Εξισώσεις Χάμιλτον

▶ <u>Ανοικτό διατηρητικό σύστημα σωματιδίων (ΑΔΣΣ):</u>

Σύστημα N σωματιδίων τα οποία:

(α) αλληλεπιδρούν μεταξύ τους αποκλειστικά με διατηρητικές δυνάμεις.

και (β) -//- με το περιβάλλον -//- -//- -//- -//-.

▶ Σε ένα ΑΔΣΣ η κινητική κ' δυναμική ενέργεια είναι -αντίστοιχα- της μορφής $K=K(q,\dot{q},t)$ και $U=U(q,t)$ όπου q οι γενικευμένες συντεταγμένες και $\dot{q}\equiv dq/dt$ οι γενικευμένες ταχύτητες.

▶ Συνεπώς η λαγκρανζιανή είναι της μορφής $L=L(q,\dot{q},t)$, δηλαδή $\frac{\partial L}{\partial t}\neq 0$.

▶ Η αρχή του Χάμιλτον ισχύει κ' για τα ΑΔΣΣ.

▶ Στην πραγματικότητα ισχύει για μια ευρύτερη κατηγορία συστημάτων. Ωστόσο στο επίπεδο των ΑΔΣΣ η λαγκρανζιανή είναι χρονοεξαρτώμενη γεγονός που επιτρέπει την ανάπτυξη των βασικών θεμάτων της αναλυτικής μηχανικής κατά τρόπο αντιπροσωπευτικό.

▶ Σημειωτέον ότι τα ΚΔΣΣ είναι ειδική περίπτωση των ΑΔΣΣ.

▶ Ορίζουμε την <u>Χαμιλτονιανή</u> ως εξής: $H=\sum_i q_i p_i - L$ (1) όπου

$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ (2) (άρα οι εξισώσεις Όιλερ-λαγκράνζ γίνονται $\dot{p}_i=\frac{\partial L}{\partial q_i}$ (3)).

▶ (1) $\Rightarrow dH=\sum \dot{q}_i\,dP_i+\sum P_i\,d\dot{q}_i-dL(q,\dot{q},t)=$

$$=\sum \dot{q}_i\,dP_i+\sum P_i\,d\dot{q}_i-\frac{\partial L}{\partial t}dt-\sum\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i-\sum\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i=$$

$$\overset{②}{\underset{③}{=}} -\frac{\partial L}{\partial t}dt + \sum\left(\dot{q}_i dp_i + \cancel{p_i d\dot{q}_i} - \dot{p}_i dq_i - \cancel{p_i d\dot{q}_i}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dH = \frac{\partial H}{\partial t}dt + \sum\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i\right) \quad \text{όπου}$$

όπου $\dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t}$ (4α) , $\dfrac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$ (4β) και $\dfrac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$ (4γ) .

▶ Οι εξισώσεις (4) καλούνται εξισώσεις Χάμιλτον κ' είναι οι αυτές για οποιοδήποτε μηχανικό σύστημα περιγράφεται από την αρχή του Χάμιλτον.

▶ Η $H=H(q,p,t)$ περιλαμβάνει την ίδια πληροφορία με την $L=L(q,\dot{q},t)$ με την διαφορά ότι δεν εκφράζεται με όρους γενικευμένων ταχυτήτων $\dot{q}_i$ αλλά με τις αντίστοιχες ορμές p_i.

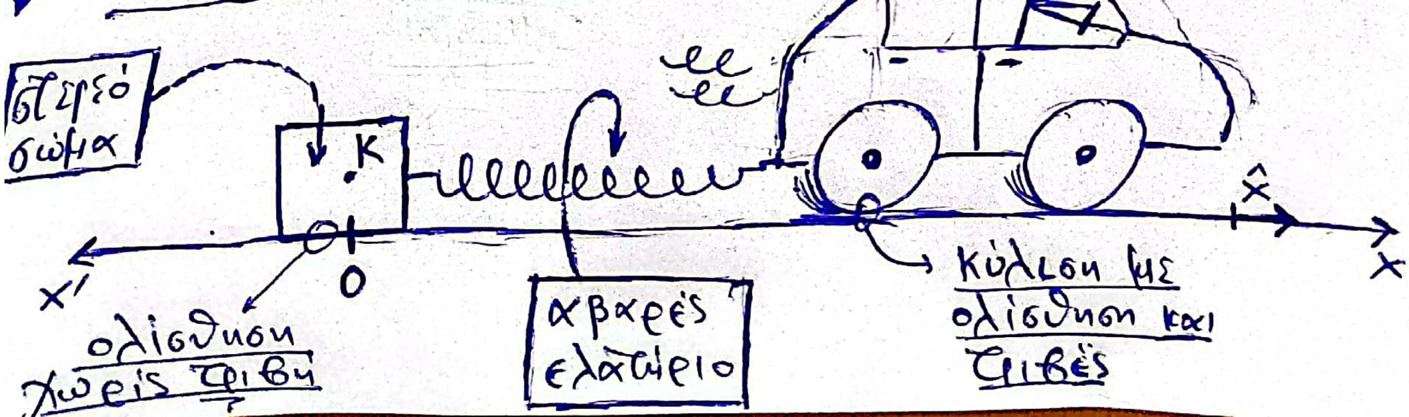
▶ Η (1) αποτελεί παράδειγμα ενός μετασχηματισμού Λεζάντρ (Legendre)

▶ Προσοχή!!! Η L είναι πάντοτε η διαφορά $K-U$. Ωστόσο η $H=\dot{q}p-L$ δεν ταυτίζεται πάντοτε με το άθροισμα $K+U$!

▶ Ακολουθεί σχετικό παράδειγμα.

$$\vec{v} = v_0 \cdot \hat{x}, \quad \dot{v}_0 = 0$$

▶ Έστω το εξής σύστημα:



Σχήμα 1

▶ Το εικονιζόμενο στερεό σώμα, από την σκοπιά της Κλασικής Μηχανικής είναι ισοδύναμο με ένα σύστημα $N>>1$ σωματιδίων που συνδέονται μεταξύ τους με ακαμπτες αβαρείς ράβδους.

▶ Το κουτί αυτό αλληλεπιδρά με το περι-βάλλον μέσω της βαρυτικής αλληλεπίδρασης, της κάθετης αντίδρασης κ' της δύναμης του ελατηρίου οι οποίες είναι διατηρητικές δυνάμεις.

▶ Άρα το κουτί είναι ένα ΑΔΣΣ.

▶ Δεδομένου ότι το κουτί δεν είναι παραμορφώσιμο, ούτε περιστρέφεται ο προσδιορισμός της θέσης ενός εκάστου των σωματιδίων του αρκεί ο προσδιορισμός της θέσης x ενός τυχαίου σημείου του, έστω K (βλ. Σχήμα 1)

▶ Άρα το υπό μελέτη σύστημα έχει 1 βαθμό ελευθερίας.

▶ Έστω ότι την χρονική στιγμή $t=0$ το σημείο K βρίσκεται στην θέση $x=0$ κ' το ελατήριο στο φυσικό του μήκος.

▶ Τότε σε κάθε άλλη χρονική στιγμή η επιμήκυνση του ελατηρίου είναι $x-v_0 t$. Άρα το υπό μελέτη σύστημα έχει δυναμική ενέργεια $\boxed{U=\frac{1}{2}s\,(x-v_0 t)^2}$ (5) είναι δηλαδή της μορφής $U=U(q,t)$ με $q\equiv x$.

▶ Δεδομένου ότι όλα τα σωμάτια του κουτιού έχουν ίδια ταχύτητα με το σημείο K η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι $\boxed{K=\frac{1}{2}m\dot{x}^2}$ (6) όπου m η συνολική μάζα του κουτιού.

▶ Παρατηρούμε ότι οι σταθερές m, s, v_0 που εμπλέκονται στο πρόβλημά μας είναι <u>διαστατικά ανεξάρτητες</u>. Άρα μπορούμε να επιλέξουμε μονάδες μέτρησης ούτως ώστε $\boxed{s=m=v_0=1}$ (7)

▶ Άρα: $L = K - U \overset{(5)}{\underset{(6)}{=}} \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}(x-t)^2$ (8)

▶ (8) $\Rightarrow \delta L = \dot{x}\,\delta\dot{x} - (x-t)\,\delta x = (\dot{x}\,\delta x)^{\cdot} - (\ddot{x} + x - t)\,\delta x$ (9)

$$\boxed{\dot{x}\,\delta\dot{x} = \dot{x}\,(\delta x)^{\cdot} = (\dot{x}\,\delta x)^{\cdot} - \ddot{x}\,\delta x}$$

$$\boxed{\delta\dot{q} = (\delta q)^{\cdot}}$$

▶ Αρχή Χάμιλτον: $0 = \delta I = \delta \int L = \int \delta L \overset{(9)}{=}$

$= [\dot{x}\,\delta x]_{t=t_A}^{t=t_B} - \int (\ddot{x} + x - t)\,\delta x \Rightarrow$

$\delta I = 0$ για τυχαίο δx με $\delta x(t_A) = \delta x(t_B) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + x - t = 0}$ (10)

▶ Η επαναφορά των m, s, υ_0 στην εξίσωση κίνησης (10) γίνεται με κριτήριο την αποκατάσταση της διαστατικής ορθότητας. Δηλαδή πολ/ζουμε τους όρους x κ' t με κατάλληλους συνδυασμούς των m, s, υ_0 ούτως ώστε να αποκτήσουν διαστάσεις (δηλ. μονάδες) επιτάχυνσης όπως ο 1ος όρος της (10).

▶ $[s] = \frac{[F]}{[x]} = [m]\cdot\frac{[x]}{[t]^2}\cdot\frac{1}{[x]} = \frac{[m]}{[t]^2}$ (11)

▶ Σημείωση: Η εξίσωση $[A] = [B]$ σημαίνει ότι τα μεγέθη A κ' B έχουν ίδιες μονάδες στο S.I. άρα ίδιες διαστάσεις.

▶ $[\upsilon_0] = \frac{[x]}{[t]}$ (12)

▶ (11) $\Rightarrow [s/m] = \frac{1}{[t]^2} \Rightarrow \left[\sqrt{\frac{m}{s}}\right] = [t]$ (13)

▶ (12) $\overset{(13)}{\Longrightarrow} \left[\upsilon_0 \sqrt{\frac{m}{s}}\right] = [x]$ (14)

▶ $[\ddot{x}] = \frac{[x]}{[t]^2} \overset{(13)}{=} [x]\left[\frac{s}{m}\right] = \left[\frac{s}{m}\cdot x\right]$ (15)

▶ $[\ddot{x}] = \frac{[x]}{[t]^2} = \frac{[t]}{[t]^2}\left[\frac{x}{t}\right] = \frac{[t]}{[t]^2}[v_0] \overset{(13)}{=} \left[\frac{s}{m}\right]\cdot[t]\cdot[v_0] \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[v_0 \frac{s}{m}\cdot t\right] = [\ddot{x}]$ (16)

▶ Άρα η (10) στο SI γίνεται $\boxed{\ddot{x} + \frac{s}{m}(x - v_0 t) = 0}$ (17)

▶ Ποια η περιγραφή του συστήματος στα πλαίσια του Χαμιλτονιανού φορμαλισμού;

▶ Έχουμε: $H = \dot{q}p - L(q,\dot{q},t) \overset{(8)}{\underset{\boxed{x\equiv q}}{=}} \dot{x}p - \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(x-t)^2 = \ldots$

$\boxed{(2) \Rightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x}}$ (20)

$\ldots = p^2 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(x-t)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{H(q,p,t) = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}(x-t)^2}$ (18)

▶ (4α) $\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} \overset{(18)}{=} x - t$ (19α)

(4β) $\Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = p$ (19β)

(4γ) $\Rightarrow \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(x-t)$ (19γ) $\overset{(20)}{\Longrightarrow} \boxed{\ddot{x} + x - t = 0}$ (21)

▶ Βλέπουμε ότι το σύστημα των εξισώσεων (19β) κι (19γ) είναι ισοδύναμο με την εξίσωση κίνησης (21) (άρα κ' την (17)).

▶ Πώς διαμορφώνονται οι εξισώσεις (18) – (21) εάν επαναφέρουμε τις σταθερές s, m, v_0;

▶ (2) $\Rightarrow [P] = \dfrac{[L]}{[\dot q]} \overset{q \equiv x}{=\!=} \dfrac{[L]}{[\dot x]} = \dfrac{[\text{Ενέργεια}]}{[\dot x]} =$

$$= \frac{[\frac{1}{2} m \upsilon^2]}{[\dot x]} = \frac{[m]\cdot[\dot x]\cdot\cancel{[\dot x]}}{\cancel{[\dot x]}} \Rightarrow \boxed{[P] = [m]\cdot[\dot x]} \ (22\alpha)$$

▶ (20) $\xrightarrow{(22\alpha)}$ $\boxed{P = m\dot x}$ (23α)

▶ Με την ίδια λογική η (18) γίνεται $\boxed{H = \frac{1}{2} m \dot x^2 + \frac{1}{2} s (x - \upsilon_0 t)^2}$ (23β)

▶ Από την (23β) βλέπουμε ότι εν προκειμένω η Χαμιλτονιανή ταυτίζεται με την συνολική ενέργεια του συστήματος.*!!!

▶ Επίσης η (19α) γίνεται*! $\boxed{\dfrac{\partial H}{\partial t} = s\cdot\upsilon_0\cdot(x - \upsilon_0\cdot t)}$ (23γ)

▶ Τέλος η (21) ταυτίζεται με την (17).

▶ *! : $\left[\dfrac{\partial H}{\partial t}\right] = \left[\dfrac{\text{Ενέργεια}}{\text{Χρόνος}}\right] = \left[\dfrac{F\cdot dx}{dt}\right] = [s\cdot x\cdot \upsilon] = [s\cdot \upsilon_0 (x - \upsilon_0\cdot t)]$

▶ *!!! : Ωστόσο αυτό δεν ισχύει εν γένει. Όπως για την περιγραφή του χωροχρόνου μπορούμε να επιλέξουμε πολλά διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων, έτσι κ' για την περιγραφή ενός μηχανικού συστήματος η επιλογή των γενικευμένων συντεταγμένων δεν είναι μοναδική.

▶ Έστω η γεν. συντεταγμένη $\tilde x \equiv x - \upsilon_0 t$ (24α) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{\tilde x} = \dot x - \upsilon_0$ (24β) $\Rightarrow \ddot{\tilde x} = \ddot x$ (24γ)

▶ Συναρτήσει αυτών έχουμε: $K = \frac{1}{2} m (\dot{\tilde{x}} + v_0)^2$ (25α) κι

$U = \frac{1}{2} s \tilde{x}^2$ (25β).

▶ $L = K - U \overset{(25)}{\underset{(7)}{=}} \frac{1}{2}(\dot{\tilde{x}} + v_0)^2 - \frac{1}{2}\tilde{x}^2$ (26)

▶ $H = \dot{\tilde{x}} p - L \overset{(26)}{=} \dot{\tilde{x}} p - \frac{1}{2}(\dot{\tilde{x}} + v_0)^2 + \frac{1}{2}\tilde{x}^2 =$

$$\boxed{p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{x}}} \overset{(26)}{=} \dot{\tilde{x}} + v_0} \quad (24\beta) \Rightarrow \quad \Rightarrow p = \dot{x}$$

$= p\cdot(p - v_0) - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\tilde{x}^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}\tilde{x}^2 - p\cdot v_0} \quad (27)$$

▶ Βλέπουμε ότι (αποκαθιστώντας τις s, m, v_0 κι αντικαθιστώντας την p)

$$H = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} s (x - v_0 t)^2 - m \dot{x} v_0 \quad (28)$$

Συνεπώς η H δεν ταυτίζεται με την συνολική ενέργεια του υπό μελέτη στερεού σώματος.

▶ Συνεπώς παρότι $L = K - U$ δεν θα πρέπει για την αντίστοιχη Χαμιλτονιανή να θεωρείται δεδομένο ότι $H = K + U$!

▶ Τίθεται το ερώτημα: Πότε μπορούμε να γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι $H = K + U$;

$\boxed{L = K - U}$

▶ Έχουμε $L = \dot{q}p - H \Rightarrow H = \dot{q}p - L = \dot{q}p - L = \dot{q}p - K + U.$

Επομένως $H = K + U$ αν κ' μόνο αν $K + U = \dot{q}p - K + U \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2K = \dot{q}p \Rightarrow K = \frac{1}{2}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\dot{q}$$

$$\boxed{p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}}} \qquad \boxed{U = U(q,t)}$$

▶ Βλέπουμε ότι σε ΑΔΣΣ όπου $K = K(q, \dot{q}, t)$ κ' $U = U(q,t)$ εφόσον $K = \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\dot{q}$ μπορούμε απ' ευθείας να θέτουμε $\underline{H = K + U}$.