Φθίνουσα α.α.τ - κρίσιμη απόσβεση

όρος Hooke (α.α.τ.)

όρος απόσβεσης

Έστω: $m\cdot \alpha \overset{B'NN}{=} \Sigma F = -s\vec{x} - r\vec{v}$

δηλ: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + r\dfrac{dx}{dt} + sx = 0$ ①

αδιάστατες μεταβλητές → απλοποίηση εξισώσεων

θέτω: $\beta \equiv \dfrac{r}{2m}$, $\gamma \equiv \dfrac{4ms}{r^2}$, $\tau \equiv \beta t$ ②

άρα: $\ddot{x} + 2\dot{x} + \gamma x = 0$ ③ όπου $\ddot{x} \equiv \dfrac{d^2x}{d\tau}$ κ' $\dfrac{dx}{d\tau} \equiv \dot{x}$

α) Κρίσιμη απόσβεση $\Leftrightarrow \gamma = 1 \Leftrightarrow \dfrac{s}{m} = \left(\dfrac{r}{2m}\right)^2$

$y \equiv \dot{x} + x$

$\gamma = 1 \overset{③}{\Rightarrow} \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \dot{x} + \dot{x} + x = 0 \Rightarrow (\dot{x}+x)^{\cdot} + (\dot{x}+x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{y} + y = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{d\tau} = -y \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = -d\tau \Rightarrow d\ln|y| = d(-\tau) \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln|y| = -\tau + \sigma\tau\alpha\vartheta \Rightarrow |y| = e^{\sigma\tau\alpha\vartheta}\cdot e^{-\tau}$ } $\Rightarrow y = \pm e^{\sigma\tau\alpha\vartheta}\cdot e^{-\tau} \Rightarrow$

y συνεχής

$\Rightarrow y = Ae^{-\tau} \Rightarrow x + \dot{x} = Ae^{-\tau} \Rightarrow e^{\tau}x + e^{\tau}\dot{x} = A \Rightarrow (xe^{\tau})^{\cdot} = A \Rightarrow$

$\Rightarrow xe^{\tau} = A + B\tau \Rightarrow \boxed{x = (A + B\tau)e^{-\tau}}$ ④ $\overset{(t=0)}{\Rightarrow} \boxed{A = x(t=0) \equiv x_0}$ ⑥

▶ $v = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d\tau}{dt}\dfrac{dx}{d\tau} \overset{②}{\underset{④}{=}} \beta\cdot(Be^{-\tau} - x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{v = \beta\cdot e^{-\tau}\cdot(B - A - B\tau)}$ ⑤ $\Rightarrow v_0 \equiv v(t=0) = v(\tau=0) = \ldots$

$\ldots = \beta\cdot(B - A) \overset{⑥}{\Rightarrow} \boxed{B = \dfrac{v_0}{\beta} + x_0}$ ⑦

▶ Πόσες φορές περνά ο ταλαντωτής από την θέση ισορροπίας; → Όσα τα t που ικανοποιούν την εξίσωση $x(t=0) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(\tau=0) = 0 \overset{④}{\Leftrightarrow} A + B\tau = 0$ ή $e^{-\tau} = 0 \overset{⑥,②}{\underset{⑦}{\Longleftrightarrow}}$

$\Leftrightarrow t = -\dfrac{x_0}{\beta x_0 + v_0}$ ή $t = +\infty$, δηλ. τουλ. 1 φορά κ' το πολύ 2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ΟΧΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ.

β) <u>Υπερκρίσιμη απόσβεση:</u> $\gamma<1 \Leftrightarrow \frac{s}{m} < \frac{r^2}{4m^2}$

▶ Δοκιμάζουμε στην ③ μια λύση της μορφής $x = \alpha \cdot e^{\lambda\tau} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{x} = \alpha \cdot \lambda \cdot e^{\lambda\tau} \Rightarrow \ddot{x} = \alpha \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda\tau}$ κ' η ③ γίνεται:

$\lambda^2 x + 2\lambda x + \gamma = 0 \Rightarrow x \cdot (\lambda^2 + 2\lambda + \gamma) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + \gamma = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 1 - \gamma > 0 \Rightarrow (\lambda+1)^2 = 1 - \gamma \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda + 1 = \pm\sqrt{1-\gamma} \equiv \pm k \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -1+k \\ \lambda_2 = -1-k \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \alpha_1 \cdot e^{-\tau + k\tau} \\ x_2 = \alpha_2 \cdot e^{-\tau - k\tau} \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ η $x = x_1 + x_2 = (\alpha_1 e^{k\tau} + \alpha_2 e^{-k\tau})\, e^{-\tau}$ ⑧ είναι λύση της ③.

▶ $v \overset{*!}{=} \frac{dx}{dt} = \frac{d\tau}{dt}\frac{dx}{d\tau} \overset{②}{=} \beta\dot{x} \overset{⑧}{=} \beta \cdot k \cdot (\alpha_1 e^{k\tau} - \alpha_2 e^{-k\tau})\, e^{-\tau} - \beta x$ ⑨

▶ Έστω $x(t=0) = x_0$ κ' $v(t=0) = v_0$. Τότε $x(\tau=0) = x_0$ κ' και $v(\tau=0) = v_0$. Άρα ⑧ $\Rightarrow x_0 = \underset{?}{\underline{\alpha_1 + \alpha_2}}$ ⑩.

Επίσης ⑩ $\Rightarrow v_0 = \beta \cdot k(\alpha_1 - \alpha_2) - \beta x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c \equiv \frac{v_0 + \beta x_0}{\beta k} = \underset{?}{\underline{\alpha_1 - \alpha_2}}$ ⑪

$$\boxed{\begin{matrix} \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{matrix}}$$

▶ ⑩, ⑪ $\Rightarrow \alpha_1 = \frac{x_0 + c}{2}$ και $\alpha_2 = \frac{x_0 - c}{2}$ ⑫

▶ ⑧ $\overset{⑫}{\Longrightarrow} x \cdot e^{\tau} = \frac{x_0 + c}{2} \cdot e^{k\tau} + \frac{x_0 - c}{2} \cdot e^{-k\tau} = x_0 \cosh k\tau + c \sinh k\tau$

$\Rightarrow x = (x_0 \cosh k\tau + c \sinh k\tau)\, e^{-\tau}$ ⑬

▶ $v \overset{*!}{=} \beta\dot{x} = \beta k(x_0 \sinh k\tau + c \cosh k\tau)\, e^{-\tau} - \beta x$ ⑭

▶ Πόσες φορές περνά ο ταλαντωτής από την θέση ισορροπίας;

Όσες οι λύσεις της εξίσωσης $x(t) = 0 \Leftrightarrow x(\tau) = 0 \overset{⑬}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow x_0 \cosh k\tau + c \cdot \sinh k\tau = 0$ ή $e^{-\tau} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tanh(k\tau) = -\frac{x_0}{c}$ ή $\tau \to \infty$ δηλ. το πολύ δύο λύσεις $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ΟΧΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

γ) <u>Υποκρίσιμη απόσβεση:</u> $\gamma > 1$ ή $\frac{s}{m} > \left(\frac{r}{2m}\right)^2$.

... ομοίως με υπερκρίσιμη... $\Rightarrow \lambda + 1 = \pm\sqrt{1-\gamma} = \pm\sqrt{i^2(\gamma-1)} =$

$= \pm i\sqrt{\gamma - 1} \equiv \pm ik \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda_1 = -1 + ik \\ \lambda_2 = -1 - ik\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \alpha_1 \cdot e^{-\tau + ik\tau} \\ x_2 = \alpha_2\, e^{-\tau - ik\tau}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ η $x = x_1 + x_2 = \left(\alpha_1 e^{ik\tau} + \alpha_2 e^{-ik\tau}\right) e^{-\tau}$ (15) είναι λύση της (3).

▶ $\upsilon = \beta \cdot \dot{x} = i \cdot \beta \cdot k \left(\alpha_1 e^{ik\tau} - \alpha_2 e^{-ik\tau}\right) e^{-\tau} - \beta x$ (16)

▶ (15) $\Rightarrow x_0 = \alpha_1 + \alpha_2$ (17) και (16) $\Rightarrow \upsilon_0 = i\beta k\,(\alpha_1 - \alpha_2) - \beta x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\upsilon_0 + \beta x_0}{\beta k} = i\,(\alpha_1 - \alpha_2)$ (18).

▶ $\left.\begin{array}{l}\alpha_1 \equiv \mu_1 + i\nu_1 \\ \alpha_2 \equiv \mu_2 + i\nu_2\end{array}\right\} \xRightarrow{(17),(18)} \left.\begin{array}{l} x_0 = (\mu_1 + \mu_2) + i(\nu_1 + \nu_2) \\ \dfrac{\upsilon_0 + \beta x_0}{\beta k} = i\,(\mu_1 - \mu_2) - (\nu_1 - \nu_2)\end{array}\right\}$ (19)

▶ Όμως η φυσική επιβάλλει $x_0 \in \mathbb{R}$ κ' $\upsilon_0 \in \mathbb{R}$ άρα

(19) $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\nu_1 = -\nu_2 \equiv \nu \\ \mu_1 = \mu_2 \equiv \mu\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha_1 = \mu + i\nu \\ \alpha_2 = (\alpha_1)^* = \mu - i\nu\end{array}\right.$ (20)

▶ (15) $\xRightarrow{(20)} x = \left[\mu \cdot \left(e^{ik\tau} + e^{-ik\tau}\right) + i\nu \cdot \left(e^{ik\tau} - e^{-ik\tau}\right)\right] e^{-\tau} =$

$= \left[\mu \cdot 2\cos(k\tau) + i\nu \cdot 2i\sin(k\tau)\right] e^{-\tau} = 2\left(\mu \cos k\tau - \nu \sin k\tau\right) e^{-\tau}$

$\Rightarrow$ το x είναι της μορφής $\left.\begin{array}{l} x = (A\cos k\tau + B\sin k\tau)\, e^{-\tau} \\ \text{ή} \quad x = A\cos(k\tau + \phi)\cdot e^{-\tau} \\ \text{ή} \quad x = A\sin(k\tau + \phi) \cdot e^{-\tau}\end{array}\right\}$ (21)

δηλαδή $\boxed{x = (\text{όρος α.α.τ.}) \cdot e^{-\tau}}$ όπου A, B, ϕ ολοκληρωτικές σταθερές.

$\boxed{\upsilon \equiv \beta\dot{x}}$

▶ $E = U + K = \frac{1}{2}sx^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 \overset{!}{=} \frac{1}{2}sx^2 + \frac{1}{2}m\beta^2(\dot{x})^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{s}{m\beta^2}x^2 + (\dot{x})^2 \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \gamma x^2 + (\dot{x})^2} \quad (22)$$

$\boxed{\text{θέτω } \varepsilon \equiv E : \left(\tfrac{1}{2}m\beta^2\right)}$ (*!)

▶ (22) $\Rightarrow \dot{\varepsilon} = 2\gamma x\dot{x} + 2\dot{x}\ddot{x} = 2\dot{x}\cdot(\gamma x + \ddot{x})$ $\Big\}\Rightarrow$

(3) $\Rightarrow \ddot{x} + 2\dot{x} + \gamma x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \gamma x = -2\dot{x}$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\varepsilon} = -4(\dot{x})^2} \quad (23)$$

▶ $\frac{dE}{dt} \overset{(*!)}{\underset{\tau \equiv \beta t}{=}} \left(\frac{1}{2}m\beta^2\right)\cdot\beta\cdot\frac{d\varepsilon}{d\tau} = \frac{1}{2}m\beta^3\cdot\dot{\varepsilon} \overset{(23)}{=} \frac{1}{2}m\beta^3\cdot(-4)\cdot(\dot{x})^2 =$

$$\underset{\upsilon = \beta\dot{x}}{=} -2m\beta\upsilon^2 \underset{\beta \equiv r/2m}{\Rightarrow} \boxed{\frac{dE}{dt} = -r\upsilon^2 \leq 0} \quad (24)$$

▶ <u>Παρατήρηση:</u> Στις εξισώσεις (22) κ' (23) οι μόνες ποσότητες που έχουν μονάδες μέτρησης είναι οι ε κ' x. οι οποίες έχουν <u>μονάδες μέτρησης μήκους</u> ή όπως λέμε <u>«διαστάσεις»</u> μήκους. Οι άλλες δύο ποσότητες γ κ' τ <u>δεν έχουν μονάδες μέτρησης</u> ή όπως λέμε <u>είναι «αδιάστατες»</u>. Άρα στις (22) κ' (23) εμπλέκεται μόνο μια μονάδα μέτρησης.

▶ <u>Γενικότερα:</u> Όσο λιγότερες μονάδες μέτρησης εμπλέκονται στις εξισώσεις μου (ή ισοδύναμα όσο περισσότερες αδιάστατες ποσότητες) τόσο αυτές απλοποιούνται κ' τόσο πιο εύκολες είναι οι πράξεις που έχω να κάνω.

▶ Ακόμα κ' στην <u>υπολογιστική φυσική</u> οι υπολογισμοί διευκολύνονται επιλέγοντας την χρήση αδιάστατων ποσοτήτων. ← <u>ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ!</u>

▶ Μπορούσα να περιμένω το αποτέλεσμα (24);

Το στοιχειώδες έργο της συνισταμένης $-rv$ της ΣF είναι:

$dW = -rv\,dx$ (25) όπου dx η αντίστοιχη στοιχειώδης μετατόπιση του ταλαντωτή.

$$(25) \Rightarrow \frac{dW}{dt} = -r\cdot v\cdot \frac{dx}{dt} = -r\cdot v\cdot v \Rightarrow \boxed{\frac{dW}{dt} = -rv^2} \quad (26)$$

Άρα η απώλεια ενέργειας ανά μονάδα χρόνου ισούται με το αντίστοιχο έργο του όρου απόσβεσης.

▶ Παρατήρηση: Στις ακραίες θέσεις $v=0 \overset{(24)}{\Rightarrow} \frac{dE}{dt} = 0$ (27).

Ωστόσο τις χρονικές στιγμές t όπου $\frac{dE}{dt} = 0$ δεν έχω ούτε μέγιστα, ούτε ελάχιστα αφού $\frac{dE}{dt} \leq 0$, δηλ η $E = E(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου. Η $E(t)$ της σχέσης (24) είναι παράδειγμα συνάρτησης με σημεία καμπής.

▶ Από τις εναλλακτικές (ισοδύναμες) διατυπώσεις της x στην (21) επιλέξαμε την $x = A\cos(k\tau + \phi)\cdot e^{-\tau}$ (28)

$$\text{▶ } (28) \overset{(2)}{\Rightarrow} x = A\cos(k\cdot\beta\cdot t + \phi)\cdot e^{\frac{-rt}{2m}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \tilde{A}\cos(\tilde{\omega} t + \phi)} \quad (29), \text{ όπου } \tilde{A} \equiv e^{-rt/2m} \quad (30)$$

$$\text{και } \tilde{\omega} \equiv k\beta = \sqrt{\gamma - 1}\cdot\frac{r}{2m} = \dots = \sqrt{\frac{s}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2} \text{ ή}$$

$$\text{ή } \boxed{\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}} \quad (31) \text{ όπου } \omega_0 \equiv \sqrt{s/m}$$

η γωνιακή συχνότητα της α.α.τ. που θα εκτελούσε το σύστημα εάν δεν υπήρχε απόσβεση ($r=0$).

▶ (28) $\Rightarrow \dot{x} = -k\cdot A\cdot \sin(k\tau+\phi)\,e^{-\tau} - x \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt} = \beta\dot{x}\right)$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\beta\cdot A\cdot e^{-\beta t}\cdot\left[k\sin(\tilde{\omega}t+\phi) + \cos(\tilde{\omega}t+\phi)\right] \quad (32)$$

▶ (32), (25), (22) $\Rightarrow$

$$E = \underbrace{f\left[\sin(\tilde{\omega}t+\phi), \cos(\tilde{\omega}t+\phi)\right]}_{\equiv f(t)\ (34)} \cdot e^{-2\beta t} \quad (33)$$

▶ Έστω $\tilde{T} \equiv \frac{2\pi}{\tilde{\omega}}$ (34). Τότε είναι εμφανές ότι

$$\left.\begin{array}{l} *\ \sin(\tilde{\omega}t+\phi) = \sin[\tilde{\omega}(t+T)+\phi] \\ *\ \cos(-\prime\prime-) = \cos[\ \cdots\cdots\ ] \end{array}\right\} \overset{(34)}{\Rightarrow} \boxed{f(t+\tilde{T}) = f(t)} \quad (35)$$

▶ (33), (35) $\Rightarrow$

$$\frac{E(t)}{E(t+\tilde{T})} = \frac{\cancel{f(t)}\cdot e^{-2\beta\cdot t}}{\cancel{f(t+\tilde{T})}\cdot e^{-2\beta t}\cdot e^{-2\beta\tilde{T}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{E(t+\tilde{T}) = E(t)\cdot e^{-2\beta\tilde{T}}} \quad (36)$$

▶ (36) $\Rightarrow$

$$\boxed{E(t+\nu\cdot\tilde{T}) = E(t)\cdot e^{-\nu\cdot\frac{r}{m}\cdot\tilde{T}}} \quad (37)$$

όπου ν τυχόν ακέραιος

▶ Προσοχή!!! Η σχέση $\boxed{E(t) = E(t=0)\cdot e^{-\beta t}}$ (38) που απαντά σε διάφορα συγγράμματα κυμάνσεις είναι προσεγγιστική. Και είναι χρήσιμη εφόσον $t \gg \tilde{T}$. (Όταν $t \gg \tilde{T}$ τότε το δεκαδικό μέρος του $t/\tilde{T}$ είναι αμελητέο, άρα ο $t/\tilde{T}$ μπορεί να προσεγγιστεί ως ακέραιος, άρα οι (37) κ' (38) ταυτίζονται.)

▶ Το ότι η (38) δεν είναι ακριβής προκύπτει άμεσα από τις (24) ή (32).