Προβλήματα Κεφαλαίου 2 στην $6^{η}$ Έκδοση

Κεφάλαιο 1 στην $3^{η}$ Έκδοση

Πρόβλημα 2.1. **(1.19)** Αρμονικός ταλαντωτής με υπερκρίσιμη απόσβεση εκκινεί από την ηρεμία με αρχική μετατόπιση. Να βρεθούν οι σχέσεις για τη μετατόπιση και την ταχύτητα.

(Λάθος βιβλίου Pain $3^{ης}$ έκδοσης, δίνει λύση $x = e^{-pt} F \cosh qt$)

Λύση:

$$x = e^{-pt}\left(F\cosh qt + G\sinh qt\right),$$
$$\dot{x} = -pe^{-pt}\left(F\cosh qt + G\sinh qt\right) + qe^{-pt}\left(F\sinh qt + G\cosh qt\right)$$

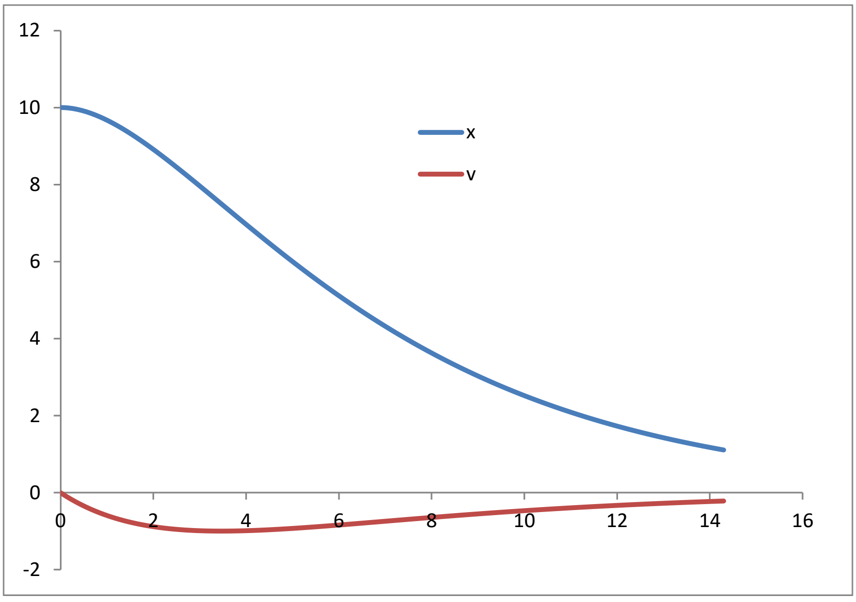
Εφόσον $x(0)=X_0$ και $\dot{x}(0)=0$ οι σταθερές F και G γίνονται:

$\dot{x}(0)=0 \Rightarrow -pF + qG = 0,\ x(0)=X_0 \Rightarrow F = X_0.$ Άρα, $G=X_0\dfrac{p}{q}$

Επομένως:

$$x = e^{-pt}X_0\left(\cosh qt + \frac{p}{q}\sinh qt\right),$$
$$\dot{x} = -pe^{-pt}X_0\left(\cosh qt + \frac{p}{q}\sinh qt\right) + qe^{-pt}X_0\left(\sinh qt + \frac{p}{q}\cosh qt\right) \Rightarrow$$
$$\dot{x} = \cancel{e^{-pt}X_0(-p+p)\cosh qt}^{\,0} + e^{-pt}X_0\left(q - \frac{p^2}{q}\right)\sinh qt \Rightarrow$$
$$\dot{x} = qe^{-pt}X_0\left(1 - \frac{p^2}{q^2}\right)\sinh qt$$

Επειδή γνωρίζουμε ότι $p=r/2m$ είναι μεγαλύτερο από το $q=(p^2-s/m)^{1/2}$ η ταχύτητα λαμβάνει αρνητικές τιμές, δηλαδή το σώμα επιστρέφει στη θέση ισορροπίας.



Άσκηση εκτός βιβλίου. Αρμονικός ταλαντωτής με υπερκρίσιμη απόσβεση εκκινεί με αρχική ταχύτητα, χωρίς αρχική μετατόπιση. Να βρεθούν οι σχέσεις για τη μετατόπιση και την ταχύτητα. Να βρεθεί η χρονική στιγμή που επιτυγχάνεται η μέγιστη μετατόπιση.

Λύση:

$$x = e^{-pt}\left(F\cosh qt + G\sinh qt\right),$$
$$\dot{x} = -pe^{-pt}\left(F\cosh qt + G\sinh qt\right) + qe^{-pt}\left(F\sinh qt + G\cosh qt\right)$$

Εφόσον x(0)=0 και $\dot{x}(0)=V_0$ οι σταθερές F και G γίνονται:

$x(0)=0 \Rightarrow F=0$. $\dot{x}(0)=V_0 \Rightarrow G=\dfrac{V_0}{q}$

Επομένως:

$$x = e^{-pt}\frac{V_0}{q}\sinh qt,$$
$$\dot{x} = e^{-pt}V_0\left(\cosh qt - \frac{p}{q}\sinh qt\right)$$

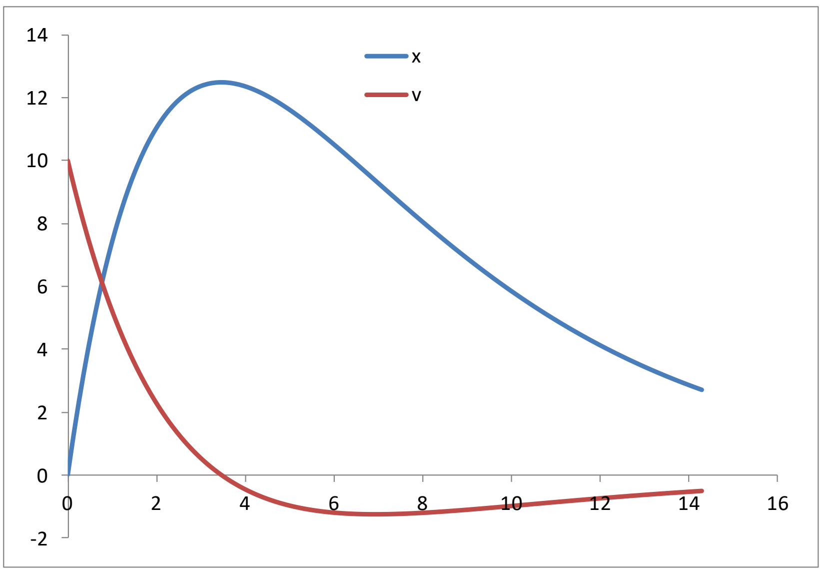
Μεγιστοποίηση μετατόπισης: $\dot{x}=0 \Rightarrow$

$$\cosh qt - \frac{p}{q}\sinh qt = 0 \Rightarrow q\cosh qt = p\sinh qt \Rightarrow$$
$$q\left(\frac{e^{qt}+e^{-qt}}{2}\right) = p\left(\frac{e^{qt}-e^{-qt}}{2}\right) \Rightarrow e^{-qt}(p+q) = e^{qt}(p-q) \Rightarrow$$
$$e^{2qt} = \frac{p+q}{p-q} \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\dfrac{p+q}{p-q}\right)}{2q}$$

Λύνεται ευκολότερα αν γνωρίζουμε ότι

$$\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right):$$

$\tanh qt = \dfrac{q}{p} \Rightarrow qt = \tanh^{-1}(\dfrac{q}{p})$.......



Πρόβλημα 2.2. **(1.20)** Να αποδειχτεί ότι η $x=(A+Bt)e^{-pt}$ αποτελεί λύση της εξίσωσης αρμονικού ταλαντωτή με κρίσιμη απόσβεση.

Υπόδειξη: Δε «σπάμε» τον όρο (A+Bt)!!

Λύση

Γνωρίζουμε ότι:

$$x=(A+Bt)e^{-pt}$$

$$\dot{x}=-pe^{-pt}(A+Bt)+Be^{-pt}$$

$$\ddot{x}=p^2e^{-pt}(A+Bt)-2pBe^{-pt}$$

Εφαρμόζω στη διαφορική $m\ddot{x}+r\dot{x}+sx=0$:

$$mp^2e^{-pt}(A+Bt)-2mpBe^{-pt}-rpe^{-pt}(A+Bt)+rBe^{-pt}+s(A+Bt)e^{-pt}=0$$

Οι όροι με πράσινο απαλοίφονται γιατί $p=r/2m \Rightarrow 2mp=r$. Επομένως:

$$e^{-pt}(A+Bt)\left[mp^2-rp+s\right]=0 \xrightarrow{p=r/2m} \cancel{m}\frac{r^2}{4m^{\cancel{2}}}-\frac{r^2}{2m}+s=0 \Rightarrow$$

$s=\dfrac{r^2}{4m}$ ισοδύναμο με το : $\dfrac{s}{m}=\dfrac{r^2}{4m^2}$ που ισχύει στην κρίσιμη απόσβεση.

Άσκηση εκτός βιβλίου. Αρμονικός ταλαντωτής με κρίσιμη απόσβεση εκκινεί με αρχική ταχύτητα, χωρίς αρχική μετατόπιση. Να βρεθούν οι σχέσεις για τη μετατόπιση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση. Να βρεθεί η χρονική στιγμή που επιτυγχάνεται η μέγιστη μετατόπιση και η χρονική στιγμή που επιτυγχάνεται η ελάχιστη ταχύτητα. Να γίνει κοινό διάγραμμα μετατόπισης-χρόνου και ταχύτητας-χρόνου.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι:

$$x = (A + Bt)e^{-pt}$$

$$\dot{x} = -pe^{-pt}(A + Bt) + Be^{-pt}$$

$$\ddot{x} = p^2 e^{-pt}(A + Bt) - 2pBe^{-pt}$$

Εφόσον $x(0)=0$ και $\dot{x}(0)=V_0$ οι σταθερές Α και Β γίνονται:

$x(0)=0 \Rightarrow A = 0$. $\dot{x}(0)=V_0 \Rightarrow B = V_0$.

Οι σχέσεις για μετατόπιση, ταχύτητα, επιτάχυνση:

$$x = V_0 te^{-pt},\ \dot{x} = V_0 e^{-pt}(1 - pt),\ \ddot{x} = pV_0 e^{-pt}(pt - 2)$$

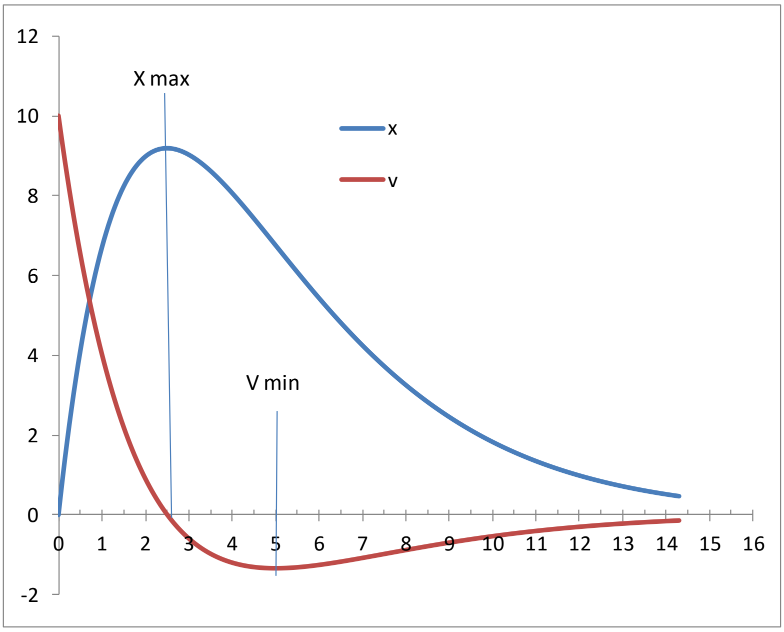
Μεγιστοποίηση x:

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow V_0 e^{-pt}(1 - pt) = 0 \Rightarrow t_{x\max} = \frac{1}{p} = \frac{2m}{r} \text{ και } x_{\max} = \frac{V_0}{pe} = \frac{2mV_0}{re}$$

Ελαχιστοποίηση $\dot{x}$:

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow pV_0 e^{-pt}(pt - 2) = 0 \Rightarrow t_{v\min} = \frac{2}{p} = \frac{4m}{r} \text{ και } \dot{x}_{\min} = -V_0 e^{-2}$$

Διαγράμματα:



Άσκηση εκτός βιβλίου. Να γίνει σύγκριση των μετατοπίσεων αρμονικών ταλαντωτών με υπερκρίσιμη και κρίσιμη απόσβεση που εκκινούν με την ίδια αρχική ταχύτητα V_o και έχουν το ίδιο p και διαφορετικά q (δηλαδή διαφέρουν μόνο ως προς τη σκληρότητα του ελατηρίου s). Να αποδειχτεί ότι ο ταλαντωτής με κρίσιμη απόσβεση θα φτάσει γρηγορότερα στη θέση ισορροπίας.

Λύση:

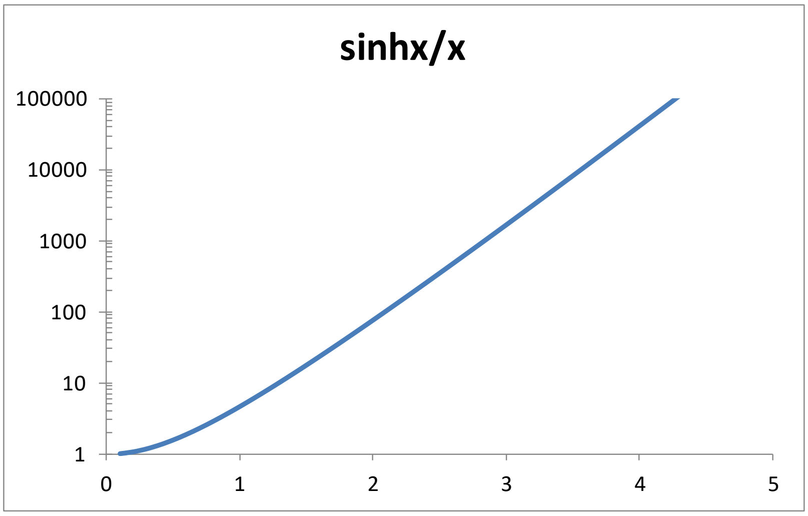
Γνωρίζουμε ότι:

$$x_{υπερκρίσιμη} = e^{-pt}\frac{V_0}{q}\sinh qt, \;\; x_{κρίσιμη} = V_0 t e^{-pt}$$

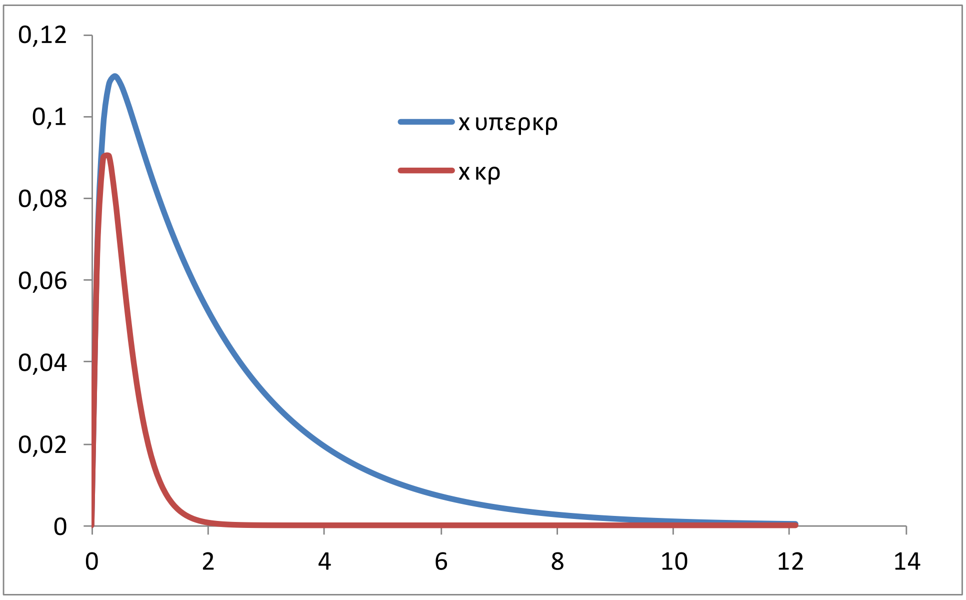
Διαιρώντας παίρνω:

$$\frac{x_{υπ}}{x_{κρ}} = \frac{\sinh qt}{qt}$$

Η συνάρτηση sinhx/x έχει την παρακάτω μορφή που αυξάνεται με το x:



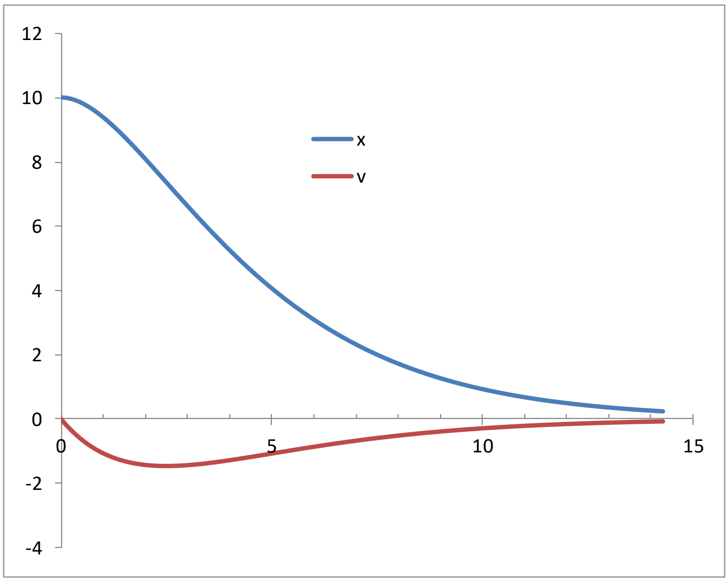
Επομένως οι μετατοπίσεις θα είναι:



Δείτε και το αρχείο EXCEL «σύγκριση κρίσιμης υπερκρίσιμης απόσβεσης» στο e-class

Να λυθεί: Αρμονικός ταλαντωτής με κρίσιμη απόσβεση εκκινεί με αρχική μετατόπιση, χωρίς αρχική ταχύτητα. Να βρεθούν οι σχέσεις για τη μετατόπιση και την ταχύτητα. Να αποδειχτεί ότι η ταχύτητα εμφανίζει ελάχιστο τη χρονική στιγμή 1/p. Να γίνει κοινό διάγραμμα μετατόπισης-χρόνου και ταχύτητας-χρόνου.

Απάντηση: $x = X_0(1+pt)e^{-pt}$, $\dot{x} = -p^2 X_0 e^{-pt} t$



Άσκηση εκτός βιβλίου. Αρμονικός ταλαντωτής με υποκρίσιμη απόσβεση εκτελεί φθίνουσες ταλαντώσεις. Να βρεθούν οι τιμές των *A*,*φ* για αρχικές συνθήκες: $x(0)=0,\ \dot{x}(0)=V_0$

Λύση:

$$x = Ae^{-pt}\sin(\omega' t+\varphi),$$

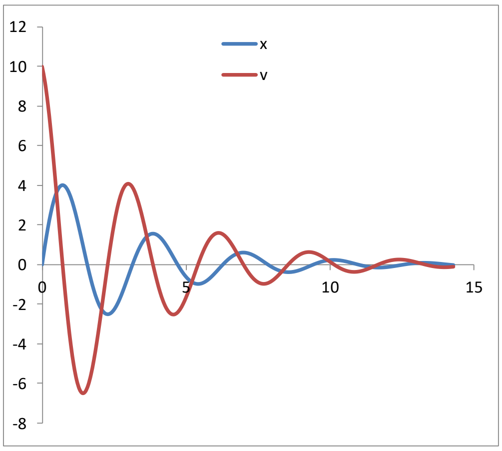
$$\dot{x} = -pAe^{-pt}\sin(\omega' t+\varphi)+\omega' Ae^{-pt}\cos(\omega' t+\varphi),$$

όπου: $p=\dfrac{r}{2m},\ \omega'=\sqrt{\dfrac{s}{m}-\dfrac{r^2}{4m^2}}$

$x(0)=0 \Rightarrow A\sin\varphi = 0 \xrightarrow{A\neq 0} \sin\varphi=0,\ \varphi=0$ ή $\varphi = n\pi$

Εδώ επιλέγουμε το $\varphi=0$.

$\dot{x}(0)=V_0 \Rightarrow A=\dfrac{V_0}{\omega'}$



Επομένως:

$$x=\frac{V_0}{\omega'}e^{-pt}\sin\omega' t,\ \dot{x}=-p\frac{V_0}{\omega'}e^{-pt}\sin\omega' t+V_0 e^{-pt}\cos\omega' t$$

ή $\dot{x}=V_0\, e^{-pt}\,(\cos\omega' t-\dfrac{p}{\omega'}\sin\omega' t)$

Δείτε και το αρχείο EXCEL «ταλαντώσεις με απόσβεση» στο e-class. Δοκιμάστε τιμές για το r=1,0 2,0 και 0,5

Σύγκριση με τα αποτελέσματα της υπερκρίσιμης απόσβεσης για τις ίδιες αρχικές συνθήκες: Παρόμοιες σχέσεις, αν αντικαταστήσουμε τα *cosh – sinh* με *cos- sin* και το *q* με *ω΄*.

Πρόβλημα 2.3 (1.21). Αρμονικός ταλαντωτής εκτελεί φθίνουσες ταλαντώσεις. Να βρεθούν οι κατάλληλες τιμές των σταθερών C_1, C_2 της γενικής λύσης $x = e^{-pt}\left(C_1 e^{i\omega' t} + C_2 e^{-i\omega' t}\right)$ ώστε η μετατόπιση να δίδεται από την $x = A\, e^{-pt}\cos(\omega' t + \varphi)$.

Να βρεθούν οι τιμές των A,φ για αρχικές συνθήκες: $x(0) = X_0,\ \dot{x}(0) = 0$

Απάντηση: $X_0 = A\cos\varphi,\ \varphi = \arctan(-\dfrac{p}{\omega'})$

Άσκηση εκτός βιβλίου: Να αποδείξετε ότι ο παράγοντας ποιότητας Q εκφράζει το λόγο της αποθηκευμένης ενέργειας του ταλαντωτή προς την ενέργεια που χάνεται σε κάθε κύκλο, στην περίπτωση που έχουμε ασθενή απόσβεση *(μικρό r)*.

Λύση:

Η αποθηκευμένη ενέργεια του ταλαντωτή είναι: $E(t) = E_0 e^{-\frac{r}{m}t}$. Η μεταβολή της ενέργειας δίδεται από:

$dE = -\dfrac{r}{m} E_0 e^{-\frac{r}{m}t} dt = -\dfrac{r}{m} E(t)\, dt$. Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η ενέργεια μειώνεται.

Στην περίπτωση της ασθενούς απόσβεσης, χρειάζονται πολλές περίοδοι $T' = 2\pi/\omega'$ για να έχουμε μια αισθητή μεταβολή ΔE. Επομένως, για κάθε κύκλο, ισχύει (προσεγγιστικά) η παραπάνω εξίσωση, σαν να ήταν το T' απειροστό:

$\Delta E \simeq \dfrac{r}{m} E(t)\, T'$, το αρνητικό πρόσημο παραλείπεται. Επομένως:

$\Delta E = \dfrac{r}{m} E(t) T' \Rightarrow \dfrac{E(t)}{\Delta E} = \dfrac{m}{rT'} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{m\omega'}{r} = \dfrac{1}{2\pi} Q$. Άρα όσο μεγαλύτερο είναι το Q, τόσο μικρότερο ποσοστό της αποθηκευμένης ενέργειας χάνεται σε κάθε κύκλο.

Άσκηση εκτός βιβλίου: Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός απώλειας της ενέργειας ταλαντωτή που εκτελεί φθίνουσες ταλαντώσεις είναι ίσος με: $-r\dot{x}^2$.

Λύση: Η μηχανική ενέργεια του ταλαντωτή (κινητική και δυναμική) είναι:

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}sx^2$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{d\dot{x}^2}{dt} + \frac{1}{2}s\frac{dx^2}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{d\dot{x}^2}{d\dot{x}}\frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{1}{2}s\frac{dx^2}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Όμως: $\frac{d\dot{x}^2}{d\dot{x}} = 2\dot{x}, \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x}, \quad \frac{dx^2}{dx} = 2x, \quad \frac{dx}{dt} = \dot{x}$

Έτσι παίρνουμε:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}m\,(\cancel{2}\dot{x})\ddot{x} + \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}s(\cancel{2}x)\dot{x} = \dot{x}\left(m\ddot{x} + sx\right) \xrightarrow{m\ddot{x}+sx+r\dot{x}=0} \frac{dE}{dt} = -r\dot{x}^2$$

Πρόβλημα 2.6 (1.24). Να δείξετε ότι όσο αυξάνεται η τιμή του συντελεστή ποιότητας τόσο πλησιάζουν οι συχνότητες ω' και ω_0.

Λύση:

$$\omega' = \left(\frac{s}{m} - \frac{r^2}{4m^2}\right)^{1/2},\ \omega_0^2 = \frac{s}{m},\ Q = \frac{\omega_0 m}{r}$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$$\omega' = \left(\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{4Q^2}\right)^{1/2} \Rightarrow \omega' = \omega_0\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{1/2}$$

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots$,με $-1 < x < 1$ παίρνουμε:

$\omega' \approx \omega_0\left(1 - \frac{1}{8Q^2}\right)$ ή $\frac{\omega_0 - \omega'}{\omega_0} \approx \frac{1}{8Q^2}$, όπως ζητάει το πρόβλημα.

Άρα, όσο μεγαλύτερο το Q τόσο πλησιάζουν οι ω_0και ω'.

Πρόβλημα 2.4 (1.22). Εκφόρτιση πυκνωτή. Πυκνωτής με χωρητικότητα C και αρχικό φορτίο q_0 εκφορτίζεται μέσω αντίστασης R. Να δείξετε ότι το φορτίο δίδεται από τη σχέση $q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ ενώ το ρεύμα από την $I(t) = -\frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$.

Υπόδειξη: Η $\frac{q}{C} + IR = 0$ γίνεται $\int_{q_0}^{q}\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$. Το αρνητικό πρόσημο στο ρεύμα δείχνει εκφόρτιση.