Συντονισμός:

▸ Είδαμε ότι στην στάσιμη κατάσταση:

$$v(t) = \frac{F_0}{Z_m}\cos(\omega t - \phi) \quad (1)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega Z_m}\sin(\omega t - \phi) \quad (2)$$

όπου $Z_m = \sqrt{r^2 + \left(\omega m - \frac{s}{\omega}\right)^2}$ κι $\cos\phi = \frac{r}{Z_m} \geq 0$. (3)

▸ $$\frac{dZ_m}{d\omega} = \frac{1}{2Z_m}\cdot 2\cdot(\cdots)\cdot\left(m + \frac{s}{\omega^2}\right) \quad (4)$$

▸ $$\frac{dZ_m}{d\omega} = 0 \overset{(4)}{\Longleftrightarrow} \boxed{\omega = \sqrt{\frac{s}{m}}} \quad (5)$$

▸ $$\frac{d(\omega Z_m)}{d\omega} \overset{(3)}{=} \frac{d}{d\omega}\left(\sqrt{(\omega r)^2 + (\omega^2 m - s)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\cancel{\omega} Z_m}\cdot\left(\cancel{2}\cancel{\omega} r^2 + 2(\omega^2 m - s)\cdot \cancel{2}\cancel{\omega} m\right) \quad (6)$$

▸ $$\frac{d(\omega Z_m)}{d\omega} = 0 \overset{(6)}{\Longleftrightarrow} 2\omega^2 m^2 + r^2 - 2sm \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \omega^2 = \frac{s}{m} - \frac{r^2}{2m^2} \Longleftrightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{s}{m} - \frac{r^2}{2m^2}}} \quad (7)$$

▸ Έστω $\omega \ll 1$. Τότε $Z_m \cong \sqrt{r^2 + \frac{s^2}{\omega^2}} \cong \frac{s}{\omega}$ δηλ. η Z_m γνησίως φθίνουσα συνάρτηση του ω. Έστω $\omega \gg 1$. Τότε $Z_m \cong \sqrt{r^2 + \omega^2 m^2} \cong \omega m$ δηλ η Z_m γνησίως αύξουσα συνάρτηση του ω. Άρα αναγκαστικά το ακρότατο για $\omega = \sqrt{s/m}$ είναι ελάχιστο. <u>Άρα:</u> Για $\omega = \sqrt{\frac{s}{m}}$ το πλάτος $\frac{F_0}{Z_m}$ της ταχύτητας μεγιστοποιείται. → <u>ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ!!</u>

▸ Ομοίως αποδεικνύεται ότι το ακρότατο του ωZ_m για

$\omega = \sqrt{\frac{s}{m} - \frac{r^2}{2m^2}}$ είναι επίσης ελάχιστο άρα: Για $\omega = \sqrt{\cdots}$ (βλ. (7)) το πλάτος $\frac{F_0}{\omega Z_m}$ της ταλάντωσης μεγιστοποιείται.

$\longrightarrow$ <u>ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗΣ!!!</u>

▶ Τι γίνεται εάν $\frac{r^2}{2m^2} > \frac{s}{m}$; Τότε η (7) δεν έχει λύση. Άρα η ωZ_m δεν έχει ακρότατα. Ωστόσο για $\omega \gg 1$ $\omega Z_m \cong \omega^2 m$ που είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η ωZ_m (αφού δεν έχει ακρότατα) γνησίως αύξουσα $\forall \omega$. Άρα το πλάτος $F_0/\omega Z_m$ της ταλάντωσης μεγιστοποιείται για $\omega = 0$.

▶ Η μέση ισχύς P_{av} της $F_0 \cos\omega t$ υπολογίζεται ως

$$P_{av} = \frac{W_T}{T} = \frac{F_0^2}{2Z_m}\cos\phi > 0. \quad (8)$$

▶ Παρατηρώ ότι στον συντονισμό της ταχύτητας $\omega = \sqrt{\frac{s}{m}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_0^2/2Z_m \longrightarrow \text{μεγιστοποιείται} \\ \varepsilon\phi\phi = 0 \overset{(25*!)}{\Longrightarrow} \phi = 0 \Rightarrow \cos\phi = 1 \end{array} \right\} \overset{(8)}{\Longrightarrow} P_{av} \longrightarrow \underline{\text{μεγιστοποιείται}}$$

▶ Άρα στον <u>συντονισμό της ταχύτητας</u> η προσφερόμενη στον ταλαντωτή ενέργεια ανά μονάδα χρόνου από την $F_0 \cos(\omega t)$ είναι η μέγιστη δυνατή!!!

(25*!) $Z_m \geq 0$ κ' $r \geq 0$ κ' $\cos\phi = r/Z_m \geq 0$ άρα $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(<u>Βλ. επίσης:</u> σελ. 108-109 του Pain. Η τιμή του Q σε συνάρτηση με το εύρος συντονισμού χωρίς αναφορά σε ηλεκτρικό κύκλωμα.)