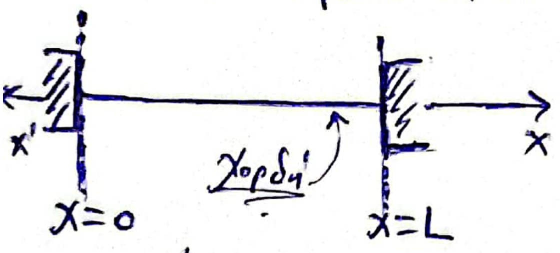
Στάσιμα κύματα

▶ Έστω χορδή πεπερασμένου μήκους L της οποίας τα άκρα είναι πακτωμένα όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1

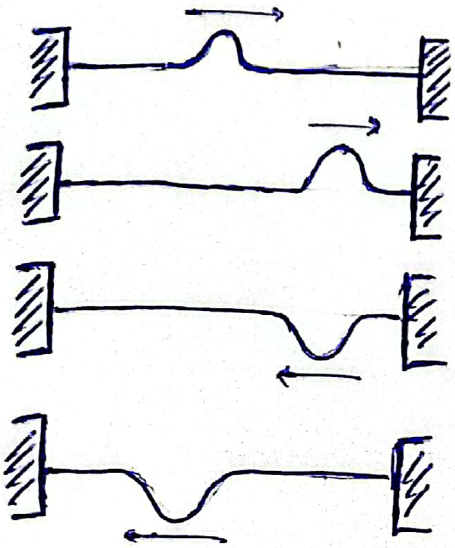
▶ Έστω ότι η χορδή διαταράσσεται ελαφρώς από την θέση ισορροπίας της. Η κίνησή της θα περιγράφεται από την κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1)$$

υπό τις...

...υπό τις συνοριακές συνθήκες $y(t,0) = y(t,L) = 0$. (2)

▶ Υπάρχουν διάφορες λύσεις $y(t,x)$ που ικανοποιούν τις (1) κ' (2). Για παράδειγμα η $y(t,x)$ μπορεί να περιγράφει έναν παλμό που υφίσταται διαδοχικές ανακλάσεις στα άκρα της χορδής κ' άρα εκτελεί ταλαντωτική κίνηση όπως φαίνεται στο σχήμα 2.


Σχήμα 2

▶ Στην συνέχεια θα μελετήσουμε μια ειδική περίπτωση λύσης των (1) κ' (2) που καλείται στάσιμο κύμα.

▶ Η ειδοποιός διαφορά της λύσης αυτής από τις υπόλοιπες είναι ότι η μηχανική ενέργεια κάθε στοιχείου της χορδής παραμένει σταθερή.

▶ Αυστηρά μιλώντας δεν υπάρχει διάδοση ενέργειας κατά μήκος της χορδής, εξού κ' ο χαρακτηρισμός του κύματος ως «στάσιμο».

▶ Δοκιμάζουμε στην ① λύσεις της μορφής $y(t,x)=X(x)\cdot Y(t)$ ③

▶ $① \overset{③}{\Longrightarrow} X''(x)\cdot Y(t)=\frac{1}{c^2}\ddot{Y}(t)\cdot X(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)} \quad ④$$

▶ Στην ④ το αριστερό μέλος εξαρτάται αποκλειστικά από την x ενώ το δεξί αποκλειστικά από την t. Ο μόνος τρόπος να ισχύει η ④ $\forall x,t$ είναι τα δύο μέλη να είναι σταθερά.

▶ Επικεντρώνουμε στην περίπτωση όπου

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{Y}(t)}{Y(t)}=-\alpha^2, \ \alpha\in\mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X''(x)+\alpha^2 X(x)=0 & (5\alpha) \\ \ddot{Y}(t)+c^2\alpha^2 Y(t)=0 & (5\beta) \end{cases}$$

▶ Η (5β) είναι εξίσωση α.α.τ. με $\omega\equiv c\alpha$ άρα επιδέχεται την γενική λύση

$$Y(t)=A\eta\mu(\omega t)+B\sigma\upsilon\nu(\omega t), \ \omega\equiv c\alpha \quad ⑥$$

▶ Ομοίως η (5α) έχει την γενική λύση

$$X(x)=\Gamma\eta\mu(\alpha x)+\Delta\sigma\upsilon\nu(\alpha x) \quad ⑦$$

▶ Παρατηρούμε ότι $X(x+\frac{2\pi}{\alpha})=X(x) \Rightarrow y(t,x)=y(t,x+\frac{2\pi}{\alpha})$

Δηλαδή μπορούμε να κάνουμε την ταύτιση $\lambda\equiv\frac{2\pi}{\alpha}$ όπου λ το μήκος κύματος. Άρα $K\equiv\alpha=\frac{2\pi}{\lambda}\overset{⑥}{=}\frac{\omega}{c}$ ⑧ όπου K ο κυματάριθμος του κύματος

▶ (2) $\overset{(3)}{\Longrightarrow} \begin{cases} X(0)=0 \\ X(L)=0 \end{cases} \overset{(7)}{\Longrightarrow} \begin{cases} \Delta = 0 \ (9) \\ X(L)=0 \end{cases} \overset{(7)}{\Longrightarrow} \eta\mu(kL)=0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow kL = \nu \cdot \pi \overset{(8)}{\Longrightarrow} \frac{2\pi L}{\lambda} = \nu \cdot \pi \Longrightarrow \boxed{L = \nu \frac{\lambda}{2}}$ (10)

$\Downarrow$

$\boxed{k = \frac{\nu\pi}{L}}$ (11) όπου ν τυχών ακέραιος.

▶ (3) $\xrightarrow[(9)(7)]{(11)(6)}$ $y(t,x) = \left[A_\nu \eta\mu(\omega_\nu t) + B_\nu \sigma\upsilon\nu(\omega_\nu t)\right] \cdot \eta\mu(k_\nu x)$ (12)

όπου $k_\nu = \frac{\nu\pi}{L}$ κ' $\omega_\nu = kc = \frac{\nu\pi c}{L}$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

κ' A_ν, B_ν ολοκληρωτικές σταθερές.

▶ Έστω α.α.τ. μάζας m κ' απομάκρυνσης

$\psi(t) = A\eta\mu(\omega t) + B\sigma\upsilon\nu(\omega t)$ (13)

Ποιά η μηχανική ενέργεια E του ταλαντωτή αυτού;

▶ Κατά τα γνωστά $E = \frac{1}{2} m\omega^2 \cdot (\pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma)^2$ (14)

▶ Ωστόσο πλάτος = απομάκρυνση στις ακραίες θέσεις όπου

$\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0 \overset{(13)}{\Longrightarrow} \boxed{\varepsilon\varphi(\omega t) = \frac{A}{B}}$ (15)

▶ $1 + \varepsilon\varphi^2(\omega t) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2(\omega t)} \overset{(15)}{\Longrightarrow} \sigma\upsilon\nu(\omega t) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2(\omega t)}} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \sigma\upsilon\nu(\omega t) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (16)

▶ (13) $\Longrightarrow \psi(t) = \sigma\upsilon\nu(\omega t)\cdot\left(A\,\varepsilon\varphi(\omega t) + B\right) \xRightarrow[(16)]{(15)}$

$$\Rightarrow \pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cdot\left(A\cdot\frac{A}{B}+B\right) =$$

$$= \frac{B}{\sqrt{\dots}}\cdot\frac{A^2+B^2}{B} \Rightarrow \boxed{\pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma = \sqrt{A^2+B^2}} \quad (17)$$

▶ (14) $\xRightarrow{(17)} \boxed{E = \frac{1}{2}m\omega^2\cdot(A^2+B^2)}$ (18)

▶ (12) $\Longrightarrow$ κάθε στοιχείο της χορδής συμπεριφέρεται ως α.α.τ. μάζας $dm=\rho dx$ κι απομάκρυνσης

$$\psi(t) = \left[A_\nu\,\eta\mu(k_\nu x)\right]\cdot\eta\mu(\omega_\nu t) + \left[B_\nu\,\eta\mu(k_\nu x)\right]\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega_\nu t) \quad (19)$$

όπου x η θέση του στοιχείου.

▶ Άρα η μηχανική ενέργεια του στοιχείου θα δίνεται από την εξίσωση $dE = \frac{1}{2}(\rho\,dx)\omega_\nu^2(A_\nu^2+B_\nu^2)\,\eta\mu^2(k_\nu x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow E = \left[\frac{1}{2}\rho(A_\nu^2+B_\nu^2)\omega_\nu^2\right]\int_0^L \eta\mu^2\left(\frac{\nu\pi x}{L}\right)dx = \quad \alpha = \frac{\pi x}{L}$$

ολοκληρώνουμε για να βρούμε την ενέργεια της χορδής

$$= \left[-//-\right]\frac{L}{\pi}\int_0^\pi \eta\mu^2(\nu\alpha)\,d\alpha =$$

$$= \left[-//-\right]\frac{L}{\cancel{\pi}}\cdot\frac{\cancel{\pi}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{4}\rho L\omega_\nu^2\cdot(A_\nu^2+B_\nu^2)} \quad (20)$$