# <u>Συζευγμένοι ταλαντωτές</u>

- Έστω 2 ή περισσότεροι ταλαντωτές οι οποίοι: *
  (α) αλληλεπιδρούν μεταξύ τους αποκλειστικά με διατηρητικές δυνάμεις.
  (β) δεν ανταλλάσσουν ενέργεια με το περιβάλλον.

- Έστω ότι όλοι οι ταλαντωτές του συστήματος ταλαντώνονται με την αυτή συχνότητα. Καλούμε αυτόν τον τρόπο ταλάντωσης ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΤΡΟΠΟ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ (κ.τ.τ.) και την αντίστοιχη συχνότητα ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΑ του συστήματος.

- Κάθε τέτοιο (*) σύστημα έχει πεπερασμένο πλήθος ιδιοσυχνοτήτων, ισάριθμο πλήθος κ.τ.τ. και:

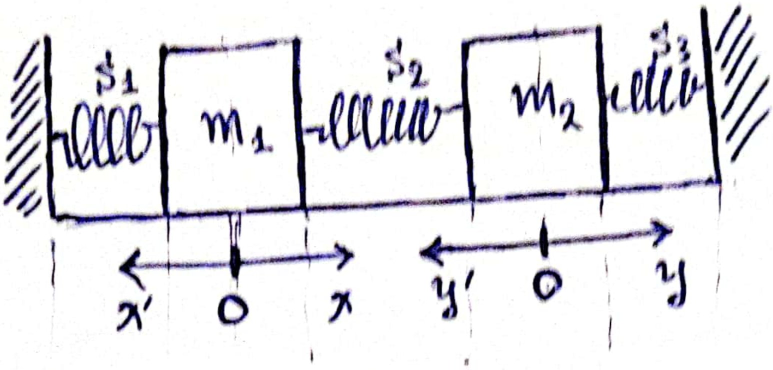
- Η κίνηση του όλου συστήματος - οσοδήποτε σύνθετη - είναι πάντοτε επαλληλία των κ.τ.τ. (!)

- ~~[illegible] της μηχανικής ενέργειας του όλου συστήματος.~~

- Η μηχανική ενέργεια του όλου συστήματος κατανέμεται στους κ.τ.τ. που διαθέτει. Κάθε κ.τ.τ. δεσμεύει ένα μέρος της συνολικής μηχανικής ενέργειας.

- Η μηχανική ενέργεια ενός εκάστου των σωματιδίων δεν είναι σταθερή. Λόγω της μεταξύ τους αλληλεπίδρασης μεταφέρεται από το ένα σωματίδιο στο άλλο.

- <u>Ωστόσο:</u> Η ενέργεια κάθε κ.τ.τ. παραμένει σταθερή. Δεν μπορεί να μεταφερθεί από τον ένα κ.τ.τ. στον άλλο!




* αμελητέα τριβή
* όταν τα κουτιά βρίσκονται στην θέση ισορροπίας τα ελατήρια βρίσκονται στο φυσικό τους μήκος.

## Εύρεση εξισώσεων κίνησης (α' τρόπος)

$$\left.\begin{aligned} m_1\cdot\ddot{x} &= \Sigma F_1 = -s_1\cdot x - s_2\cdot(x-y) \\ m_2\cdot\ddot{y} &= \Sigma F_2 = -s_2\cdot(y-x) - s_3\cdot y \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + \frac{s_1}{m_1}x + \frac{s_2}{m_1}(x-y) = 0 \quad (1\alpha)$$

$$\ddot{y} + \frac{s_2}{m_2}\cdot(y-x) + \frac{s_3}{m_2}y = 0 \quad (1\beta)$$

## Εύρεση εξισώσεων κίνησης (β' τρόπος)

$$K = \frac{1}{2}m_1(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{y})^2 \quad (2\alpha)$$

$$U = \frac{1}{2}s_1x^2 + \frac{1}{2}s_2(x-y)^2 + \frac{1}{2}s_3y^2 \quad (2\beta)$$

$$L \equiv K - U \quad (2\gamma)$$

Προσοχή!!! Η U είναι αποθηκευμένη στα ελατήρια. Οπότε υπάρχει ένας όρος ∀ ελατήριο. Όχι 2 όροι ∀ μάζα!

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial L}{\partial x} &= s_1x + s_2\cdot(x-y) \\ -\frac{\partial L}{\partial y} &= s_3y + s_2\cdot(y-x) \end{aligned}\right\} (3\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m_1\dot{x} \Rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^{\cdot} = m_1\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} &= m_2\dot{y} \Rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)^{\cdot} = m_2\ddot{y} \end{aligned}\right\} (3\beta)$$

▶ Εξισώσεις Όιλερ-Λαγκράνζ:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)^{\cdot} = \frac{\partial L}{\partial x} \overset{(3)}{\Longleftrightarrow} m_1\ddot{x} + s_1 x + s_2\cdot(x-y) = 0 \quad (4\alpha) \Leftrightarrow (1\alpha)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)^{\cdot} = \frac{\partial L}{\partial y} \overset{(3)}{\Longleftrightarrow} m_2\ddot{y} + s_3 y + s_3\cdot(y-x) = 0 \quad (4\beta) \Leftrightarrow (1\beta)$$

▶ Εύρεση εξισώσεων κίνησης (β' τρόπος)

$$(K+U)^{\cdot} = 0 \overset{(2)}{\Longrightarrow} m_1\dot{x}\ddot{x} + m_2\dot{y}\ddot{y} + s_1 x\dot{x} + s_2(x-y)\dot{x} + s_2(y-x)\dot{y} + s_3 y\dot{y} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{x}\cdot[m_1\ddot{x} + s_1 x + s_2(x-y)] + \dot{y}\cdot[m_2\ddot{y} + s_3 y + s_2(y-x)] = 0 \quad (5)$$

Ωστόσο με βάση την φυσική του προβλήματος οι $\Sigma F_1 = m_1\ddot{x}$ κ' $\Sigma F_2 = m_2\ddot{y}$ δεν είναι δυνατόν να εξαρτώνται από τις $\dot{x}$ κ' $\dot{y}$. Άρα θα πρέπει $[-//-]=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (4) \Leftrightarrow (1)$.

▶ Ποιες οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος; Θα απαντήσουμε το ερώτημα αυτό κατ' αρχάς για την ειδική περίπτωση όπου $m_1 = m_2 \equiv m$ κ' $s_1 = s_2 = s_3 \equiv s$.

▶ Έστω ω η ζητούμενη ιδιοσυχνότητα. Δοκιμάζουμε στην (1) τις λύσεις $x = Ae^{i\omega t}$ (6α) κ' $y = Be^{i\omega t}$ (6β) οπότε προκύπτει

$$\left.\begin{aligned} &[-\omega^2 A + \tilde{\omega}^2 A + \tilde{\omega}^2 (A-B)]\,e^{i\omega t} = 0 \\ \text{και } &[-\omega^2 B + \tilde{\omega}^2 B + \tilde{\omega}^2 (B-A)]\,e^{i\omega t} = 0, \quad \tilde{\omega} \equiv \sqrt{s/m} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

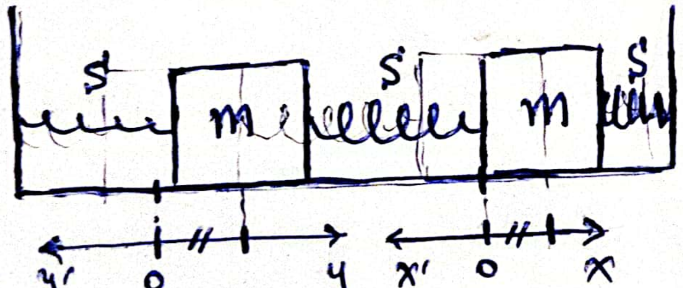
$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &-\gamma + 1 + (1-\lambda) = 0 \quad (7) \\ &-\gamma\lambda + \lambda + (\lambda - 1) = 0, \quad \underbrace{\lambda \equiv B/A, \quad \gamma = (\omega/\tilde{\omega})^2}_{\text{αδιάστατες}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &-\gamma\lambda + 2\lambda - \lambda^2 = 0 \\ &-\gamma\lambda + 2\lambda - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1 \overset{(7)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\lambda_1 = 1, \ \gamma_1 = 1 \\ &\lambda_2 = -1, \ \gamma_2 = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &A = B \text{ και } \omega = \tilde{\omega} = \sqrt{s/m} \quad (8\alpha) \\ &A = -B \text{ και } \omega = \sqrt{3}\,\tilde{\omega} \quad (8\beta) \end{aligned}\right.$$

▶ (6) $\overset{(8\alpha)}{\Longrightarrow}$ $\boxed{x = y} \Rightarrow \boxed{x - y = 0}$ (9α)

▶




Εφόσον $x=y$ οι μάζες μετατοπίζονται συγχρονισμένα δεξιά-αριστερά χωρίς να μεταβάλλεται η μεταξύ τους απόσταση.

▶ Άρα το κεντρικό ελατήριο ούτε συσπειρώνεται ούτε εκτείνεται. Άρα παραμένει στο φυσικό του μήκος. Άρα δεν ασκεί δύναμη στις μάζες με τις οποίες συνδέεται. Άρα είναι σαν να μην υπάρχει.

▶ Άρα κάθε μάζα $m$ κινείται υπό την επίδραση ενός κ' μόνο ελατηρίου σκληρότητας $s$. Για αυτό η συχνότητα της λύσης (8α) $\omega_1 = \sqrt{s/m}$!

▶ 6 $\overset{8\beta}{\Longrightarrow}$ $\boxed{x=-y}$ $\Rightarrow$ $\boxed{x+y=0}$ 9β

▶ Εφόσον $x=-y$ μετατοπίζονται εξίσου αλλά προς αντίθετες κατευθύνσεις. Συνεπώς «ενεργοποιείται» κ' το ενδιάμεσο ελατήριο, με αποτέλεσμα η δύναμη επαναφοράς να είναι ισχυρότερη. Μεγαλύτερη δύναμη επαναφοράς με ίδια μάζα -άρα ίδιο μέτρο αδράνειας- σημαίνει εντονότερη ταλάντωση άρα μεγαλύτερη συχνότητα. Για αυτό $\omega_2 > \omega_1$.

▶ Βλέπουμε λοιπόν ότι ~~...~~ το σύστημα έχει 2 ιδιοσυχνότητες $\omega_1=\sqrt{s/m}$ κ' $\omega_2=\sqrt{3s/m}$ που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικούς κ.τ.τ. όπου ~~...~~ $x-y=0$ κ' $x+y=0$, αντίστοιχα.

▶ Θέτοντας $\alpha \equiv x+y$ κ' $\beta \equiv x-y$ οι 1 ($m_1=m_2\equiv m$ κ' $s_1=s_2=s_3\equiv s$) γίνονται

$$\left.\begin{aligned} \frac{\ddot\alpha+\ddot\beta}{2}+\frac{s}{m}\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{s}{m}\beta=0 \\ \frac{\ddot\alpha-\ddot\beta}{2}-\frac{s}{m}\beta+\frac{s}{m}\frac{\alpha-\beta}{2}=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot\alpha+\frac{s}{m}\alpha=0 & (10\alpha) \\ \ddot\beta+3\frac{s}{m}\beta=0 & (10\beta) \end{cases}$$

▶ Στον κ.τ.τ. με $\omega=\omega_1=\sqrt{s/m}$ έχουμε $\beta=0$ κ' η ταλάντωση περιγράφεται αποκλειστικά από την $\alpha$ και την ΣΔΕ (10α).

▶ Στον κ.τ.τ. με $\omega=\omega_2=\sqrt{3s/m}$ έχουμε $\alpha=0$ κ' η ταλάντωση περιγράφεται αποκλειστικά από την $\beta$ κ' την ΣΔΕ (10β)

▶ Οι μεταβλητές $\alpha$ κ' $\beta$ αφ' ενός μεν αντιστοιχούν η καθεμία σε έναν διαφορετικό κ.τ.τ. αφ' ετέρου επιτρέπουν την μετάβαση από το σύστημα ΣΔΕ (1) σε δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους ΣΔΕ (βλ (10α) κ' (10β)).

▶ Κατά την μελέτη συζευγμένων ταλαντώσεων οι μεταβλητές που έχουν τις συγκεκριμένες ιδιότητες καλούνται ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ.

▶ Η ενέργεια Ε του συστήματος είναι

$$E = \frac{1}{2} s x^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 + \frac{1}{2} s (x-y)^2 + \frac{1}{2} m (\dot{y})^2 + \frac{1}{2} s y^2 \qquad (11)$$

▶ Χρησιμοποιώντας τις $\alpha$ κ' $\beta$ η (11) γίνεται

$$E = \underbrace{\frac{1}{4}\left(m\dot{\alpha}^2 + s\alpha^2\right)}_{E_\alpha} + \underbrace{\frac{1}{4}\left(m\dot{\beta}^2 + 3s\beta^2\right)}_{E_\beta}$$

▶ Ο όρος $E_\alpha$ δηλώνει την ενέργεια που έχει δεσμευτεί στον κ.τ.τ. με ιδιοσυχνότητα $\omega_1$ κ' αντίστοιχα ο $E_\beta$ την ενέργεια του άλλου κ.τ.τ. Το πιο σημαντικό όμως είναι ότι...

▶ $$(E_\alpha)^{\cdot} = \frac{1}{2}\left(m\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + s\alpha\dot{\alpha}\right) = \frac{\dot{\alpha}}{2}\left(m\ddot{\alpha} + s\alpha\right) \overset{(10\alpha)}{=} 0!$$

▶ $$(E_\beta)^{\cdot} = \frac{1}{2}\left(m\dot{\beta}\ddot{\beta} + 3s\beta\dot{\beta}\right) = \frac{\dot{\beta}}{2}\left(m\ddot{\beta} + 3s\beta\right) \overset{(10\beta)}{=} 0!$$

▶ <u>Δηλαδή:</u> Η ενέργεια που έχει δεσμευτεί στον κάθε τρόπο ταλάντωσης αρχικά παραμένει «εγκλωβισμένη» σε αυτόν! Οι κ.τ.τ. δεν ανταλλάσσουν ενέργεια μεταξύ τους!