

$$= \bar{\psi} S^{-1}(\Lambda) \gamma^{\mu} S(\Lambda) S^{-1}(\Lambda) \gamma_5 S(\Lambda) \psi$$

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \gamma^{\nu}$$

$$= \Lambda^{\mu}_{\nu} \bar{\psi} \gamma^{\nu} S^{-1}(\Lambda) \gamma_5 S(\Lambda) \psi \quad (1)$$

• όμως

$$S^{-1}(\Lambda) \gamma_5 S(\Lambda) = i \underbrace{S^{-1}(\Lambda) \gamma^0 S(\Lambda)}_{\Lambda^0_{\kappa} \gamma^{\kappa}} \underbrace{S^{-1}(\Lambda) \gamma^1 S(\Lambda)}_{\Lambda^1_{\lambda} \gamma^{\lambda}} \underbrace{S^{-1}(\Lambda) \gamma^2 S(\Lambda)}_{\Lambda^2_{\rho} \gamma^{\rho}} \underbrace{S^{-1}(\Lambda) \gamma^3 S(\Lambda)}_{\Lambda^3_{\sigma} \gamma^{\sigma}}$$

$$= i \Lambda^0_{\kappa} \Lambda^1_{\lambda} \Lambda^2_{\rho} \Lambda^3_{\sigma} \gamma^{\kappa} \gamma^{\lambda} \gamma^{\rho} \gamma^{\sigma}$$

$$= i \Lambda^0_{\kappa} \Lambda^1_{\lambda} \Lambda^2_{\rho} \Lambda^3_{\sigma} \gamma^{\kappa} \gamma^{\lambda} \gamma^{\rho} \gamma^{\sigma}$$

$$= (\det \Lambda) \gamma_5 \quad (2)$$

Έπεται από τα παραπάνω ότι:

$$\boxed{\gamma_5^{\mu}(x) \xrightarrow{\Lambda} \pm \Lambda^{\mu}_{\nu} \gamma_5^{\nu}(x)}$$

3. (a')

$$\begin{aligned}
 \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R &= \frac{1}{4} \left(\Psi^\dagger (1 + \gamma_5) \gamma^0 \right) \left(\gamma^\mu \partial_\mu [(1 + \gamma_5) \Psi] \right), \quad \gamma_5^2 = 1 \\
 &= \frac{1}{4} \left(\Psi^\dagger \gamma^0 (1 - \gamma_5) \right) \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \partial_\mu \Psi, \quad [\gamma^\mu, \gamma_5] = 0 \\
 &= \frac{1}{4} \bar{\Psi} (1 - \gamma_5)^2 \gamma^\mu \partial_\mu \Psi
 \end{aligned}$$

ομοίως

$$\begin{aligned}
 \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L &= \frac{1}{4} \bar{\Psi} (1 + \gamma_5)^2 \gamma^\mu \partial_\mu \Psi, \quad \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L = 0 \\
 \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R + \bar{\Psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L &= \frac{1}{4} \bar{\Psi} [(1 - \gamma_5)^2 + (1 + \gamma_5)^2] \gamma^\mu \partial_\mu \Psi \\
 &= \frac{1}{4} \bar{\Psi} [2(1 + \gamma_5^2)] \gamma^\mu \partial_\mu \Psi, \quad \gamma_5^2 = 1 \\
 &= \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi.
 \end{aligned}$$

$$\bar{\Psi}_R \Psi_L = \frac{1}{4} \left(\Psi^\dagger (1 + \gamma_5) \gamma^0 \right) (1 - \gamma_5) \Psi = \frac{1}{4} \bar{\Psi} (1 - \gamma_5)^2 \Psi$$

$$\bar{\Psi}_L \Psi_R = \frac{1}{4} \left(\Psi^\dagger (1 - \gamma_5) \gamma^0 \right) (1 + \gamma_5) \Psi = \frac{1}{4} \bar{\Psi} (1 + \gamma_5)^2 \Psi$$

$$\bar{\Psi}_R \Psi_L + \bar{\Psi}_L \Psi_R = \bar{\Psi} \Psi.$$

6'). Επιλέγουμε $\theta \in \left(\frac{\pi}{2} \right)$ & ανατοίχουμε Φ στο αυτό

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha + \chi(x) \end{pmatrix} \in \text{έκτα δύο χώρο} \\ \in \text{γκανονικός διγός}$$

• Θα πάρουμε τη gauge ισοδύναμη μορφή & έχουμε:

$$\Phi(x) = \bar{g}^{-1}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha + \chi(x) \end{pmatrix}, \quad \bar{g}^{-1}(x) L(x), \quad R(x) = R'(x).$$

$$\bullet \quad \bar{L} \Phi R = (\bar{\nu}_e \quad \bar{l}_L) \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha + \chi(x) \end{pmatrix} l_R = \alpha \bar{l}_L l_R + \text{όροι ζεύξεως} \\ \chi \text{ με } l$$

$$\bullet \quad \bar{R} \Phi^\dagger L = \bar{l}_R \begin{pmatrix} 0 & \alpha + \chi(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ l_L \end{pmatrix} = \alpha \bar{l}_R l_L + \text{όροι ζεύξεως} \\ \chi \text{ με } l.$$

Κατά συνέπεια οι όροι ζεύξεως γίνονται μετά το αυθόρμητο
σπάσιμο συμμετρίας δίνουν όρους της μορφής

$$- \frac{1}{2} \alpha (\bar{l}_L l_R + \bar{l}_R l_L) + \text{όροι ζεύξεως} = - \frac{1}{2} \alpha \bar{l} l + \text{όροι ζεύξεως}.$$

Η μάζα του ηλεκτρονίου $l = e$ μετά το αυθόρμητο σπάσιμο
συμμετρίας δίνεται με $\sqrt{\frac{1}{2} \alpha}$.

□