Επαλληλία 2 παράλληλων α.α.τ. κοινής συχνότητας

$$\Delta \left| \begin{array}{l} x_1 = \alpha_1 \cos(\omega t + \phi_1) \\ x_2 = \alpha_2 \cos(\omega t + \phi_2) \end{array} \right.$$

$$Z \,|\, x_{12} \equiv x_1 + x_2 = ;$$

Λύση:

$x_1 = \alpha_1 \cos(\omega t + \phi_1) = Re(z_1)$ όπου $z_1 \equiv \alpha_1 e^{i\varphi_1}$ (1) όπου $\varphi_1 \equiv \omega t + \phi_1$

$x_2 = \alpha_2 \cos(\omega t + \phi_2) = Re(z_2)$ όπου $z_2 \equiv \alpha_2 e^{i\varphi_2}$ (2) όπου $\varphi_2 \equiv \omega \cdot t + \phi_2$

$x_{12} = x_1 + x_2 = Re(z_1) + Re(z_2) = Re(z_1 + z_2) = Re(z_{12})$ όπου $z_{12} \equiv z_1 + z_2$ (3)

Όπως για κάθε μιγαδικό έτσι κ' για τον z_{12} υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α_{12} κ' φ_{12} ούτως ώστε $z_{12} = \alpha_{12} e^{i\varphi_{12}}$ (4)

(1), (2), (3), (4) $\Rightarrow \alpha_1 e^{i\varphi_1} + \alpha_2 e^{i\varphi_2} = \alpha_{12} e^{i\varphi_{12}}$ (5)

(5) $\Rightarrow \left(\alpha_1 e^{i\varphi_1} + \alpha_2 e^{i\varphi_2}\right)^* = \left(\alpha_{12} e^{i\varphi_{12}}\right)^* \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 e^{-i\varphi_1} + \alpha_2 e^{-i\varphi_2} = \alpha_{12} e^{-i\varphi_{12}}$ (6)

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (5) κ' (6) προκύπτει

$$(\alpha_{12})^2 = (\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2 + \alpha_1\alpha_2 e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + \alpha_1 \alpha_2 e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \overset{*1}{=}$$

$$= (\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2 + \alpha_1\alpha_2\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cancel{i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}\right] +$$

$$+ \alpha_1\alpha_2\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cancel{i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{12} = \pm\sqrt{(\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (7)$$

^{*1} [Σημ: $e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} = \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \overset{*}{=}$ $\boxed{\begin{array}{l}\cos(x) = \cos(-x) \\ \sin(-x) = -\sin x\end{array}}$

$= \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$]

Επίσης: (5) $\Rightarrow \alpha_{12} e^{i\varphi_{12}} = \alpha_1 e^{i\varphi_1} + \alpha_2 e^{i\varphi_2} =$ εξ' ορισμού

$$= \alpha_1 e^{i(\omega t + \phi_1)} + \alpha_2 e^{i(\omega t + \phi_2)} =$$

$$= \alpha_1 e^{i\omega t} e^{i\phi_1} + \alpha_2 e^{i\omega t} e^{i\phi_2} \Rightarrow$$

Προσοχή!!! Δεν είναι δεδομένο ότι $\varphi_{12} = \omega t + \phi_{12}$. Πρέπει να το αποδείξω...

$$\Rightarrow \alpha_{12} e^{i\varphi_{12}} e^{-i\omega t} = \alpha_1 e^{i\phi_1} + \alpha_2 e^{i\phi_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{12} e^{i(\varphi_{12} - \omega t)} = \alpha_1 e^{i\phi_1} + \alpha_2 e^{i\phi_2} \Rightarrow$$

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$

$$\Rightarrow \alpha_{12} \cos(\varphi_{12} - \omega t) + i \alpha_{12} \sin(\varphi_{12} - \omega t) =$$

$$= \alpha_1 \cos(\phi_1) + i \alpha_1 \sin(\phi_1) +$$

$$+ \alpha_2 \cos(\phi_2) + i \alpha_2 \sin(\phi_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_{12} \cos(\varphi_{12} - \omega t) = \alpha_1 \cos\phi_1 + \alpha_2 \cos\phi_2 \\ \alpha_{12} \sin(\varphi_{12} - \omega t) = \alpha_1 \sin\phi_1 + \alpha_2 \sin\phi_2 \end{cases} \Rightarrow$$

διαίρεση κατά μέλη

$$\Rightarrow \tan(\varphi_{12} - \omega t) = \frac{\alpha_1 \sin\phi_1 + \alpha_2 \sin\phi_2}{\alpha_1 \cos\phi_1 + \alpha_2 \cos\phi_2} \quad (8)$$

Το δεξί μέλος της (8) είναι χρονοανεξάρτητο. Άρα κ' το αριστερό μέλος οφείλει να είναι χρονοανεξάρτητο. Άρα η φάση $\varphi_{12} - \omega t$ είναι χρονοανεξάρτητη. Άρα υπάρχει μια πραγματική σταθερά $\phi_{12} \equiv \varphi_{12} - \omega t$ (9).

Άρα η (8) γίνεται
$$\tan\phi_{12} = \frac{\alpha_1 \sin\phi_1 + \alpha_2 \sin\phi_2}{\alpha_1 \cos\phi_1 + \alpha_2 \cos\phi_2} \quad (10)$$

η οποία ~~[illegible]~~ στο $[0, 2\pi)$ επιδέχεται δύο λύσεις ψ_1 κ' $\psi_2 > \psi_1$ που διαφέρουν κατά π δηλ. $\psi_2 - \psi_1 = \pi$.

Τελικά: $x_{12} \overset{(3)}{=} Re(z_{12}) \overset{(4)}{=} \alpha_{12}\cos\varphi_{12} \overset{(9)}{=} \alpha_{12}\cos(\omega t+\phi_{12})$,

όπου οι σταθερές α_{12} κ' φ_{12} είναι οι λύσεις των εξισώσεων (7) κ' (10) που επιπλέον κατά την αρχική στιγμή $t=0$ ικανοποιούν την εξίσωση: $\alpha_1\cos\phi_1+\alpha_2\cos\phi_2=\alpha_{12}\cos\phi_{12}$.

Συμπέρασμα: Η σύνθεση δύο παράλληλων α.α.τ. κοινής συχνότητας οδηγεί σε σύνθετη ταλάντωση που είναι επίσης απλή αρμονική, της αυτής συχνότητας κ' παράλληλη με τις επιμέρους.