Εξαναγκασμένος ταλαντωτής

ω: πραγματική σταθερά

▶ $\underset{\text{Β' ΝΝ}}{}$ Β'ΝΝ: $\underbrace{m\ddot{x}}_{\Sigma F} = \underbrace{-sx}_{\text{όρος Hooke}} \underbrace{-r\dot{x}}_{\text{όρος απόσβεσης}} + \underbrace{F_0\cos(\omega t)}_{\text{μεταβαλλόμενη δύναμη}}$ ①

▶ ① $\Leftrightarrow$ $m\ddot{x} + r\dot{x} + sx = F_0 \cos(\omega t)$ ②

▶ Από θεωρία ΣΔΕ γνωρίζω ότι:

$$\underbrace{x_\gamma(t)}_{\text{γενική λύση ②}} = \underbrace{x_\sigma(t)}_{\text{μερική λύση ②}} + \underbrace{x_\mu(t)}_{\text{γενική λύση ② για } F_0=0} \quad ③$$

▶ Για $F_0=0$ η ② γίνεται: $m\ddot{x} + r\dot{x} + sx = 0$ ④

▶ Η ④ είναι η εξίσωση της φθίνουσας α.α.τ. Γνωρίζω ότι σε κάθε περίπτωση (υπο/υπερ) κρίσιμη απόσβεση ο όρος $x_\mu(t)$ φθίνει εκθετικά και προϊόντος του χρόνου καθίσταται αμελητέος.

▶ Όπως θα δούμε στην συνέχεια δεν συμβαίνει το ίδιο με τον όρο $x_\sigma(t)$. Σε πρώτη ανάλυση αυτό μπορεί να διαπιστωθεί κ' από το γεγονός ότι η ($x(t)=0 \ \forall \ t$) κ' κατ' επέκταση κάθε $x(t)$ με $x(t\to\infty)\to 0$ δεν είναι λύση της ② για $F_0 \neq 0$.

▶ Κατά συνέπεια:

$|x_\sigma(t)| >>> |x_\mu(t)|$ για $t >> 1 \Rightarrow x_\gamma(t) \cong x_\sigma(t)$ για $t >>> 1$. ⑤

▶ Για τον λόγο αυτό ο όρος $x_\mu(t)$ καλείται «μεταβατικός» ενώ ο όρος $x_\sigma(t)$ καλείται όρος «σταθερής κατάστασης».

▶ Χάριν συντομίας στο εξής θα συμβολίζουμε τον $x_\sigma(t)$ ως $x(t)$.

▶ Έστω ο μιγαδικός $\boxed{w(t) \equiv x(t) + i\psi(t)}$ (6) όπου $x(t)$ η ζητούμενη μερική λύση της (2).

▶ (6) $\Rightarrow \dot{w}(t) = [x(t) + i\psi(t)]^{\cdot} \Leftrightarrow \dot{w} = (x + i\psi)^{\cdot} = \dot{x} + (i\psi)^{\cdot} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{\dot{w} = \dot{x} + i\dot{\psi}}$ (7)

▶ Επίσης: $\ddot{w} = (\dot{w})^{\cdot} \overset{(7)}{=} (\dot{x} + i\dot{\psi})^{\cdot} = \ddot{x} + (i\dot{\psi})^{\cdot} = \ddot{x} + i\ddot{\psi}$ (8)

▶ Έστω η Σ.Δ.Ε. $m\ddot{w} + r\dot{w} + sw = F_0 e^{i\omega t}$ (9) $\Rightarrow$ $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$

$$\overset{(7)}{\underset{(8)}{\Longrightarrow}} \begin{cases} m\ddot{x} + r\dot{x} + sx = F_0 \cdot \cos(\omega t) & (10\alpha) \Leftrightarrow (2) \\ m\ddot{\psi} + r\dot{\psi} + s\psi = F_0 \cdot \sin(\omega t) & (10\beta) \end{cases}$$

▶ Αν βρω κάποια λύση της (9) τότε έχω βρει μια μερική λύση για την (2) κ' μπορώ από την (3) να βρω την γενική λύση της (2)!

▶ Ας δοκιμάσουμε αν η (9) επιδέχεται μια λύση της μορφής

$\boxed{w = Ae^{i\omega t}}$ (11) $\Rightarrow \dot{w} = (Ae^{i\omega t})^{\cdot} = A(e^{i\omega t})^{\cdot} = A e^{i\omega t}(i\omega t)^{\cdot} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\dot{w} = i\omega \cdot A \cdot e^{i\omega t} = i\omega w}$ (12) $\Rightarrow \ddot{w} = (\dot{w})^{\cdot} = (i\omega w)^{\cdot} = i\omega\,\dot{w} \overset{(12)}{=}$

$= i\omega \cdot i\omega w \underset{(i^2=-1)}{\Rightarrow} \boxed{\ddot{w} = -\omega^2 w}$ (13)

▶ (11), (12), (13) $\overset{(9)}{\Longrightarrow} (-m\omega^2 + r \cdot i\omega + s) \cdot A\cancel{e^{i\omega t}} = F_0 \cancel{e^{i\omega t}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow A = \frac{F_0}{i\omega r + (s - \omega^2 m)} = \frac{iF_0}{-\omega r + i(s - \omega^2 m)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{-iF_0}{\omega[r + i(\omega m - \frac{s}{\omega})]} \Leftrightarrow \boxed{A = \frac{-i \cdot F_0}{\omega \cdot \mathcal{Z}_m}} \quad (14)$$

όπου $\mathcal{Z}_m \equiv r + i(\text{-//-}) \equiv r + iX_m \equiv Z_m e^{i\phi}$ (15)

όπου $Z_m, \phi \in R$

▶ Υπενθύμιση: Κάθε μιγαδικός $z = \alpha + i\beta$ όπου $z \in \mathbb{C}$ κ' $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ μπορεί να γραφτεί στην «πολική» μορφή $z = \rho \cdot e^{i\phi} = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$ $\quad \rho \geq 0$

άρα $\alpha + i\beta = \rho\cos\phi + i\cdot\rho\sin\phi \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \rho\cos\phi \\ \beta = \rho\sin\phi \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \rho^2 \xRightarrow{\rho \geq 0} \underset{?}{\underline{\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}} \\ \underset{?}{\underline{\varepsilon\phi\phi = \beta/\alpha}} \end{cases}$$

▶ Άρα στην (15) έχω: $\left.\begin{aligned} Z_m &= \sqrt{r^2 + (X_m)^2} \\ \text{και } \varepsilon\phi\phi &= X_m / r \end{aligned}\right\}$ (16)

▶ (11), (14), (15) $\Rightarrow W = \dfrac{-iF_0}{\omega \cdot Z_m \cdot e^{i\phi}} \cdot e^{i\omega t} = -i\dfrac{F_0}{\omega Z_m} e^{i(\omega t - \phi)} =$

$$= -i\frac{F_0}{\omega Z_m}\left[\cos(\omega t - \phi) + i\sin(\omega t - \phi)\right] \xRightarrow{(6)}$$

$$\Rightarrow x(t) + i\psi(t) = \frac{F_0}{\omega Z_m} \cdot \sin(\omega t - \phi) - i\frac{F_0}{\omega Z_m}\cos(\omega t - \phi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x_\sigma(t) = \frac{F_0}{\omega Z_m} \cdot \sin(\omega t - \phi)} \quad (17)$$

▶ (17) $\Rightarrow \boxed{v_\sigma(t) = \dot{x}_\sigma(t) = \dfrac{F_0}{Z_m}\cos(\omega t - \phi)}$ (18)

▶ Σε χρόνο $\underline{dt}$ ο ταλαντωτής υφίσταται μετατόπιση $\underline{dx}$ και η προσφερόμενη σε αυτόν ενέργεια μέσω της $F_0\cos(\omega t)$ ισούται με $dW = dx \cdot F_0\cos\omega t$ (19). (Σημ.: $dW < 0$ σημαίνει αρνητική προσφερόμενη ενέργεια, δηλ. "κλέβουμε" ενέργεια από τον ταλαντωτή μέσω της $F_0 \cdot \cos\omega t$).

▶ (19) $\Rightarrow \dfrac{dW}{dt} = \dfrac{dx}{dt} \cdot F_0\cos\omega t \Rightarrow$ $\quad \dfrac{dW}{dt} \equiv P \longrightarrow$ ισχύς

$\Rightarrow P = v \cdot F_0\cos(\omega t) \Rightarrow$ $\quad \boxed{t \gg 1 : v(t) \cong v_\sigma(t), \text{ σχ. (18)}}$

$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{F_0^2}{Z_m} \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \phi)} \quad (20)$$

▶ Από τις (17) κ' (18) βλέπω ότι ο ταλαντωτής εκτελεί ταλάντωση με περίοδο $T \equiv \frac{2\pi}{\omega}$ (21).

▶ Σε χρόνο μιας περιόδου η προσφερόμενη στον ταλαντωτή ενέργεια μέσω της $F_0 \cos \omega t$ είναι [βλ. (19), (20)]

$$W_T = \int_{t=0}^{t=T} P\,dt = \left(\frac{F_0^2}{Z_m}\right)\int_0^T \cos(\omega t)\cdot\cos(\omega t-\phi)\,dt = *$$

$$\boxed{\cos(\omega t-\phi)} = Re\left[e^{i\omega t}e^{-i\phi}\right] \overset{Euler}{=} \cos(\omega t)\cos\phi + \sin(\omega t)\sin\phi$$

$$* = (\dots)\cdot\cos\phi\cdot\underbrace{\int_0^T \cos^2(\omega t)\,dt}_{\int_0^T \sin^2(\omega t)\,dt = \frac{T}{2}} + (\dots)\cdot\sin\phi\cdot\underbrace{\int_0^T \cos(\omega t)\sin(\omega t)\,dt}_{0}$$

(εφόσον $T\cdot\omega = 2\pi$)

$$\Rightarrow \boxed{W_T = \frac{F_0^2\cdot T}{2\cdot Z_m}\cdot\cos\phi > 0} \quad (22)$$

→ Η μεταβαλλόμενη δύναμη προσφέρει ενέργεια σε κάθε περίοδο.

▶ Σε χρόνο μιας περιόδου η προσφερόμενη στον ταλαντωτή ενέργεια μέσω της $-s\cdot x$ («όρος Hooke») είναι

$$W_{T,Hooke} = \int_0^T -s\cdot x\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt \overset{(17),(18)}{=} (\text{σταθερά})\cdot\int_0^T \cos(\omega t-\phi)\cdot\sin\dots$$

$$\dots(\omega t-\phi)\,dt = 0\,]$$ → Αλλιώς η $-sx$ δεν θα ήταν διατηρητική!!!

▶ Σε χρόνο μιας περιόδου η προσφερόμενη στον ταλαντωτή ενέργεια μέσω της $-r\upsilon$ («όρος απόσβεσης») είναι

$$W_{T,αποσ.} = \int_0^T -r\upsilon\cdot\frac{dx}{dt}\cdot dt = \int_0^T -r\upsilon^2\,dt \overset{(18)}{=}$$

$$= -r\frac{F_0^2}{Z_m^2}\underbrace{\int_0^T \cos^2(\omega t-\phi)\,dt}_{T/2} = -\frac{F_0^2\cdot T}{2\cdot Z_m}\cdot\frac{r}{Z_m} \quad (23)$$

▶ (15) $\Rightarrow r + i(-//-) = Z_m \cdot \cos\phi + i Z_m \cdot \sin\phi \Rightarrow$

$\Rightarrow r = Z_m \cos\phi \Rightarrow \dfrac{r}{Z_m} = \cos\phi$ (24)

▶ (23) $\overset{(24)}{\Longrightarrow}$ $\boxed{W_{T,\alpha\pi o\sigma\beta.} = -\dfrac{F_0^2 T}{2 Z_m}\cos\phi < 0}$ (25)

→ Η δύναμη απόσβεσης αφαιρεί ενέργεια από τον ταλαντωτή σε κάθε περίοδο.

▶ (25), (22) ⇒ Οι απώλειες ενέργειας λόγω απόσβεσης αναπληρώνονται από την $F_0 \cos(\omega t)$.

▶ $\displaystyle\int_{\phi}^{\phi+2\pi} \cos^2 x \, dx =$ $\boxed{\cos 2x = \cos(x+x) = Re[e^{ix}e^{ix}] = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1}$

$$= \int_{\phi}^{\phi+2\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_{\phi}^{\phi+2\pi} \Rightarrow \boxed{\int_{\phi}^{\phi+2\pi} \cos^2 x \, dx = \pi} \quad (26\alpha)$$

▶ $$\int_{\phi}^{\phi+2\pi} \sin^2 x \, dx = \int_{\phi}^{\phi+2\pi} (1-\cos^2 x)\, dx = \underbrace{\int_{\phi}^{\phi+2\pi} 1 \, dx}_{2\pi} - \underbrace{\int_{\phi}^{\phi+2\pi} \cos^2 x \, dx}_{\pi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\phi}^{\phi+2\pi} \sin^2 x \, dx = \pi} \quad (26\beta)$$

▶ $$\int_0^T \cos^2(\omega t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx \cdot \frac{1}{\omega} \overset{(26\alpha)}{=} \pi \cdot \frac{T}{2\pi} = \frac{T}{2}, \quad x \equiv \omega t$$

▶ $$\int_0^T \cos^2(\omega t - \phi)\, dt = \int_{(-\phi)}^{2\pi+(-\phi)} \cos^2 x \, dx \cdot \frac{1}{\omega} \overset{(26\alpha)}{=} \pi \cdot \frac{T}{2\pi} = \frac{T}{2}, \quad x \equiv \omega t - \phi$$

▶ Τα δύο παραπάνω ολοκληρώματα χρησιμοποιήθηκαν στην απόδειξη των (22) κ' (23).

▶ Επίσης: $\displaystyle\int_0^T \sin\omega t \cos\omega t \, dt = \frac{1}{2\omega}\int_0^{2\pi} \sin 2x \, dx = 0, \quad x \equiv \omega t$