

Ειδικά Θέματα Φυσικής Στοιχειωδών Σωματιδίων

Εξέταση 23 Ιουνίου 2025

Απαντήστε σε δύο από τα παρακάτω θέματα.

ΘΕΜΑ Α. ΠΕΔΙΑ ΜΕ ΣΠΙΝ 1

- (α') Πόσους βαθμούς ελευθερίας έχει το μιγαδικό πεδίο Proca; (0,2)
(β') Πόσους βαθμούς ελευθερίας έχει το πεδίο W και πόσους το πεδίο Z στο Καθιερωμένο Πρότυπο μετά το σπάσιμο συμμετρίας; (0,3)
(γ') Αν είχαμε πλήρη ενοποίηση ασθενών και ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων, ποια τιμή θα έπαιρνε η γωνία Weinberg και γιατί; (0,5)
- Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου μ είναι

$$\mathcal{L}(A) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

- Υπολογίστε τη συζυγή ορμή του A_μ . (0,5)
- Η έκφραση για τον τανυστή ενέργειας-ορμής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι

$$\Theta^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\rho)} \partial_\nu A_\rho - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}.$$

Υπολογίστε εκπεφρασμένα τον τανυστή $\Theta^{\mu\nu}$ και δείξτε ότι δεν είναι συμμετρικός πίνακας. (0,5)

- Ποιος όρος πρέπει να προστεθεί στο $\Theta^{\mu\nu}$ ώστε να γίνει συμμετρικός, εφόσον ισχύουν οι κλασικές εξισώσεις κίνησης; Γράψτε τη διορθωμένη μορφή του $\Theta^{\mu\nu}$. (0,5)
 - Ποιο νόμο διατήρησης ικανοποιεί η συνιστώσα Θ^{00} , όταν ισχύουν οι κλασικές εξισώσεις κίνησης; Υπολογίστε την συνιστώσα Θ^{00} για τη διορθωμένη μορφή του τανυστή ενέργειας-ορμής. (0,5)
- Δίνεται η Λαγκρανζιανή πυκνότητα για το Αβελιανό μοντέλο Higgs:

$$\mathcal{L}(\phi, \phi^*, A) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - |D_\mu \phi|^2 - \mu^2 |\phi|^2 - \lambda |\phi|^4,$$

όπου το ϕ είναι μιγαδικό βαθμωτό πεδίο και $D_\mu \phi = (\partial_\mu - iA_\mu) \phi$. Η παραπάνω Λαγκρανζιανή πυκνότητα είναι αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας $\phi(x) \rightarrow e^{i\theta(x)} \phi(x)$, $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$.

- Για ποιες τιμές των παραμέτρων λ και μ^2 δεν υπάρχει μοναδική θεμελιώδης κατάσταση; (0,5)
- Επιλέξτε θεμελιώδη κατάσταση της μορφής $\phi = a$. Γράφοντας $\phi = a + \phi_1 + i\phi_2$, όπου ϕ_1, ϕ_2 είναι πραγματικά πεδία, υπολογίστε την Λαγκρανζιανή πυκνότητα $\mathcal{L}'$ συναρτήσει των A_μ , ϕ_1 και ϕ_2 , κρατώντας μόνο όρους δεύτερης τάξης ως προς τα πεδία. (0,5)

- (γ') Καταμετρήστε τους φυσικούς βαθμούς ελευθερίας για τις Λαγκρανζιανές πυκνότητες $\mathcal{L}(\phi, \phi^*, A)$ και $\mathcal{L}'(\phi_1, \phi_2, A)$. Δείξτε ότι υπάρχει ασυμφωνία. (0,5)
- (δ') Εξηγήστε σε τί οφείλεται αυτή η ασυμφωνία και περιγράψτε συνοπτικά πώς επιλύεται. (0,5)

ΘΕΜΑ Β. ΠΕΔΙΑ ΜΕ ΣΠΙΝ 0

- (α') Για ποιους λόγους δεν μπορεί να ερμηνευτεί η εξίσωση Klein-Gordon ως κβαντική εξίσωση ενός σωματιδίου; (0,5)
- (β') Έστω επίπεδα κύματα της μορφής $e^{ik_\mu x^\mu}$. Τί συνθήκη ικανοποιούν οι κυματάριθμοι k_μ προκειμένου τα κύματα να ικανοποιούν την εξίσωση Klein-Gordon για μάζα m ; (0,5)
- Δίνεται η Λαγκρανζιανή πυκνότητα για την αλληλεπίδραση ενός μιγαδικού βαθμωτού πεδίου ϕ με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο A_μ ,

$$\mathcal{L}(\phi, \phi^*, A) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - |D_\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2,$$

όπου $D_\mu \phi = (\partial_\mu - iA_\mu) \phi$.

- (α') Δείξτε ότι η Λαγκρανζιανή πυκνότητα είναι αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας $\phi(x) \rightarrow e^{i\theta(x)} \phi(x)$, $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$. (1)
- (β') Βρείτε τις εξισώσεις Euler-Lagrange για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο από τη μεταβολή της δράσης, και δείξτε ότι οδηγούν στον ορισμό ενός διατηρούμενου ρεύματος J_μ . (1)
- Θεωρούμε το μη Αβελιανό μοντέλο Higgs για την $SO(3)$ με μία ισοτριπλέτα Φ πραγματικών βαθμωτών πεδίων και Λαγκρανζιανή πυκνότητα

$$\mathcal{L} = -(D_\mu \Phi)^T D^\mu \Phi - \mu^2 \Phi^T \Phi - \lambda (\Phi^T \Phi)^2,$$

όπου $D_\mu \Phi = (\partial_\mu \mathbb{1} - iA_\mu^a T^a) \Phi$ με πεδία Yang-Mills A_μ και γενήτορες

$$T^1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε τις μάζες των τριών μποζονίων Yang-Mills μετά το αυθόρμητο σπάσιμο της τοπικής συμμετρίας. (2)

ΘΕΜΑ Γ. ΠΕΔΙΑ ΜΕ ΣΠΙΝ 1/2

- (α') Πόσους βαθμούς ελευθερίας έχουν τα αριστερόστροφα λεπτόνια της πρώτης οικογένειας στο Καθιερωμένο Πρότυπο πριν το σπάσιμο συμμετρίας; (0,3)
- (β') Αν το νεutrino του ηλεκτρονίου έχει μηδενική μάζα, πόσους βαθμούς ελευθερίας έχουν τα δεξιόστροφα λεπτόνια της πρώτης οικογένειας στο Καθιερωμένο Πρότυπο πριν το σπάσιμο συμμετρίας; (0,3)

- (γ') Είναι δυνατόν ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας των πεδίων του Καθιερωμένου Προτύπου να είναι διαφορετικός πριν το σπάσιμο συμμετρίας από ότι μετά; (0,2)
- (δ') Το πεδίο Dirac ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon; (0,2)
2. Κάτω από ένα μετασχηματισμό Lorentz $x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, οι σπίνορες του Dirac μετασχηματίζονται ως $\psi \rightarrow S(\Lambda) \psi$, όπου $S(\Lambda)$ πίνακας 4×4 .
- (α') Να αποδείξετε ότι $S(\Lambda) \gamma^\mu S^{-1}(\Lambda) = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu$. (0,7)
- (β') Δείξτε ότι το ρεύμα $J^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)$ διατηρείται όταν ικανοποιείται η εξίσωση Dirac, και ότι το διάνυσμα $J_5^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x)$ διατηρείται μόνο όταν $m = 0$. (0,5)
- (γ') Δείξτε ότι το ρεύμα J_5^μ μετασχηματίζεται ως ψευδοδιάνυσμα κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. (0,8)
3. Με την βοήθεια των προβολικών τελεστών $P_\pm = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \gamma_5)$ γράφουμε κάθε σπίνορα Dirac ψ ως άθροισμα ενός δεξιόστροφου σπίνορα $\psi_R = P_+ \psi$ και ενός αριστερόστροφου σπίνορα $\psi_L = P_- \psi$.
- (α') Δείξτε ότι $\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi = \bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + \bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L$ και $\bar{\psi} \psi = \bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R$. (1)
- (β') Στο Καθιερωμένο Πρότυπο, οι όροι ζεύξης της διπλέτας Φ των βαθμωτών πεδίων με τα λεπτόνια της πρώτης οικογένειας είναι της μορφής

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -\xi''(\bar{L} \Phi R + \bar{R} \Phi^\dagger L),$$

όπου ξ'' σταθερά ζεύξεως, $L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \ell_L \end{pmatrix}$ διπλέτα αριστερόστροφων σπινόρων και R το πεδίο δεξιόστροφου ηλεκτρονίου ℓ_R .

Θεωρώντας ότι το δυναμικό των βαθμωτών πεδίων έχει ελάχιστο για $|\Phi|^2 = a^2$, υπολογίστε τη μάζα του ηλεκτρονίου μετά το σπάσιμο συμμετρίας. Υποθέτουμε μηδενική μάζα για το νεutrino ηλεκτρονίου. (1)

Δίνεται ότι $[\gamma_5, \gamma^\mu]_+ = 0$, $\gamma_5^2 = (\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$, $(\gamma_5)^\dagger = \gamma_5$.

Καλή επιτυχία!!