Απλή αρμονική ταλάντωση (α.α.τ.)

(*!) Το ισοδύναμο των λύσεων αποδεικνύεται μέσω τριγωνομετρικών ταυτοτήτων.

Έστω: $m \cdot a \overset{\text{B'NN.}}{=} \Sigma F = -sx$

δηλ: $m\ddot{x} + sx = 0$ όπου $\ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, κ.ο.κ.

$\Leftrightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$ όπου $\omega \equiv \sqrt{\frac{s}{m}}$

(*!) Γενική λύση: $x = A\eta\mu\omega t + B\sigma\upsilon\nu\omega t$ ① $\Rightarrow x(t=0) = B \equiv x_0$ ②

και $v = \frac{dx}{dt} = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t) - \omega B\eta\mu(\omega t) \Rightarrow$

$\Rightarrow v(t=0) = \omega A \equiv v_0$ ③

Τελικά: ①, ②, ③ $\Rightarrow$ $\boxed{x = \frac{v_0}{\omega}\eta\mu\omega t + x_0\sigma\upsilon\nu\omega t}$ ④

(*!) Ισοδύναμη διατύπωση γενικής λύσης: $\boxed{x = A\eta\mu(\omega t + \phi)}$ ⑤ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x(t=0) = A\eta\mu\phi \Rightarrow \boxed{A = \frac{x_0}{\eta\mu\phi}}$ ⑥ και $v = \frac{dx}{dt} = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi) \Rightarrow$ ⑦

$\Rightarrow v(t=0) = \omega \cdot A \cdot \sigma\upsilon\nu\phi \overset{⑥}{\Rightarrow} v_0 = \frac{\omega x_0}{\varepsilon\varphi\phi} \Rightarrow \boxed{\varepsilon\varphi\phi = \frac{\omega x_0}{v_0}}$ ⑧

(*!) Άλλη μια διατύπωση: $\boxed{x = A\cos(\omega t + \phi)}$ ⑨ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x(t=0) = A\cos\phi \Rightarrow \boxed{A = \frac{x_0}{\cos\phi}}$ ⑩

- Πόσες φορές περνά το σώμα από την θέση $x=0$; Όσες κ' οι λύσεις της εξίσωσης $x(t)=0 \overset{⑨}{\Rightarrow} \omega t + \phi = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Άρα η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις! Ομοίως αποδεικνύεται ότι το σώμα περνά άπειρες φορές από τις θέσεις $x=A$ κ' $x=-A$. Παράλληλα $|x| \leq A$ αφού $|\cos(\ldots)| \leq 1$. Άρα το σώμα εκτελεί ταλάντωση μεταξύ των θέσεων $x=A$ κ' $x=-A$.

- Πλάτος της ταλάντωσης: η κατ'απόλυτη τιμή μέγιστη απομάκρυνση του σώματος από την θέση ισορροπίας ($x=0$). Εν προκειμένω (εξ. ⑨) πλάτος ταλάντωσης $= A$!

▶ Για την ταχύτητα έχουμε: $v = \frac{dx}{dt} \overset{(9)}{=} -\omega A \sin(\omega t+\phi) \Rightarrow$

$\Rightarrow v(t=0) = -\omega A \sin\phi \overset{(10)}{\Longrightarrow} v_0 = -\omega \tan\phi \, x_0 \Rightarrow \boxed{\tan\phi = -\frac{v_0}{\omega x_0}}$ (11)

▶ Παρατηρώ ότι $x(t) = x(t+T)$ και $v(t) = v(t+T)$ όπου όπου $\boxed{T \equiv 2\pi/\omega}$ (12). Δηλαδή ανά τακτά χρονικά διαστήματα εύρους T το σώμα επιστρέφει στην ίδια ακριβώς θέση, με την ίδια ακριβώς ταχύτητα για να επαναλάβει -επομένως- την ίδια ακριβώς κίνηση. Η παράμετρος T καλείται περίοδος της α.α.τ.

▶ Συνεπώς σε χρονικό διάστημα Δt το σώμα επαναλαμβάνει την ίδια ακριβώς κίνηση $\Delta t / T$ φορές ή $\Delta t \cdot \nu$ φορές όπου $\boxed{\nu \equiv \frac{1}{T}}$ (13) η συχνότητα της α.α.τ.

▶ $v = -\omega A \sin(\omega t+\phi) \Rightarrow |v| \leq \omega A$, δηλαδή η κατ' απόλυτη τιμή μέγιστη ταχύτητα είναι ωA. Καλούμε την τιμή αυτή πλάτος της ταχύτητας.

▶ (12) κ' (13) $\Rightarrow \boxed{\omega = 2\pi \cdot \nu}$ (14) Καλούμε το ω γωνιακή συχνότητα της α.α.τ.

- Για την επιτάχυνση έχουμε: $\alpha = \dot{\upsilon} = \ddot{x} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$ (15)

(15) $\Rightarrow \alpha = -\omega^2 x \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$ όπως περιμέναμε.

- Επίσης στο $x=0$ έχω: $\alpha = 0 \Rightarrow m \cdot \alpha = 0 \Rightarrow \Sigma F = 0$ για αυτό η θέση $x=0$ καλείται <u>θέση ισορροπίας</u>

- Εφόσον $\Sigma F = -sx$ η συνισταμένη δύναμη είναι πάντα αντίρροπη της μετατόπισης $\Delta x = x - 0$ από την θέση ισορροπίας. Άρα η ΣF τείνει να επαναφέρει το σώμα στην θέση $x=0$. Για αυτό καλείται <u>δύναμη επαναφοράς</u>.

- Για την κινητική ενέργεια K ισχύει: $K = \frac{1}{2} m \upsilon^2 =$

$$= \frac{m}{2}\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{m}{2}\omega^2 A^2 \left[1 - \cos^2(\omega t + \phi)\right] \overset{(9)}{=}$$

$$= \frac{m}{2}\omega^2 A^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \frac{1}{2} s A^2 - \frac{1}{2} s x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K + \frac{1}{2} s x^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} s A^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{K + U = E}$$

όπου $U = \frac{1}{2} s x^2$ η δυναμική ενέργεια του συστήματος κ' E η συνολική μηχανική ενέργεια.

- Ουσιαστικά U είναι η <u>ελάχιστη ενέργεια</u> που πρέπει να καταναλώσω προκειμένου να μεταφέρω τον αρχικά ακίνητο ταλαντωτή από την θέση ισορροπίας $x=0$ σε μια τυχαία θέση x.