<u>Αρχή του Χάμιλτον</u> (ειδική περίπτωση)

▶ Έστω σύστημα N το πλήθος σωματιδίων τα οποία:
(α) αλληλεπιδρούν μεταξύ τους αποκλειστικά με διατηρητικές δυνάμεις.
(β) δεν ανταλλάσσουν ενέργεια με το περιβάλλον.

▶ Η διατύπωση της αρχής του Χάμιλτον που ακολουθεί δεν είναι η γενικότερη δυνατή, αλλά αφορά στην παραπάνω ειδική περίπτωση μηχανικού συστήματος το οποίο θα αναφέρεται στην συνέχεια με την συντομογραφία ΚΔΣΣ (= κλειστό, διατηρητικό σύστημα σωματιδίων)

▶ Έστω κ το ελάχιστο πλήθος μεταβλητών $q_1, q_2, \dots, q_\kappa$ που απαιτούνται για τον προσδιορισμό της «θέσης» του συστήματος (δηλ. της θέσης ενός εκάστου των N σωματιδίων). Τότε λέμε ότι το σύστημα «έχει κ <u>βαθμούς ελευθερίας</u>» και αποκαλούμε τις μεταβλητές $q_1, q_2, \dots, q_\kappa$ <u>γενικευμένες συντεταγμένες</u>.

▶ Η γνώση των συναρτήσεων $q(t) \equiv (q_1(t), q_2(t), \dots, q_\kappa(t))$ επαρκεί για τον προσδιορισμό της χρονικής εξέλιξης του συστήματος

▶ Οι πρώτες παράγωγοι $\dot{q}(t) \equiv (\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_K(t))$ καλούνται <u>γενικευμένες</u> <u>ταχύτητες</u>. [Εφεξής $\frac{d}{dt}(\dots) \equiv (\dots)^{\circ}$]

▶ Σε ένα ΚΔΣΣ η <u>κινητική</u> ενέργεια K κ' η <u>δυναμική</u> U είναι συναρτήσεις της μορφής $K=K(q,\dot{q})$ <u>και</u> $U=U(q)$.

▶ Για ένα τέτοιο σύστημα η <u>μηχανική</u> ενέργεια $E \equiv K+U$ διατηρείται, δηλαδή $dE/dt=0$.

▶ <u>Για ένα ΚΔΣΣ η αρχή του Χάμιλτον εξειδικεύεται ως εξής</u>: Έστω δύο τυχαίες διαδοχικές θέσεις $q_A \equiv q(t_A)$ και $q_B \equiv q(t_B)$ του συστήματος όπου $t_B > t_A$. Μεταξύ όλων των διαθέσιμων διαδρομών $q=q(t)$, $t \in [t_A, t_B]$ που συνδέουν τις δύο αυτές θέσεις το σύστημα επιλέγει αυτήν που ικανοποιεί την συνθήκη $\boxed{\delta I = 0}$ όπου

$$I \equiv \int_{t=t_A}^{t=t_B} dt \left\{ \underbrace{K(q,\dot{q}) - U(q)}_{\equiv L(q,\dot{q})} \right\}$$

<u>δράση</u>

<u>λαγκρανζιανή</u>

και δI η μεταβολή της I που προκαλείται από τις μικρές μεταβολές $\delta q(t) \equiv (\delta q_1(t), \delta q_2(t), \dots, \delta q_K(t))$.

▶ Εξ' υποθέσεως $\boxed{\delta q(t_A) = \delta q(t_B) = 0}$ κ' $\boxed{(\delta q)^{\bullet} = \delta \dot{q}}$