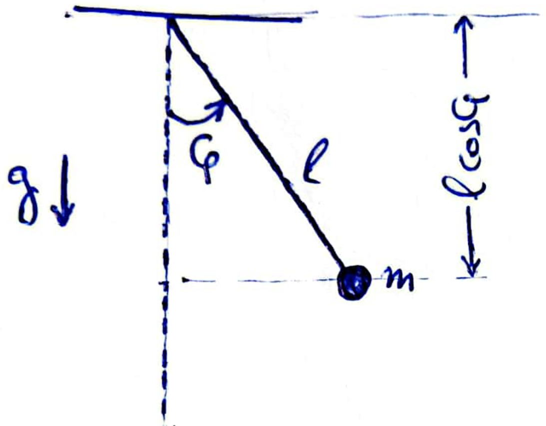
# Εξίσωση κίνησης εκκρεμούς

▶ Έστω το εκκρεμές του Σχήματος 2:




$\varphi = 0$: θέση ισορροπίας

Σχήμα 2

▶ Το εκκρεμές αυτό είναι ένα σύστημα $N$ σωματιδίων όπου $N=1$ σταθερής μηχανικής ενέργειας $E = K + U$ όπου

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{l\, d\varphi}{dt}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \quad (21)$$ και

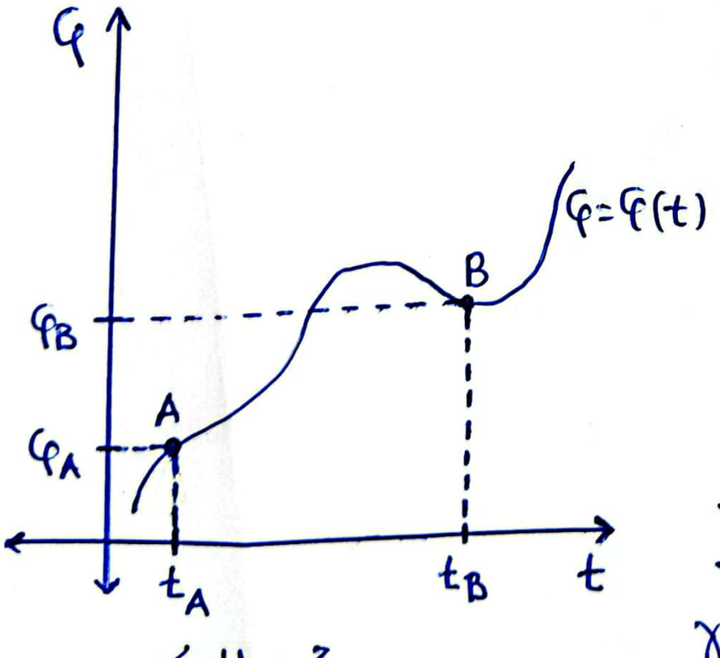
$$U = -mgl\cos\varphi \quad (22)$$ όπου $-l\cos\varphi$ το ύψος όπου βρίσκεται το σωμάτιο θεωρώντας ως σημείο μηδενικού ύψους το σημείο ανάρτησης του εκκρεμούς.

▶ Για τον προσδιορισμό της θέσης των σωματιδίων (εν προκειμένω του ενός κ' μόνου σωματίου) του συστήματος αρκεί 1 μόνο μεταβλητή η $\varphi$. Λέμε ότι το σύστημα έχει 1 βαθμό ελευθερίας και αποκαλούμε την $\varphi$ γενικευμένη συντεταγμένη.

▶ Η όλη πληροφορία για την κίνηση του συστήματος περιέχεται στην $\varphi = \varphi(t)$.

▶ Έστω το επίπεδο $t-\varphi$ του σχήματος 3. Η $\varphi = \varphi(t)$ αντιστοιχεί σε μια καμπύλη πάνω στο επίπεδο αυτό. Και: Η $\varphi = \varphi(t)$ είναι τέτοια ώστε $\delta I = 0$ όπου

$$I = \int_{t=t_A}^{t=t_B} \underbrace{K-U}_{\equiv L}\, dt = 0 \quad (23)$$




Σχήμα 3

για τυχαία $t_A$, $t_B > t_A$.

Η πρόταση αυτή αποτελεί εξειδίκευση της Αρχής του Hamilton (θα δούμε την γενικότερη μορφή της αργότερα) για το υπό μελέτη σύστημα.

Το $I$ καλείται «δράση» και το $\boxed{L \equiv K - U}$ (24) «λαγκρανζιανή» του συστήματος.

▶ (24) $\xrightarrow[(22)]{(21)}$ $L = \frac{1}{2} m \ell^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + m g \ell \cos\varphi$ (25)

▶ Οι ποσότητες $L, m, \ell, t, g$ που εμπλέκονται στην (25) έχουν μονάδες μέτρησης άρα διαφορετική τιμή ανάλογα με το σύστημα μονάδων. Επιθυμούμε την αντικατάστασή τους από <u>«κανονικοποιημένες»</u> αδιάστατες ποσότητες (αδιάστατες = δεν έχουν μονάδες μέτρησης) των οποίων οι τιμές είναι <u>ανεξάρτητες</u> <u>του</u> <u>συστήματος</u> <u>μονάδων</u>.

▶ Γνωρίζουμε ότι αυτό επιφέρει εν γένει απλοποίηση των εξισώσεων κ' άρα διευκόλυνση των πράξεων κ' των υπολογισμών στα πλαίσια είτε της Θεωρητικής-Μαθηματικής είτε της Υπολογιστικής Φυσικής.

▶ Παρατηρούμε ότι $L = \alpha \cdot \Lambda$ (26) όπου $\alpha \equiv \frac{1}{mg\ell}$ (27), $\Lambda \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 + \cos\varphi$ (28)

και $\tau \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t$ (29). (Υπόδειξη: απλώς διαιρούμε τον όρο $mg\ell\cos\varphi$ με $mg\ell$ ώστε να καταστεί αδιάστατος κ' τα υπόλοιπα προκύπτουν αυτομάτως).

▶ (23) $\xrightarrow{(26)-(29)}$ $I = \tilde{\alpha} \cdot \int_{\tau=\tau_A}^{\tau=\tau_B} \Lambda(\varphi, \dot{\varphi})\, d\tau$ (30) όπου $\dot{\varphi} \equiv \frac{d\varphi}{d\tau}$ (31), $\tilde{\alpha} \equiv \alpha \sqrt{\frac{\ell}{g}}$ (32)

▶ Γενικά για οποιαδήποτε σταθερά $c$ ισχύει $\delta I = 0 \Leftrightarrow \delta(c \cdot I) = 0$ όπου $I$ τυχαίο συναρτησιακό.

▶ <u>Άρα εν προκειμένω:</u> $\delta I = 0 \Leftrightarrow \delta\left(\frac{I}{\tilde{\alpha}}\right) = 0 \overset{(30)}{\Leftrightarrow} \delta \int \Lambda\, d\tau = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int \delta\Lambda\, d\tau = 0 \Leftrightarrow **$

---

▶ $\delta\Lambda \overset{(12)}{=} \frac{\partial\Lambda}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{\varphi}}\delta\dot{\varphi} \overset{(28)}{\underset{(31)}{=}} -\sin\varphi \cdot \delta\varphi + \dot{\varphi}\,\delta\dot{\varphi} \overset{(9)}{=}$ $\boxed{(\delta\varphi)^{\cdot} = \delta\dot{\varphi}}$

$= -\sin\varphi \cdot \delta\varphi + \dot{\varphi}(\delta\varphi)^{\cdot} = -\sin\varphi \cdot \delta\varphi + (\dot{\varphi}\delta\varphi)^{\cdot} - \ddot{\varphi}\delta\varphi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \delta\Lambda = \frac{d}{d\tau}(\dot{\varphi}\delta\varphi) - (\ddot{\varphi} + \sin\varphi)\delta\varphi$ (33)

---

$** \overset{(33)}{\Longleftrightarrow} \cancel{\left[\dot{\varphi}\delta\varphi\right]_{\varphi=\varphi_A}^{\varphi=\varphi_B}} - \int_{\tau=\tau_A}^{\tau=\tau_B} (\ddot{\varphi} + \sin\varphi)\delta\varphi\, d\tau$ (34)

<u>Εφόσον</u> <u>$\delta\varphi(t_A) = \delta\varphi(t_B) = 0$</u>

▶ Ο μόνος τρόπος να ισχύει η (34) για τυχαίο $\delta\varphi$ είναι να ισχύει

$$\overset{\circ\circ}{\varphi} + \sin\varphi = 0 \quad (35)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2}{d\tau^2}\varphi + \sin\varphi = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right) + \sin\varphi = 0$$

$$\overset{(29)}{\Leftrightarrow} \frac{\ell}{g}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) + \sin\varphi = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ell\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\sin\varphi = 0} \quad (36)$$

▶ Τόσο η (35) όσο κ' η (36) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση της $\varphi = \varphi(t)$ για δεδομένες αρχικές συνθήκες.