ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΘΕΜΑΤΑ (Α)

ΘΕΜΑ 1: Αρμονικός ταλαντωτής με μάζα *m*, σκληρότητα ελατηρίου *s* και απόσβεση *r* εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση υπό την επίδραση της διεγείρουσας δύναμης $F(t)=F_0 \cos\omega t$.
α) Αν το πλάτος μετατόπισης είναι $F_0/(\omega Z_m)$ και το πλάτος ταχύτητας είναι F_0/Z_m στη μόνιμη κατάσταση, να βρεθούν οι συχνότητες συντονισμού ταχύτητας και μετατόπισης καθώς και σχέση που τις συνδέει.
β) Αν η μέση ισχύς που προσφέρεται στον ταλαντωτή είναι $P_{av} = \frac{1}{2}\frac{F_0^2 r}{Z_m^2}$, όπου Z_m η εμπέδηση του ταλαντωτή και $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$, να αποδειχτεί ότι $Q = \frac{\omega_0 m}{r}$ με ω_0 τη συχνότητα συντονισμού ταχύτητας και ω_1, ω_2 τις συχνότητες όπου η μέση ισχύς είναι η μισή της μέγιστης ($P_{av,\max} = \frac{F_0^2}{2r}$). Πώς μεταβάλλεται ο Q με τα *m, s, r*;

ΘΕΜΑ 2: Αρμονικός ταλαντωτής με μάζα *m*, σκληρότητα ελατηρίου *s* και χωρίς απόσβεση (*r=0*) εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση υπό την επίδραση της διεγείρουσας δύναμης $F(t)=F_0 \cos\omega t$. α) Να βρεθεί η εξίσωση μετατόπισης για τη μόνιμη κατάσταση. β) Αν η εξίσωση μετατόπισης για τη μεταβατική κατάσταση είναι $x_{\mu\epsilon\tau} = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}, \quad (\omega_0^2 = s/m)$ να αποδειχτεί ότι η γενική λύση είναι:
$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t + A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$. γ) Αν ο ταλαντωτής εκκινεί από την ηρεμία με μηδενική αρχική ταχύτητα $[x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=0]$ να δείξετε ότι εκτελεί διακροτήματα με συχνότητα $(\omega+\omega_0)/2$ και διαμόρφωση πλάτους με συχνότητα $(\omega-\omega_0)/2$.

ΘΕΜΑ 3: Αρμονικός ταλαντωτής με μάζα *m*, σκληρότητα ελατηρίου *s* και μηδενική απόσβεση *r=0* εκτελεί ελεύθερες ταλαντώσεις με αρχική ταχύτητα u_0 και αρχική μετατόπιση x_0. α) Εάν η γενική μορφή της εξίσωσης για τη μετατόπιση είναι $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t, A = x_0, B = u_0/\omega$, να βρεθούν κατάλληλες εκφράσεις για τα Α και Β ώστε η μετατόπιση να γίνει $x = \alpha\cos(\omega t + \varphi)$. β) Πώς συνδέονται τα α και φ με τα u_0 και x_0; γ) Να βρεθούν σχέσεις για την ταχύτητα και την επιτάχυνση του ταλαντωτή συναρτήσει των α και φ. Ποια η διαφορά φάσης κάθε μεγέθους από τη μετατόπιση; δ) Τι τιμές παίρνουν τα α και φ για αρχικές συνθήκες i) $u_0 \neq 0$, $x_0=0$ και ii) $u_0=0$, $x_0 \neq 0$;

ΘΕΜΑ 4: Αρμονικός ταλαντωτής με μάζα *m*, σκληρότητα ελατηρίου *s* και απόσβεση *r* εκτελεί ελεύθερες ταλαντώσεις με αρχική ταχύτητα u_0 και μηδενική αρχική μετατόπιση ($x_0=0$). α) Αν η γενική μορφή της εξίσωσης για την απομάκρυνση με υπερκρίσιμη απόσβεση είναι $x = e^{-pt}(F\cosh qt + G\sinh qt),\ p = r/2m,\ q = (p^2 - s/m)^{1/2}$, να βρεθούν οι σχέσεις για τη μετατόπιση και την ταχύτητα του παραπάνω ταλαντωτή. β) Να βρεθούν σχέσεις για τη μετατόπιση και την ταχύτητα στην περίπτωση της κρίσιμης απόσβεσης (*q=0*), αν $x_{\kappa\rho\iota\sigma\iota\mu o} = (A + Bt)e^{-pt}$ γ) Να συγκριθούν οι μετατοπίσεις των α) και β) και να αποδειχτεί ότι αν διαφέρει μόνο η *s*, ο ταλαντωτής με κρίσιμη απόσβεση επιστρέφει ταχύτερα στη θέση ισορροπίας. *Υπόδειξη:* Να χρησιμοποιηθεί η σχέση $\frac{\sinh x}{x} > 1 \ \gamma\iota\alpha\ x > 0$.

ΘΕΜΑ 5: Αρμονικός ταλαντωτής με μάζα *m*, σκληρότητα ελατηρίου *s* και χωρίς απόσβεση (*r=0*) εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση υπό την επίδραση της διεγείρουσας δύναμης $F(t)=F_0 \cos\omega t$. α) Να βρεθεί η εξίσωση μετατόπισης για τη μόνιμη κατάσταση. β) Αν η εξίσωση μετατόπισης για τη μεταβατική κατάσταση είναι $x_{\mu\epsilon\tau} = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}, \quad (\omega_0^2 = s/m)$ να αποδειχτεί ότι η γενική λύση είναι:
$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t + A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t$. γ) Αν ο ταλαντωτής εκκινεί από την ηρεμία με μηδενική αρχική ταχύτητα $(x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=0)$ να δείξετε ότι εκτελεί διακροτήματα με συχνότητα $(\omega+\omega_0)/2$ και διαμόρφωση πλάτους με συχνότητα $(\omega-\omega_0)/2$. *Δίδεται:* $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

ΘΕΜΑ 6: Αρμονικός ταλαντωτής με μάζα *m*, σκληρότητα ελατηρίου *s* και απόσβεση *r* εκτελεί ελεύθερες ταλαντώσεις με αρχική ταχύτητα u_0 και μηδενική αρχική μετατόπιση $(x_0=0)$. α) Αν η γενική μορφή της εξίσωσης για την απομάκρυνση με υπερκρίσιμη απόσβεση είναι $x = e^{-pt}(F\cosh qt + G\sinh qt),\ p = r/2m,\ q = (p^2 - s/m)^{1/2}$, βρείτε τις σχέσεις για τη μετατόπιση και την ταχύτητα του παραπάνω ταλαντωτή. β) Στην περίπτωση της κρίσιμης απόσβεσης $(q=0)$, επαληθεύστε ότι η $x_{κρισιμο} = (A+Bt)e^{-pt}$ αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης και βρείτε σχέσεις για τη μετατόπιση και την ταχύτητα. γ) Συγκρίνετε τις μετατοπίσεις των παραπάνω περιπτώσεων α) και β) και αποδείξτε ότι αν διαφέρει μόνο η *s*, ο ταλαντωτής με κρίσιμη απόσβεση επιστρέφει ταχύτερα στη θέση ισορροπίας.

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η σχέση $\dfrac{\sinh x}{x} > 1\ για\ x > 0$.

ΘΕΜΑ 7: Αρμονικός ταλαντωτής με μάζα *m*, σκληρότητα ελατηρίου *s* και απόσβεση *r* εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση υπό την επίδραση της διεγείρουσας δύναμης $F(t)=F_0 \cos\omega t$.

α) Αν το πλάτος μετατόπισης είναι $F_0/(\omega Z_m)$ και το πλάτος ταχύτητας είναι F_0/Z_m στη μόνιμη κατάσταση, να βρεθούν οι συχνότητες συντονισμού ταχύτητας και μετατόπισης καθώς και σχέση που τις συνδέει.

β) Αν η μέση ισχύς που προσφέρεται στον ταλαντωτή είναι $P_{av} = \dfrac{1}{2}\dfrac{F_0^2 r}{Z_m^2}$, όπου Z_m η εμπέδηση του ταλαντωτή και $Q = \dfrac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$, να αποδειχτεί ότι $Q = \dfrac{\omega_0 m}{r}$ με ω_0 τη συχνότητα συντονισμού ταχύτητας και ω_1, ω_2 τις συχνότητες όπου η μέση ισχύς είναι η μισή της μέγιστης ($P_{av,\max} = \dfrac{F_0^2}{2r}$). Πώς μεταβάλλεται ο Q με τα *m, s, r*;

ΘΕΜΑ 8: Η γενική λύση για τη μετατόπιση αρμονικού ταλαντωτή με μάζα *m*, σκληρότητα ελατηρίου *s* και απόσβεση *r* που εκτελεί ελεύθερες ταλαντώσεις είναι: $x = e^{-pt}(C_1 e^{qt} + C_2 e^{-qt}),\ p = r/2m,\ q = (p^2 - s/m)^{1/2}$, C_1, C_2 σταθερές. α) Να αποδείξετε ότι στην περίπτωση υποκρίσιμης απόσβεσης $(p^2 < s/m)$ η ανωτέρω λύση περιγράφει ημιτονοειδή ταλάντωση με συχνότητα $\omega' = \sqrt{\dfrac{s}{m} - \dfrac{r^2}{4m^2}}$, αρχική φάση φ και πλάτος που μειώνεται εκθετικά με το χρόνο. β) Να βρεθεί η σχέση για την ταχύτητα του παραπάνω ταλαντωτή. γ) Αν ο ανωτέρω ταλαντωτής ξεκινάει με αρχική μετατόπιση $x(0)=A_0$, και ο λόγος δύο οποιονδήποτε διαδοχικών μεγίστων της μετατόπισης είναι $A_n / A_{n+1} = K$, με γνωστή τη μάζα *m* του ταλαντωτή, να βρεθεί σχέση για την απόσβεση *r* συναρτήσει των *m, K* και της περιόδου *T*.

ΘΕΜΑ 9: Αρμονικός ταλαντωτής με μάζα *m*, σκληρότητα ελατηρίου *s* και απόσβεση *r* εκτελεί ελεύθερες ταλαντώσεις με αρχική ταχύτητα u_0 και αρχική μετατόπιση x_0. α) Να αποδείξετε ότι η γενική μορφή της εξίσωσης για τη μετατόπιση είναι $x = C\exp(-pt \pm qt),\ p = r/2m,\ q = (p^2 - s/m)^{1/2}$ β) Να βρεθούν οι σχέσεις για τη μετατόπιση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση στην περίπτωση της κρίσιμης απόσβεσης $(q=0)$, γ) Αν ο ανωτέρω ταλαντωτής με κρίσιμη απόσβεση εκκινεί με αρχική ταχύτητα u_0 και $x_0=0$, να βρεθεί η μέγιστη μετατόπιση, η ελάχιστη ταχύτητα και οι χρονικές στιγμές που αυτές επιτυγχάνονται. δ) Να γίνουν πρόχειρα διαγράμματα των $x(t)$, $\dot{x}(t)$.

ΘΕΜΑ 10: Αρμονικός ταλαντωτής με μάζα *m*, σκληρότητα ελατηρίου *s* και απόσβεση *r* εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση υπό την επίδραση της διεγείρουσας δύναμης $F(t)=F_0 \cos\omega t$. α) Να αποδείξετε ότι η μετατόπιση $x = \dfrac{F_0}{\omega Z_m}\sin(\omega t - \varphi)$ μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, με διαφορά φάσης ως προς τη διεγείρουσα δύναμη $\pi/2$ η μία και π η άλλη. β) Επίσης να αποδείξετε ότι η ταχύτητα αναλύεται σε δύο συνιστώσες, η μία σε φάση με την F και η άλλη με υστέρηση $\pi/2$. Ποια η φυσική σημασία τους; γ) Να βρεθούν εκφράσεις για τη στιγμιαία ισχύ $P(t)$ κάθε συνιστώσας ταχύτητας. δ) Να βρεθεί η μέση τιμή της κάθε συνιστώσας ισχύος για χρονικό διάστημα μιας περιόδου *T*.

ΘΕΜΑ 11: Αρμονικός ταλαντωτής με μάζα *m*, σκληρότητα ελατηρίου *s* και απόσβεση *r* εκτελεί ελεύθερες ταλαντώσεις με αρχική ταχύτητα u_0 και αρχική μετατόπιση x_0. α) Να αποδείξετε ότι η γενική μορφή της εξίσωσης για τη μετατόπιση είναι $x = C\exp(-pt \pm qt),\ p = r/2m,\ q = (p^2 - s/m)^{1/2}$ β) Να βρεθούν οι σχέσεις για τη μετατόπιση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση στην περίπτωση της κρίσιμης απόσβεσης ($q=0$), γ) Αν ο ανωτέρω ταλαντωτής με κρίσιμη απόσβεση εκκινεί με αρχική ταχύτητα u_0 και $x_0=0$, να βρεθεί η μέγιστη μετατόπιση και η χρονική στιγμή που αυτή επιτυγχάνεται. δ) Να γίνει πρόχειρο διάγραμμα της $x(t)$.

ΘΕΜΑ 12: Αρμονικός ταλαντωτής με μάζα *m*, σκληρότητα ελατηρίου *s* και απόσβεση *r* εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση υπό την επίδραση της διεγείρουσας δύναμης $F(t)=F_0 \cos\omega t$. α) Να βρεθούν οι σχέσεις για τη μετατόπιση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση στη μόνιμη κατάσταση. β) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα φασόρων δύναμης, μετατόπισης, ταχύτητας και επιτάχυνσης. γ) Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα διαφοράς φάσης ταχύτητας-δύναμης, μετατόπισης-δύναμης και επιτάχυνσης-δύναμης για τιμές της ω από 0 έως $+\infty$, με επισήμανση της ω_0 (ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή). *Υπόδειξη: Στο α) ερώτημα η διαφορική εξίσωση να λυθεί με μιγαδικούς-εκθετικά και στη συνέχεια να επιλεγεί κατάλληλα το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος της λύσης.*

ΘΕΜΑ 13: Ένα σώμα εκτελεί αρμονικές ταλαντώσεις σε δύο κάθετες διευθύνσεις. Η μετατόπιση στη –*x*- διεύθυνση είναι $x(t)=a_1\sin(\omega t)$ ενώ στην –*y*- είναι $y(t)=a_2\sin(\omega t+\varphi)$. α) Να αποδειχτεί ότι η σύνθεση των ανωτέρω ταλαντώσεων δίδει την εξίσωση: $X^2 + Y^2 - 2XY\cos\varphi = \sin^2\varphi,$ όπου $X = \dfrac{x}{a_1},\ Y = \dfrac{y}{a_2}$. β) Ποιο σχήμα περιγράφει η σχέση αυτή; Πώς τροποποιείται η σχέση και τι σχήμα προκύπτει όταν γ) $\varphi=\pi/2$ και $a_1=a_2$ και όταν δ) $\varphi=\pi$;
Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η ταυτότητα $\sin^2 z+\cos^2 z=1$

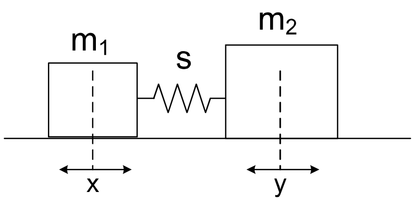
ΘΕΜΑ 14: Αρμονικός ταλαντωτής με μάζα *m*, σκληρότητα ελατηρίου *s* και απόσβεση *r* εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση υπό την επίδραση της διεγείρουσας δύναμης $F(t)=F_0 \cos\omega t$. α) Να βρεθούν οι σχέσεις για τη μετατόπιση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση στη μόνιμη κατάσταση. β) Να σχεδιαστεί το διάγραμμα φασόρων δύναμης, μετατόπισης, ταχύτητας και επιτάχυνσης. γ) Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα διαφοράς φάσης ταχύτητας-δύναμης, και μετατόπισης-δύναμης για τιμές της ω από 0 έως $+\infty$, με επισήμανση της ω_0 (ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή).
Υπόδειξη: Στο α) ερώτημα η διαφορική εξίσωση να λυθεί με μιγαδικούς-εκθετικά και στη συνέχεια να επιλεγεί κατάλληλα το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος της λύσης.

ΘΕΜΑ 15: Ένα σώμα εκτελεί αρμονικές ταλαντώσεις σε δύο κάθετες διευθύνσεις. Η μετατόπιση στη –*x*- διεύθυνση είναι $x(t)=a_1\sin(\omega t)$ ενώ στην –*y*- είναι $y(t)=a_2\sin(\omega t+\varphi)$. α) Να αποδειχτεί ότι η σύνθεση των ανωτέρω ταλαντώσεων δίδει την εξίσωση: $X^2 + Y^2 - 2XY\cos\varphi = \sin^2\varphi,$ όπου $X = \dfrac{x}{a_1},\ Y = \dfrac{y}{a_2}$. β) Ποιο σχήμα περιγράφει η σχέση αυτή; γ) Πώς τροποποιείται η σχέση και τι σχήμα προκύπτει όταν $\varphi=\pi$ και $a_1=a_2$; δ) Σχεδιάστε το σχήμα της περίπτωσης γ) *Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η ταυτότητα* $\sin^2 z+\cos^2 z=1$

ΘΕΜΑ 16: Αρμονικός ταλαντωτής με μάζα *m*, σκληρότητα ελατηρίου *s* και απόσβεση *r* εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση υπό την επίδραση της διεγείρουσας δύναμης $F(t)=F_0 \cos\omega t$. α) Αν το πλάτος μετατόπισης είναι $F_0/(\omega Z_m)$ και το πλάτος ταχύτητας είναι F_0/Z_m στη μόνιμη κατάσταση, να βρεθούν οι συχνότητες συντονισμού ταχύτητας και μετατόπισης καθώς και σχέση που τις συνδέει. β) Αν η μέση ισχύς που προσφέρεται στον ταλαντωτή είναι $P_{av} = \dfrac{1}{2}\dfrac{F_0^2 r}{Z_m^2}$, όπου Z_m η εμπέδηση του ταλαντωτή και ο συντελεστής ποιότητας είναι $Q = \omega_0/(\omega_2 - \omega_1)$, να αποδειχτεί ότι $Q = \omega_0 m/r$ με ω_0 τη συχνότητα συντονισμού ταχύτητας και ω_1, ω_2 τις συχνότητες όπου η μέση ισχύς είναι η μισή της μέγιστης $P_{av,\max} = F_0^2/(2r)$.

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΘΕΜΑΤΑ (Β)

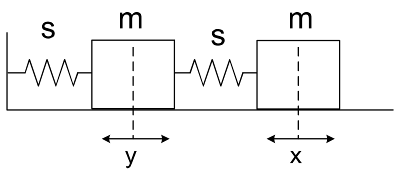
ΘΕΜΑ 17: Δίδεται σύστημα δύο μαζών m_1, m_2 συζευγμένων με ελατήριο σκληρότητας s, οι οποίες κινούνται χωρίς τριβή και χωρίς απόσβεση σε οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να γίνει σκαρίφημα του συστήματος για $y>x>0$ από το οποίο να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης της κάθε μάζας και να εξηγηθεί πώς προκύπτουν.
β) Να βρεθούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης και ο λόγος των πλατών ταλάντωσης. Ποια η διαφορά φάσης στις μετατοπίσεις των δύο μαζών; *Υπόδειξη:* Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της συστηματικής αναζήτησης των τρόπων.

ΘΕΜΑ 18: Εγκάρσιο κύμα διαδίδεται από τα αρνητικά προς τα θετικά x σε χορδή που τείνεται με τάση T και έχει εμπέδηση Z_1. Στη θέση $x=0$ το κύμα συναντά άλλη χορδή που τείνεται με τάση T και έχει εμπέδηση Z_2. α) Να γραφούν οι οριακές συνθήκες στο σημείο $x=0$ και να εξηγηθεί πώς προκύπτουν. β) Να βρεθούν οι συντελεστές μετάδοσης και ανάκλασης πλάτους (t_A, r_A *αντίστοιχα)* καθώς και οι συντελεστές μετάδοσης και ανάκλασης ενέργειας (t, r *αντίστοιχα)* συναρτήσει των Z_1, Z_2. γ) Ποιος ο λόγος των πλατών προσπίπτοντος και ανακλώμενου κύματος αν $Z_2=0$ και $Z_2\to\infty$; δ) Τετραγωνικός παλμός ύψους h και πλάτους a διαδίδεται προς τα θετικά x στο παραπάνω σύστημα. Να σχεδιαστεί η μορφή του παλμού στην χορδή με Z_1 τις χρονικές στιγμές πριν, μετά την ανάκλαση ολόκληρου του παλμού και όταν έχει ανακλαστεί ο μισός παλμός για $Z_2=0$ και $Z_2\to\infty$.

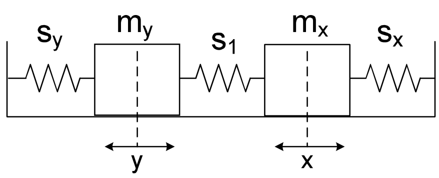
ΘΕΜΑ 19: Δίδεται σύστημα δύο ίσων μαζών m, συζευγμένων με ελατήρια σκληρότητας s, οι οποίες κινούνται χωρίς τριβή και χωρίς απόσβεση σε οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο δίπλανό σχήμα.



α) Να γίνει σκαρίφημα του συστήματος για $y>x>0$ από το οποίο να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης της κάθε μάζας και να εξηγηθεί πώς προκύπτουν. β) Να βρεθούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης. γ) Να βρεθούν οι λόγοι των πλατών για κάθε τρόπο ταλάντωσης. Ποια η διαφορά φάσης μεταξύ των μαζών σε κάθε τρόπο;
Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της συστηματικής αναζήτησης των τρόπων.

ΘΕΜΑ 20: Χορδή εμπέδησης Z_1 συνδέεται με άλλη χορδή εμπέδησης Z_2 στο σημείο $x=0$ μέσω μάζας m. Εγκάρσιο κύμα διαδίδεται από τα αρνητικά προς τα θετικά x στην παραπάνω χορδή. α) Να γραφούν οι οριακές συνθήκες στο σημείο $x=0$ και να εξηγηθεί πώς προκύπτουν. β) Να βρεθούν οι συντελεστές μετάδοσης και ανάκλασης πλάτους (t_A, r_A *αντίστοιχα)* καθώς και οι συντελεστές μετάδοσης και ανάκλασης ενέργειας (t, r *αντίστοιχα)* συναρτήσει των Z_1, Z_2 και m. γ) Να δείξετε ότι η ανωτέρω διάταξη λειτουργεί ως βαθυπερατό φίλτρο δ) Αν $Z_1=Z_2=Z$, να εκφράσετε στους συντελεστές t_A, r_A συναρτήσει του $q=\dfrac{m\omega}{2\rho c}$.
Ποια η φυσική σημασία του συντελεστή q;

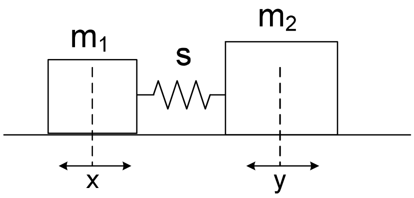
ΘΕΜΑ 21: Δίδεται σύστημα δύο μαζών m_x, m_y, συζευγμένων με ελατήριο σκληρότητας s_1 και πλευρικά ελατήρια s_x, s_y οι οποίες κινούνται χωρίς τριβή και χωρίς απόσβεση σε οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να γίνει σκαρίφημα του συστήματος για $x>y>0$ από το οποίο να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης της κάθε μάζας και να εξηγηθεί πώς προκύπτουν.
β) Να βρεθούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης στην περίπτωση $m_x=m_y=m$, $s_y=s_1=s$, $s_x=0$. γ) Να βρεθούν οι λόγοι των πλατών για κάθε τρόπο ταλάντωσης. Ποια η διαφορά φάσης μεταξύ πλατών σε κάθε περίπτωση;
Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της συστηματικής αναζήτησης των τρόπων.

ΘΕΜΑ 22: Σύστημα δύο ίσων μαζών m, που συνδέονται με τρία ελατήρια (1 σύζευξης και δύο πλευρικά) σκληρότητας s, εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση υπό την επίδραση δύναμης $F=F_0\cos(\omega t)$ η οποία ενεργεί στη μάζα με μετατόπιση x. Ο λόγος των μετατοπίσεων (σε απόλυτες τιμές) είναι: $\left|\dfrac{y}{x}\right|=\left|\dfrac{\omega_2^2-\omega_1^2}{\omega_2^2+\omega_1^2-2\omega^2}\right|$, όπου $\omega_1^2=s/m$, $\omega_2^2=s/m+2s/m$, οι συχνότητες των δύο τρόπων ταλάντωσης. α) Να διερευνήσετε την εξάρτηση του λόγου $|y/x|$ από τη συχνότητα ω και να δείξετε ότι πρόκειται για μηχανικό φίλτρο διέλευσης ζώνης. Να γίνει σκαρίφημα του $|y/x|$ συναρτήσει του ω με επισήμανση των ω_1 και ω_2. β) Σε ποια περίπτωση προκύπτει φίλτρο διέλευσης χαμηλών συχνοτήτων (βαθυπερατό);

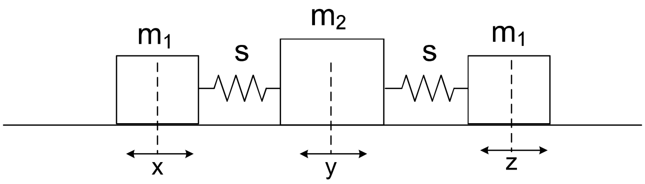
ΘΕΜΑ 23: Δίδεται σύστημα δύο μαζών m_1, m_2 συζευγμένων με ελατήριο σκληρότητας s, οι οποίες κινούνται χωρίς τριβή και χωρίς απόσβεση σε οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να γίνει σκαρίφημα του συστήματος για $x>y>0$ από το οποίο να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης της κάθε μάζας και να εξηγηθεί πώς προκύπτουν.
β) Να βρεθούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης και ο λόγος των πλατών ταλάντωσης. Ποια η διαφορά φάσης στις μετατοπίσεις των δύο μαζών; *Υπόδειξη:* Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της συστηματικής αναζήτησης των τρόπων.

ΘΕΜΑ 24: Χορδή εμπέδησης Z_1 συνδέεται με άλλη χορδή εμπέδησης Z_2 στο σημείο $x=0$ μέσω μάζας m. Εγκάρσιο κύμα διαδίδεται από τα αρνητικά προς τα θετικά x στην παραπάνω χορδή. α) Να γραφούν οι οριακές συνθήκες στο σημείο $x=0$. β) Να βρεθούν οι συντελεστές μετάδοσης και ανάκλασης πλάτους (t_A, r_A *αντίστοιχα)* καθώς και οι συντελεστές μετάδοσης και ανάκλασης ενέργειας (t, r *αντίστοιχα)* συναρτήσει των Z_1, Z_2 και m.
γ) Ποιος ο λόγος των πλατών προσπίπτοντος και ανακλώμενου κύματος αν $m=0$, $Z_2=0$ και $Z_2\to\infty$ *;*

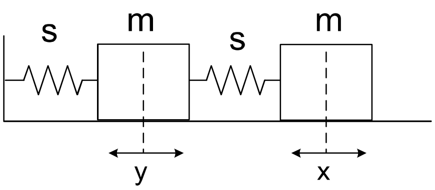
ΘΕΜΑ 25: Δίδεται σύστημα τριών μαζών m_1, m_2, m_1 συζευγμένων με ελατήρια σκληρότητας s, οι οποίες κινούνται χωρίς τριβή και χωρίς απόσβεση σε οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να γίνει σκαρίφημα του συστήματος για $x>y>z>0$ από το οποίο να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης της κάθε μάζας και να εξηγηθεί πώς προκύπτουν.
β) Να βρεθούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.
Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της συστηματικής αναζήτησης των τρόπων.

ΘΕΜΑ 26: Χορδή εμπέδησης Z_1 συνδέεται με άλλη χορδή εμπέδησης Z_2 στο σημείο $x=0$ μέσω μάζας m. Εγκάρσιο κύμα διαδίδεται από τα αρνητικά προς τα θετικά x στην παραπάνω χορδή. α) Να γραφούν οι οριακές συνθήκες στο σημείο $x=0$ με κατάλληλη δικαιολόγηση. β) Να βρεθούν οι συντελεστές μετάδοσης και ανάκλασης πλάτους (t_A, r_A *αντίστοιχα)* καθώς και οι συντελεστές μετάδοσης και ανάκλασης ενέργειας (t, r *αντίστοιχα)* συναρτήσει των Z_1, Z_2 και m.

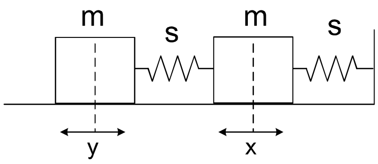
ΘΕΜΑ 27: Δίδεται σύστημα δύο ίσων μαζών m, συζευγμένων με ελατήρια σκληρότητας s, οι οποίες κινούνται χωρίς τριβή και χωρίς απόσβεση σε οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να γίνει σκαρίφημα του συστήματος για $y>x>0$ από το οποίο να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης της κάθε μάζας και να εξηγηθεί πώς προκύπτουν.
β) Να βρεθούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.
γ) Να βρεθούν οι λόγοι των πλατών για κάθε τρόπο ταλάντωσης.
Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της συστηματικής αναζήτησης των τρόπων.

ΘΕΜΑ 28: Χορδή εμπέδησης Z συνδέεται με χορδή της ίδιας εμπέδησης Z στο σημείο $x=0$ μέσω μάζας m. Εγκάρσιο κύμα διαδίδεται από τα αρνητικά προς τα θετικά x στην παραπάνω χορδή. α) Να γραφούν οι οριακές συνθήκες στο σημείο $x=0$ και να εξηγηθεί πώς προκύπτουν. β) Να βρεθούν οι συντελεστές μετάδοσης και ανάκλασης πλάτους (t_A, r_A *αντίστοιχα)* καθώς και οι συντελεστές μετάδοσης και ανάκλασης ενέργειας (t, r *αντίστοιχα)* συναρτήσει των Z και m. γ) Να δείξετε ότι η ανωτέρω διάταξη λειτουργεί ως βαθυπερατό φίλτρο δ) Να εκφράσετε στους συντελεστές t_A, r_A συναρτήσει του $q=\dfrac{m\omega}{2\rho c}$. Ποια η φυσική σημασία του συντελεστή q;

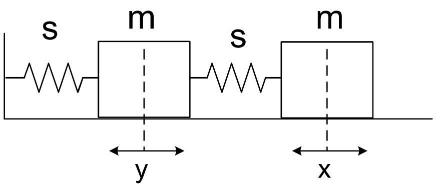
ΘΕΜΑ 29: Δίδεται σύστημα δύο ίσων μαζών *m,* συζευγμένων με ελατήρια σκληρότητας *s*, οι οποίες κινούνται χωρίς τριβή και χωρίς απόσβεση σε οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να γίνει σκαρίφημα του συστήματος για *x>y>0* από το οποίο να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης της κάθε μάζας και να εξηγηθεί πώς προκύπτουν.
β) Να βρεθούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.
γ) Να βρεθούν οι λόγοι των πλατών για κάθε τρόπο ταλάντωσης.
Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της συστηματικής αναζήτησης των τρόπων.

ΘΕΜΑ 30: Σε μεμβράνη απείρου μήκους (στον *–x-* άξονα) και πλάτους *b* (στον *–y-* άξονα) διαδίδεται εγκάρσιο κύμα με μετατόπιση $z(x,y,t)=A_1\sin\left[\omega t-\left(k_x x+k_y y\right)\right]+A_2\sin\left[\omega t-\left(k_x x-k_y y\right)\right],\ \mu\varepsilon\ k^2=k_x^2+k_y^2$. α) Αν οι οριακές συνθήκες είναι $z(x,0,t)=z(x,b,t)=0$, να βρεθεί η συνθήκη σχηματισμού στάσιμων κυμάτων στον άξονα *–y-* και έκφραση για τη *z(x,y,t)* που αποτελεί συνδυασμό στάσιμου και οδεύοντος κύματος. β) Να βρεθούν σχέσεις για τις ταχύτητες φάσης u_p και ομάδας u_g στην κατεύθυνση *–x-*. γ) Να αποδειχτεί ότι $u_p u_g=u^2$ όπου $u=\omega/k$ η φασική ταχύτητα του μέσου.

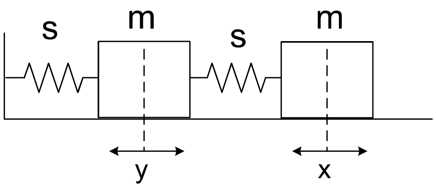
ΘΕΜΑ 31: Δίδεται σύστημα δύο ίσων μαζών *m,* συζευγμένων με ελατήρια σκληρότητας *s*, οι οποίες κινούνται χωρίς τριβή και χωρίς απόσβεση σε οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να γίνει σκαρίφημα του συστήματος για *x>y>0* από το οποίο να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης της κάθε μάζας και να εξηγηθεί πώς προκύπτουν.
β) Να αποδειχτεί ότι οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης είναι: $\omega^2=(3\pm\sqrt{5})\,s/2m$. γ) Να βρεθούν οι λόγοι των πλατών για κάθε τρόπο ταλάντωσης.
Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της συστηματικής αναζήτησης των τρόπων.

ΘΕΜΑ 32: Σε μεμβράνη απείρου μήκους (στον *–x-* άξονα) και πλάτους *b* (στον *–y-* άξονα) διαδίδεται εγκάρσιο κύμα με μετατόπιση $z(x,y,t)=A_1\sin\left[\omega t-\left(k_x x+k_y y\right)\right]+A_2\sin\left[\omega t-\left(k_x x-k_y y\right)\right],\ \mu\varepsilon\ k^2=k_x^2+k_y^2$. α) Αν οι οριακές συνθήκες είναι $z(x,0,t)=z(x,b,t)=0$, να βρεθεί η συνθήκη σχηματισμού στάσιμων κυμάτων στον άξονα *–y-* και έκφραση για τη *z(x,y,t)* που αποτελεί συνδυασμό στάσιμου κύματος στον άξονα *–y-* και οδεύοντος κύματος στον άξονα *–x-*. β) Να βρεθεί η ελάχιστη συχνότητα (ω_{min}) για τη διάδοση κύματος στον άξονα –x- γ) Να βρεθούν σχέσεις για τις ταχύτητες φάσης u_p και ομάδας u_g στην κατεύθυνση *–x-*.

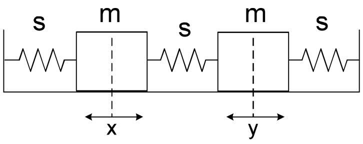
ΘΕΜΑ 33: Δίδεται σύστημα δύο ίσων μαζών *m,* συζευγμένων με ελατήρια σκληρότητας *s*, οι οποίες κινούνται χωρίς τριβή και χωρίς απόσβεση σε οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να γίνει σκαρίφημα του συστήματος για *y>x>0* από το οποίο να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης της κάθε μάζας και να εξηγηθεί πώς προκύπτουν.
β) Να αποδειχτεί ότι οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης είναι: $\omega^2=(3\pm\sqrt{5})\,s/2m$. γ) Να βρεθεί ο λόγος των πλατών και η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο μαζών για κάθε τρόπο ταλάντωσης.
Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της συστηματικής αναζήτησης των τρόπων.

ΘΕΜΑ 34: Σε μεμβράνη απείρου μήκους (στον *–x-* άξονα) και πλάτους *b* (στον *–y-* άξονα) διαδίδεται εγκάρσιο κύμα με μετατόπιση $z(x,y,t)=A_1\exp i\left[\omega t-\left(k_x x+k_y y\right)\right]+A_2\exp i\left[\omega t-\left(k_x x-k_y y\right)\right],\ \mu\varepsilon\ k^2=k_x^2+k_y^2$. α) Αν οι οριακές συνθήκες είναι $z(x,0,t)=z(x,b,t)=0$, να βρεθεί η συνθήκη σχηματισμού στάσιμων κυμάτων στον άξονα *–y-* και έκφραση για τη *z(x,y,t)* που αποτελεί συνδυασμό στάσιμου κύματος στον άξονα *–y-* και οδεύοντος κύματος στον άξονα *–x-*. β) Να βρεθεί η ελάχιστη συχνότητα (ω_{min}) για τη διάδοση κύματος στον άξονα –x- γ) Να βρεθούν σχέσεις για τις ταχύτητες φάσης u_p και ομάδας u_g στην κατεύθυνση *–x-*. Δείξτε ότι $u_p\, u_g=c^2$, με $c=\omega/k$.

ΘΕΜΑ 35: Δίδεται σύστημα δύο ίδιων μαζών *m,* συζευγμένων με ελατήρια σκληρότητας *s*, οι οποίες κινούνται χωρίς τριβή και χωρίς απόσβεση σε οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



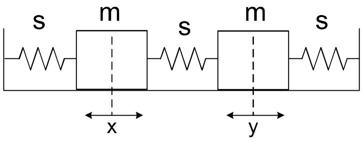
α) Να γίνει σκαρίφημα του συστήματος για $x>y>0$ από το οποίο να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης της κάθε μάζας και να εξηγηθεί πώς προκύπτουν.

β) Να βρεθούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης και ο λόγος των πλατών ταλάντωσης σε κάθε τρόπο. Ποια η διαφορά φάσης στις μετατοπίσεις των δύο μαζών σε κάθε τρόπο ταλάντωσης;

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της συστηματικής αναζήτησης των τρόπων.

ΘΕΜΑ 36: Γραμμική περιοδική δομή απείρου μήκους με μάζες m σε αποστάσεις α που δέχονται δύναμη T από τις γειτονικές μάζες έχει σχέση διασποράς συχνοτήτων $\omega^2 = \dfrac{4T}{am}\sin^2\dfrac{ka}{2}$, όπου k ο κυματάριθμος. α) Να βρεθεί η μέγιστη συχνότητα και ο αντίστοιχος κυματάριθμος. β) Να βρεθούν σχέσεις για τις ταχύτητες φάσης u και ομάδας u_g συναρτήσει του $ka/2$ και της ταχύτητας c. γ) Να αποδειχτεί ότι για μικρά k: $u=u_g=c$ και ότι για μεγάλα k: $u_g/u=0$. δ) Να γίνει το διάγραμμα διασποράς $\omega(k)$. Παρουσιάζει διασπορά το μέσο; Είναι η διασπορά ομαλή ή ανώμαλη; Εξηγείστε. *Δίδονται:* $c^2=T/\rho$, $\rho=m/a$.

ΘΕΜΑ 37: Δίδεται σύστημα δύο ίδιων μαζών m, συζευγμένων με ελατήρια σκληρότητας s, οι οποίες κινούνται χωρίς τριβή και χωρίς απόσβεση σε οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να γίνει σκαρίφημα του συστήματος για $y>x>0$ από το οποίο να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης της κάθε μάζας και να εξηγηθεί πώς προκύπτουν.

β) Να βρεθούν οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης και ο λόγος των πλατών ταλάντωσης σε κάθε τρόπο. Ποια η διαφορά φάσης στις μετατοπίσεις των δύο μαζών σε κάθε τρόπο ταλάντωσης;

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της συστηματικής αναζήτησης των τρόπων.

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΘΕΜΑΤΑ (Γ)

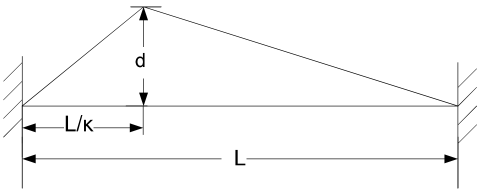
ΘΕΜΑ 38: Χορδή κιθάρας μήκους L, μάζας m με σταθερά άκρα, εκκινεί από την ηρεμία με τριγωνικό σχήμα που έχει μέγιστο ύψος d στη θέση $x=L/3$. α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $A_n = \dfrac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin\dfrac{n\pi x}{L}\,dx$ των συντελεστών Fourier από την ανάλυση της αρχικής μετατόπισης της χορδής σε σειρά ημιτόνων $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\dfrac{n\pi x}{L}$. β) Ποιες αρμονικές μηδενίζονται και γιατί; *Υπόδειξη:* $\int u\sin u\,du = \sin u - u\cos u$.

ΘΕΜΑ 39: Σε μεμβράνη απείρου μήκους (στον –x- άξονα) και πλάτους b (στον –y- άξονα) διαδίδεται εγκάρσιο κύμα με μετατόπιση $z(x,y,t) = A_1\sin\left[\omega t - \left(k_x x + k_y y\right)\right] + A_2\sin\left[\omega t - \left(k_x x - k_y y\right)\right]$, $\mu\varepsilon\ k^2 = k_x^2 + k_y^2$. α) Αν οι οριακές συνθήκες είναι $z(x,0,t) = z(x,b,t) = 0$, να βρεθεί η συνθήκη σχηματισμού στάσιμων κυμάτων στον άξονα –y- και έκφραση για τη *z(x,y,t)* που αποτελεί συνδυασμό στάσιμου κύματος στον άξονα –y- και οδεύοντος κύματος στον άξονα –x-. β) Να βρεθεί η ελάχιστη συχνότητα (ω_{min}) για τη διάδοση κύματος στον άξονα –x- γ) Να βρεθούν σχέσεις για τις ταχύτητες φάσης u_p και ομάδας u_g στην κατεύθυνση –x-.

ΘΕΜΑ 40: Χορδή πιάνου, μήκους L, μάζας m, τίθεται σε ταλάντωση από σφυρί με μήκος α και ταχύτητα u στη θέση $x=L/4$. α) Να βρεθούν οι συντελεστές $\omega_n B_n = \dfrac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\,\sin\dfrac{n\pi x}{L}\,dx$ από την ανάλυση της αρχικής ταχύτητας σε σειρά Fourier ημιτόνων $u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n B_n \sin\dfrac{n\pi x}{L}$. β) Ποιές αρμονικές μηδενίζονται και γιατί; γ) Να γραφούν οι πέντε πρώτοι όροι B_n της σειράς ($\omega_n=n\pi c/L$).

ΘΕΜΑ 41: Δίδεται περιθλαστικό φράγμα μετάδοσης με Ν=7 οπές εύρους *d*, σε αποστάσεις *f=2d* μεταξύ τους. Στο φράγμα προσπίπτει κάθετα επίπεδο Η/Μ κύμα μήκους $\lambda \approx d$. α) Να βρεθεί η ένταση *I* της ακτινοβολίας που διαδίδεται υπό γωνία *θ σε* μεγάλη απόσταση πίσω από το φράγμα, γνωρίζοντας ότι για την περίθλαση από κάθε οπή ισχύει $I = I_0 \dfrac{\sin^2 a}{a^2}$, $a = \dfrac{\pi d \sin\theta}{\lambda}$ και ότι για σύνθεση ταλαντώσεων ίδιου πλάτους *α* που έχουν διαδοχικά διαφορά φάσης *δ*, το συνολικό πλάτος *R* είναι: $R = \alpha \dfrac{\sin N\delta/2}{\sin\delta/2}$. β) Αγνοώντας τα φαινόμενα περίθλασης, να βρεθούν οι θέσεις των κύριων κροσσών συμβολής συναρτήσει του παράγοντα *β=πfsinθ/*. γ) Δώστε τον ορισμό της «ελλείπουσας τάξης» κροσσού συμβολής και υπολογίστε την (αν υπάρχει) στο συγκεκριμένο παράδειγμα. δ) Να γίνει σκαρίφημα της έντασης συναρτήσει της τάξης *n* του φάσματος. Ποια η επίδραση της περίθλασης από κάθε οπή;

ΘΕΜΑ 42: Χορδή κιθάρας μήκους *L*, μάζας *m* με σταθερά άκρα, εκκινεί από την ηρεμία με τριγωνικό σχήμα ύψους *d* στη θέση *x=L/κ*. α) Να δείξετε ότι η σχέση για τους συντελεστές $A_n = \dfrac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin\dfrac{n\pi x}{L}\,dx$ που προκύπτουν από την ανάλυση σε σειρά Fourier ημιτόνων της *y(x,t=0)=f(x)*, είναι $A_n = \dfrac{2d\kappa^2}{n^2\pi^2(\kappa-1)}\sin\left(\dfrac{n\pi}{\kappa}\right)$.



β) Για κ=4 να γραφούν όροι A_1 και A_4. Τι παρατηρείτε;

γ) Αν κ=2 και $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\omega_n t \sin\dfrac{n\pi x}{L}$, ποια η μορφή της χορδής τη χρονική στιγμή $\tau = \pi/\omega_1$;

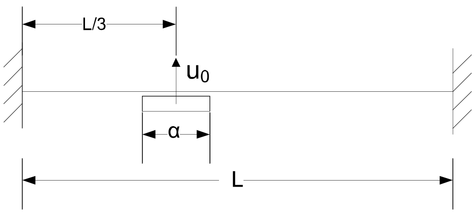
ΘΕΜΑ 43: Χορδή πιάνου, μήκους *L*, μάζας *m*, τίθεται σε ταλάντωση από σφυρί με μήκος α και ταχύτητα u_0 στη θέση *x=L/2*. α) Να βρεθούν οι συντελεστές $\omega_n B_n = \dfrac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\,\sin\dfrac{n\pi x}{L}\,dx$ της σειράς Fourier ημιτόνων $u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n B_n \sin\dfrac{n\pi x}{L}$ που περιγράφει την αρχική ταχύτητα της χορδής. β) Αν η ενέργεια του νιοστού τρόπου ταλάντωσης δίδεται από τη σχέση $E_n = \dfrac{1}{4} m\,\omega_n^2\,B_n^2$ να αποδειχτεί ότι είναι της μορφής $E_n \sim \dfrac{\sin^2 z}{z^2}$.

Υπόδειξη: $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$, $\omega_n = \dfrac{n\pi c}{L}$.

ΘΕΜΑ 44: Σε μεμβράνη απείρου μήκους (στον –*x*- άξονα) και πλάτους *b* (στον –*y*- άξονα) διαδίδεται εγκάρσιο κύμα με μετατόπιση $z(x,y,t) = A_1 \exp i\left[\omega t - \left(k_x x + k_y y\right)\right] + A_2 \exp i\left[\omega t - \left(k_x x - k_y y\right)\right]$, *με* $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. α) Αν οι οριακές συνθήκες είναι $z(x,0,t) = z(x,b,t) = 0$, να βρεθεί η συνθήκη σχηματισμού στάσιμων κυμάτων στον άξονα –*y*- και έκφραση για τη *z(x,y,t)* που αποτελεί συνδυασμό στάσιμου κύματος στον άξονα –*y*- και οδεύοντος κύματος στον άξονα –*x*-. β) Να βρεθεί η ελάχιστη συχνότητα (ω_{min}) για τη διάδοση κύματος στον άξονα –x- γ) Να βρεθούν σχέσεις για τις ταχύτητες φάσης u_p και ομάδας u_g στην κατεύθυνση –*x*-. Δείξτε ότι $u_p u_g = c^2$, με $c = \omega/k$.

ΘΕΜΑ 45: Χορδή πιάνου, μήκους *L*, μάζας *m*, τίθεται σε ταλάντωση από σφυρί με μήκος α και ταχύτητα u_0 στη θέση *x=L/2*. α) Να βρεθούν οι συντελεστές $\omega_n B_n = \dfrac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\,\sin\dfrac{n\pi x}{L}\,dx$ της σειράς Fourier ημιτόνων $u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n B_n \sin\dfrac{n\pi x}{L}$ που δίδει την αρχική ταχύτητα της χορδής. β) Ποιες αρμονικές μηδενίζονται και γιατί; γ) Αν η ενέργεια του νιοστού τρόπου ταλάντωσης δίδεται από τη σχέση $E_n = \dfrac{1}{4} m\,\omega_n^2\,B_n^2$ να αποδειχτεί ότι είναι της μορφής $E_n \sim \dfrac{\sin^2 z}{z^2}$. *Υπόδειξη:* $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$, $\omega_n = \dfrac{n\pi c}{L}$.

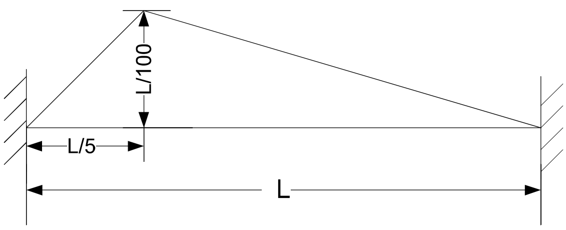
ΘΕΜΑ 46: Χορδή πιάνου μήκους *L,* μάζας *m* που ηρεμεί, τίθεται σε ταλάντωση από σφυρί με μήκος α και ταχύτητα u_0 στη θέση *x=L/3.* α) Να βρεθούν οι συντελεστές $\omega_n B_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\ \sin\frac{n\pi x}{L}\ dx$ που προκύπτουν από την ανάλυση της αρχικής ταχύτητας σε σειρά Fourier ημιτόνων $u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n B_n \sin\frac{n\pi x}{L}$. β) Αν *a=L/*20, να βρεθούν οι τιμές των τεσσάρων πρώτων συντελεστών $\omega_n\ B_n$. γ) Ποιες αρμονικές μηδενίζονται και γιατί;



Υπόδειξη: $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$.

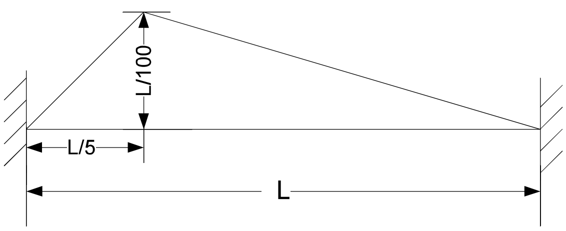
ΘΕΜΑ 47: Επίπεδο Η/Μ κύμα μήκους *λ* προσπίπτει κάθετα σε φράγμα με μία σχισμή εύρους $d \approx \lambda$. Η ένταση *I* της ακτινοβολίας που διαδίδεται υπό γωνία *θ σε* μεγάλη απόσταση πίσω από το φράγμα είναι: $I = I_0\frac{\sin^2 a}{a^2},\ a = \frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$ α) Να βρεθούν οι τιμές του *α* για τις οποίες εμφανίζονται ελάχιστα και οι αντίστοιχες γωνίες *θ.* β) Να δείξετε ότι η σχέση μεγιστοποίησης της έντασης είναι α = tan α. γ) Να γίνει σκαρίφημα της εικόνας περίθλασης *I(a)* δ) Πώς επηρεάζεται η κατανομή της έντασης *I* όταν *d<<λ* και όταν *d>>λ*; Να γίνουν κατάλληλα σχήματα.

ΘΕΜΑ 48: Χορδή κιθάρας μήκους *L,* μάζας *m* με σταθερά άκρα, εκκινεί από την ηρεμία με τριγωνικό σχήμα ύψους *d=L/100* στη θέση *x=L/5.* α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\ \sin\frac{n\pi x}{L}\ dx$ των συντελεστών της σειράς Fourier ημιτόνων $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L}$. β) Ποιες αρμονικές μηδενίζονται; Εξηγείστε.

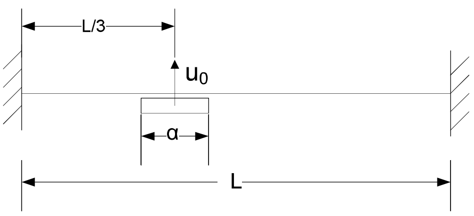


ΘΕΜΑ 49: Σε μεμβράνη απείρου μήκους (στον *–x-* άξονα) και πλάτους *b* (στον *–y-* άξονα) διαδίδεται εγκάρσιο κύμα με μετατόπιση $z(x,y,t) = A_1\sin\left[\omega t - \left(k_x x + k_y y\right)\right] + A_2\sin\left[\omega t - \left(k_x x - k_y y\right)\right],\ \mu\varepsilon\ k^2 = k_x^2 + k_y^2$. α) Αν οι οριακές συνθήκες είναι $z(x,0,t) = z(x,b,t) = 0$, να βρεθεί η συνθήκη σχηματισμού στάσιμων κυμάτων στον άξονα *–y-* και έκφραση για τη *z(x,y,t)* που αποτελεί συνδυασμό στάσιμου και οδεύοντος κύματος. β) Να βρεθούν σχέσεις για τις ταχύτητες φάσης u_p και ομάδας u_g στην κατεύθυνση *–x-*. γ) Να αποδειχτεί ότι $u_p u_g = u^2$ όπου *u=ω/k* η φασική ταχύτητα του μέσου.

ΘΕΜΑ 50: Χορδή κιθάρας μήκους *L,* μάζας *m* με σταθερά άκρα, εκκινεί από την ηρεμία με τριγωνικό σχήμα ύψους *d=L/100* στη θέση *x=L/5.* α) Να βρεθούν οι συντελεστές $A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\ \sin\frac{n\pi x}{L}\ dx$ που προκύπτουν από την ανάλυση της χορδής σε σειρά Fourier ημιτόνων $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L}$. β) Ποιες αρμονικές μηδενίζονται; Εξηγείστε.



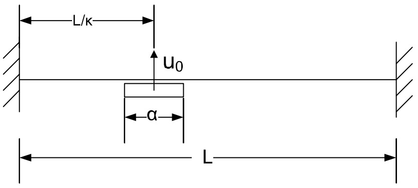
ΘΕΜΑ 51: Χορδή πιάνου μήκους *L,* μάζας *m* που ηρεμεί, τίθεται σε ταλάντωση από σφυρί με μήκος α και ταχύτητα u_0 στη θέση *x=L/3.* α) Αν η γενική μορφή της μετατόπισης είναι: $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t)]\sin(\frac{\omega_n x}{c})$, να αποδείξετε ότι η μορφή της ταχύτητας της ανωτέρω χορδής τη χρονική στιγμή *t*=0 είναι $u_0(x,t=0) = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n B_n \sin\frac{n\pi x}{L}$. (*n=1,2,...* ο αριθμός τρόπων ταλάντωσης)



β) Να βρεθούν οι συντελεστές $\omega_n B_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\ \sin\frac{n\pi x}{L}\ dx$. γ) Ποιες αρμονικές μηδενίζονται και γιατί;

ΘΕΜΑ 52: Σε μεμβράνη απείρου μήκους (στον *–x-* άξονα) και πλάτους *b* (στον *–y-* άξονα) διαδίδεται εγκάρσιο κύμα με μετατόπιση $z(x,y,t)=A_1\sin\left[\omega t-\left(k_x x+k_y y\right)\right]+A_2\sin\left[\omega t-\left(k_x x-k_y y\right)\right],\ \mu\varepsilon\ k^2=k_x^2+k_y^2$. α) Αν οι οριακές συνθήκες είναι $z(x,0,t)=z(x,b,t)=0$, να βρεθεί η συνθήκη σχηματισμού στάσιμων κυμάτων στον άξονα *–y-* και έκφραση για τη *z(x,y,t)* που αποτελεί συνδυασμό στάσιμου και οδεύοντος κύματος. β) Να βρεθούν σχέσεις για τις ταχύτητες φάσης u_p και ομάδας u_g στην κατεύθυνση *–x-*. γ) Να αποδειχτεί ότι $u_p u_g=u^2$ όπου $u=\omega/k$ η φασική ταχύτητα του μέσου.

ΘΕΜΑ 53: Χορδή πιάνου μήκους *L,* μάζας *m* που ηρεμεί, τίθεται σε ταλάντωση από σφυρί με μήκος α και ταχύτητα u_0 στη



θέση *x=L/κ.* α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\omega_n B_n=\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L u_0(x)\ \sin\frac{n\pi x}{L}\ dx$ που δίδει τους συντελεστές της σειράς Fourier ημιτόνων $u_0(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n B_n\sin\frac{n\pi x}{L}$ για την αρχική ταχύτητα. β) Αν θέλουμε να μηδενίσουμε την έβδομη αρμονική και τα πολλαπλάσιά της σε ποια θέση θα πρέπει να τοποθετήσουμε το σφυρί; Εξηγείστε.

ΘΕΜΑ 54: Δίδεται ορθογωνική μεμβράνη με μήκη πλευρών *a* και *b* στους άξονες –x- και –y- αντίστοιχα. Η μεμβράνη τείνεται με τάση *T* και τα άκρα της είναι ακίνητα. *Ένα* επίπεδο εγκάρσιο κύμα διαδίδεται στην επιφάνεια της μεμβράνης προς τα θετικά –x- και –y- με μετατόπιση $z_1(x,y,t)=A_1e^{i(\omega t-k_1x-k_2y)}$, όπου k_1, k_2 οι κυματάριθμοι των κυμάτων που διαδίδονται στις κατευθύνσεις –x- και –y- αντίστοιχα. Η συνολική μετατόπιση σε κάθε σημείο της μεμβράνης προκύπτει από την υπέρθεση του αρχικού κύματος z_1 και άλλων τριών (z_2, z_3, z_4), που έχουν προέλθει από διαδοχικές ανακλάσεις στα όρια της μεμβράνης (x,b), (a,y) και (x,0) με πλάτη A_2, A_3 και A_4 αντίστοιχα. α) Να βρεθούν οι εκφράσεις για τη μετατόπιση καθενός από τα ανακλώμενα κύματα. β) Με χρήση των οριακών συνθηκών: *z(x,0,t)=z(0,y,t)=0*, να δείξετε ότι η συνολική μετατόπιση δίδεται από τη σχέση: $z(x,y,t)=-4A_1\ \sin k_1x\ \sin k_2y\ e^{i\omega t}$. Να βρεθεί το πραγματικό μέρος της $z(x,y,t)=-4A_1\ \sin k_1x\ \sin k_2y\ e^{i\omega t}$. Τί είδους αρχική συνθήκη περιγράφει; γ) Να βρεθούν οι συνθήκες δημιουργίας στάσιμων κυμάτων στη μεμβράνη με χρήση των οριακών συνθηκών *z(x,b,t)=z(a,y,t)=0.*

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) \qquad 2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin[(\alpha+\beta)/2)]\ \cos[(\alpha-\beta)/2)] \qquad \cos\beta-\cos\alpha=2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\ \sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\ \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \quad \cosh x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \quad \sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

$$e^{\pm ix}=\cos x\pm i\sin x$$

$$\int u\sin u\,du=\sin u-u\cos u\ +C \qquad \int\sin u du=-\cos u+C$$

$$\int_0^T\sin(\omega t)\cos(\omega t)dt=0 \qquad \int_0^T\cos^2(\omega t)dt=\frac{T}{2}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...$$