Προβλήματα Κεφαλαίου 4 στην 6η Έκδοση

Κεφάλαιο 3 στην 3η Έκδοση

Παράδειγμα: Πώς βρίσκουμε τη συνεισφορά του κάθε τρόπου ταλάντωσης στις αρχικές συνθήκες συζευγμένου συστήματος δύο μαζών, όταν έχουμε μόνο αρχικές μετατοπίσεις (δηλαδή $\dot{x}(0)=\dot{y}(0)=0$)

Λύση: Γνωρίζουμε για τις κανονικές συντεταγμένες *X=x+y, Y=x-y*. Όταν έχουμε αρχικές μετατοπίσεις *x(0)* και *y(0)*, τότε ισχύει: $X_0 = x(0)+y(0),\ Y_0 = x(0)-y(0)$. Στην περίπτωση του 1ου τρόπου ταλάντωσης, τα πλάτη ορίζονται ως x_1 και y_1 (όπου $x_1= y_1$). Θεωρώντας ότι $Y_0=0$ *(υφίσταται μόνο ο 1ος τρόπος ταλάντωσης)*, παίρνουμε: $X_0 = x(0)+y(0) = x_1 + y_1 = 2x_1 \Rightarrow \boxed{x_1 = \dfrac{x(0)+y(0)}{2},\ \ y_1 = x_1}$ (1) .

Ομοίως, στην περίπτωση του 2ου τρόπου ταλάντωσης, τα πλάτη ορίζονται ως x_2 και y_2 (όπου $x_2= -y_2$). Θεωρώντας ότι $X_0=0$ *(υφίσταται μόνο ο 2ος τρόπος ταλάντωσης)*, παίρνουμε:

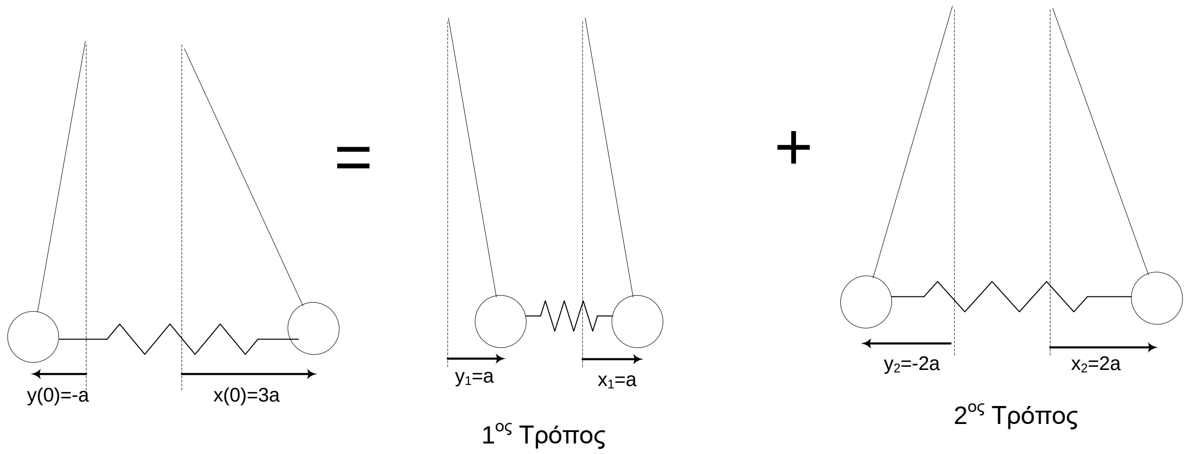
$Y_0 = x(0)-y(0) = x_2 - y_2 = 2x_2 \Rightarrow \boxed{x_2 = \dfrac{x(0)-y(0)}{2},\ \ y_2 = -x_2}$ (2) .

Έτσι βρίσκουμε τα πλάτη του κάθε τρόπου ταλάντωσης και συνδυάζοντάς τα, προκύπτουν τα αρχικά πλάτη της κάθε μάζας: $x(0) = x_1 + x_2,\ \ y(0) = y_1 + y_2$, όπως προκύπτει από τις παραπάνω σχέσεις (1) και (2).

Παράδειγμα: Να βρεθούν τα πλάτη του κάθε τρόπου ταλάντωσης εκκρεμούς δύο μαζών συζευγμένων με ελατήριο αν *x(0)=3a, y(0)=-a*.

Λύση: Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$x_1 = \dfrac{x(0)+y(0)}{2} = a,\ \ y_1 = x_1 = a\ \ , x_2 = \dfrac{x(0)-y(0)}{2} = 2a,\ \ y_2 = -x_2 = -2a$. Το αποτέλεσμα είναι:

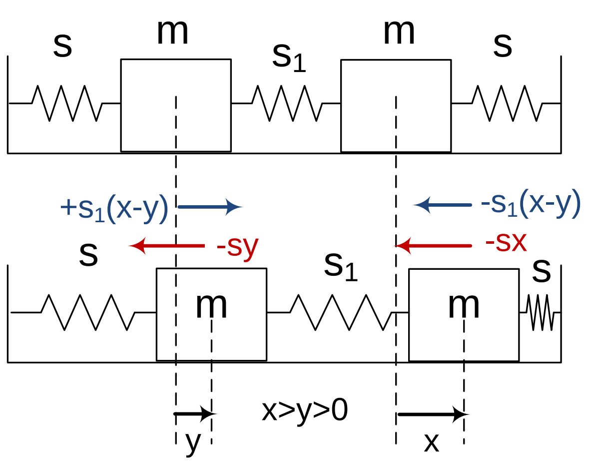


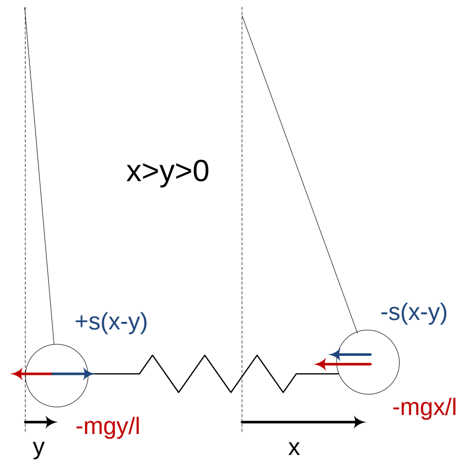
Πρόβλημα 4.3 (3.3). Τα σχήματα 4.3 (3.3) και 4.5 (3.5) δείχνουν πώς προκύπτουν οι διατάξεις με *x(0)=2a, y(0)=0* και *x(0)=0, y(0)=2a* από την υπέρθεση των κανονικών τρόπων *X, Y*. Χρησιμοποιώντας τις ίδιες αρχικές συνθήκες (δηλαδή μόνο αρχικές μετατοπίσεις) να βρείτε τους συνδυασμούς των τρόπων που δίδουν α) *x(0)=-2a, y(0)=0* και β) *x(0)=0, y(0)=-2a*. Να γίνουν τα κατάλληλα σχήματα.

Απάντηση: α) $x_1=y_1=-a,\ x_2=-y_2=-a$, β)) $x_1=y_1=-a,\ x_2=-y_2=+a$

Παράδειγμα: Σύστημα δύο μαζών και τριών ελατηρίων.

Το σύστημα φαίνεται στα παρακάτω σχήματα (αριστερά), στη θέση ισορροπίας και σε μια τυχαία θέση. Για να καταστρώσουμε τις διαφορικές εξισώσεις, θεωρούμε ότι οι μάζες έχουν απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας, έτσι ώστε: *x>y>0,* που αποτελεί ευνοϊκή περίπτωση, (το ίδιο θα προέκυπτε για οποιαδήποτε άλλη θέση), όπως φαίνεται στο σχήμα.





Στην περίπτωση του συστήματος με τα εκκρεμή, η δύναμη επαναφοράς προέρχεται από τη βαρύτητα. Εδώ, από τα «πλευρικά» ελατήρια *s*. Το ελατήριο «σύζευξης» είναι το s_1 (στα εκκρεμή είναι το *s*).

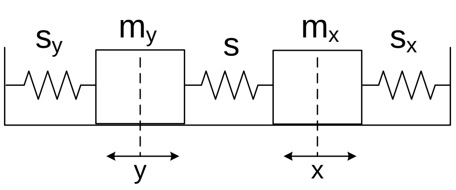
Στο σχήμα φαίνεται ότι το πλευρικό ελατήριο δεξιά συμπιέζεται και ασκεί δύναμη $-sx$ στη μάζα με μετατόπιση *x*, ενώ το πλευρικό ελατήριο που βρίσκεται αριστερά, εκτείνεται και ασκεί δύναμη $-sy$ στην αντίστοιχη μάζα. Το ελατήριο σύζευξης εκτείνεται κατά $x-y>0$ και ασκεί δύναμη $-s_1(x-y)$ στη μάζα δεξιά. Λόγω του ότι εκτείνεται, το ίδιο ελατήριο, ασκεί δύναμη $+s(x-y)$ στη μάζα αριστερά. Από τον 2^o Νόμο του Newton:

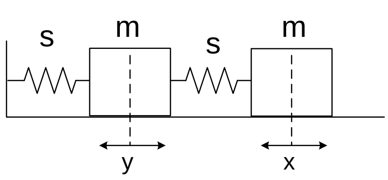
$$m\ddot{x} = -sx - s_1(x-y) \Rightarrow \boxed{m\ddot{x} + sx + s_1(x-y) = 0} \quad (1)$$

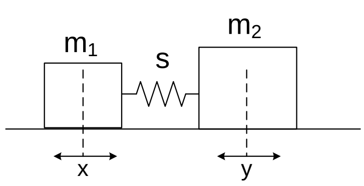
$$m\ddot{y} = -sy + s_1(x-y) \Rightarrow \boxed{m\ddot{y} + sy + s_1(y-x) = 0} \quad (2)$$

Προσέξτε ότι στην εξίσωση (1) θετικό πρόσημο έχουν οι όροι –x-, ενώ στην (2) οι όροι –y-.

Οι εξισώσεις (1) και (2) λύνονται με χρήση κανονικών συντεταγμένων όπως στην περίπτωση του συστήματος εκκρεμών και δίνουν συχνότητες των τρόπων ταλάντωσης: $\omega_1^2 = \frac{s}{m},\ \omega_2^2 = \frac{s}{m} + \frac{2s_1}{m}$ (Να αποδειχτεί, ως **άσκηση**). Όταν όμως οι μάζες δεν είναι ίσες ή τα πλευρικά ελατήρια δεν έχουν την ίδια σκληρότητα, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα, τότε η λύση με κανονικές συντεταγμένες είναι δύσκολο να εφαρμοστεί και χρησιμοποιείται η μέθοδος «συστηματικής αναζήτησης των τρόπων ταλάντωσης».

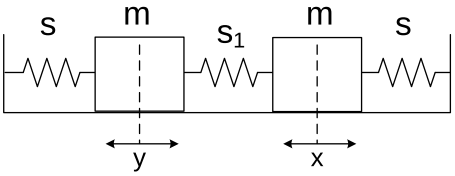






Δείτε και το αρχείο EXCEL «Συζευγμένο σύστημα γενική περίπτωση» στο e-class

Παράδειγμα: Να αποδείξετε ότι η συνολική κινητική ενέργεια και η συνολική δυναμική ενέργεια του παρακάτω συστήματος μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των τετραγώνων των κανονικών συντεταγμένων και των παραγώγων τους: $E_K = a\dot{X}^2 + b\dot{Y}^2$, $E_\Delta = cX^2 + dY^2$. Να βρείτε τις τιμές των συντελεστών *a*, *b*, *c*, *d*.



Γνωρίζουμε ότι: $x = \frac{X+Y}{2}, y = \frac{X-Y}{2}, \ \dot{x} = \frac{\dot{X}+\dot{Y}}{2}, \dot{y} = \frac{\dot{X}-\dot{Y}}{2}$.

Κινητική ενέργεια:

$$E_K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{X}+\dot{Y}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{X}-\dot{Y}}{2}\right)^2 \Rightarrow E_K = \frac{1}{8}m\left(\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\cancel{2\dot{X}\dot{Y}}\right)+\frac{1}{8}m\left(\dot{X}^2+\dot{Y}^2-\cancel{2\dot{X}\dot{Y}}\right)\Rightarrow$$

$$E_K = \frac{1}{4}m\dot{X}^2 + \frac{1}{4}m\dot{Y}^2, \ a = b = \frac{m}{4}$$

Δυναμική ενέργεια:

$$E_\Delta = \frac{1}{2}sx^2 + \frac{1}{2}sy^2 + \frac{1}{2}s_1(x-y)^2 = \frac{1}{2}s\left(\frac{X+Y}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}s\left(\frac{X-Y}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}s_1Y^2 \Rightarrow$$

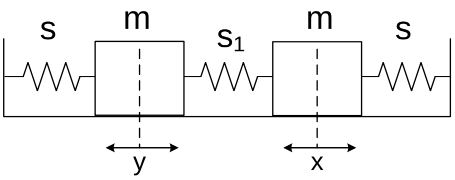
$$E_\Delta = \frac{1}{8}s\left(X^2+Y^2+\cancel{2XY}\right)+\frac{1}{8}s\left(X^2+Y^2-\cancel{2XY}\right)+\frac{1}{2}s_1Y^2\Rightarrow$$

$$E_\Delta = \frac{1}{4}sX^2 + \frac{1}{4}(s+2s_1)Y^2, \ c = \frac{s}{4}, \ d = \frac{s+2s_1}{4}$$

Πρόβλημα 4.1 (3.1). Να αποδείξετε ότι η συνολική κινητική ενέργεια και η συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος συζευγμένων εκκρεμών μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των τετραγώνων των κανονικών συντεταγμένων και των παραγώγων τους:
$E_K = a\dot{X}^2 + b\dot{Y}^2$, $E_\Delta = cX^2 + dY^2$. Να βρείτε τις τιμές των συντελεστών *a*, *b*, *c*, *d*.

Απάντηση: Λύνεται όπως προηγουμένως, με $s \to m\frac{g}{l} = m\omega_0^2, \ s+2s_1 \to m\frac{g}{l} + 2s = m\omega_1^2$.

Παράδειγμα: Να αποδείξετε ότι η συνολική μηχανική ενέργεια του παρακάτω συστήματος μπορεί να γραφεί ως: $E=\left(E_{Kx}+E_{\Delta x}\right)+\left(E_{Ky}+E_{\Delta y}\right)+E_{\Delta xy}$, όπου οι όροι με δείκτη x αφορούν στον ταλαντωτή



δεξιά με μετατόπιση x, οι όροι με δείκτη y αφορούν στον ταλαντωτή αριστερά με μετατόπιση y και ο όρος $E_{\Delta xy}$ εκφράζει την «ενέργεια σύζευξης».

Λύση: Όπως και πριν, έχουμε για τη συνολική δυναμική και κινητική ενέργεια:

$$E_K=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\dot{y}^2=E_{Kx}+E_{Ky}$$

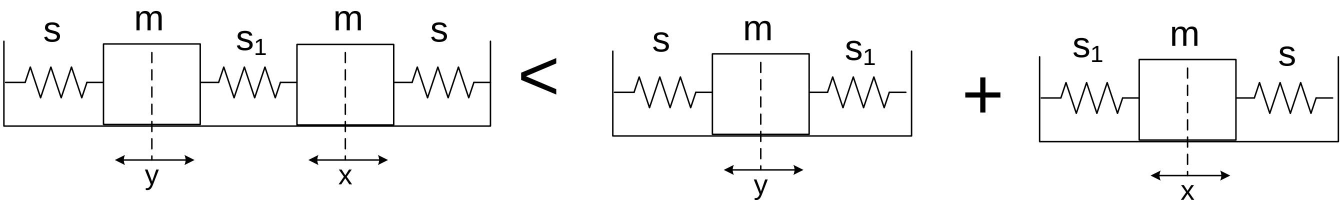
$$E_\Delta=\frac{1}{2}sx^2+\frac{1}{2}sy^2+\frac{1}{2}s_1\left(x-y\right)^2=\frac{1}{2}sx^2+\frac{1}{2}sy^2+\frac{1}{2}s_1\left(x^2+y^2-2xy\right)\Rightarrow$$

$$E_\Delta=\frac{1}{2}\left(s+s_1\right)x^2+\frac{1}{2}\left(s+s_1\right)y^2-s_1xy=E_{\Delta x}+E_{\Delta y}-E_{\Delta xy}$$

Προσθέτοντας τις ενέργειες προκύπτει:

$$E=\left(E_{Kx}+E_{\Delta x}\right)+\left(E_{Ky}+E_{\Delta y}\right)-E_{\Delta xy}$$

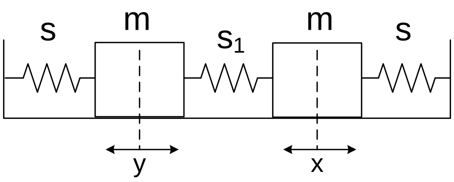
Βλέπουμε ότι η ενέργεια σύζευξης είναι αρνητική, δηλαδή, το συζευγμένο σύστημα έχει λιγότερη ενέργεια από δύο πανομοιότυπα ανεξάρτητα συστήματα μάζας-ελατηρίων, όπως φαίνεται παρακάτω:



Πρόβλημα 4.2 (3.2). Να αποδείξετε ότι η συνολική μηχανική ενέργεια του συστήματος συζευγμένων εκκρεμών, μπορεί να γραφεί ως: $E=\left(E_{Kx}+E_{\Delta x}\right)+\left(E_{Ky}+E_{\Delta y}\right)+E_{\Delta xy}$, όπου οι όροι με δείκτη x αφορούν στο εκκρεμές της δεξιάς πλευράς, οι όροι με δείκτη y αφορούν στο εκκρεμές της αριστερής πλευράς και ο όρος $E_{\Delta xy}$ εκφράζει την «ενέργεια σύζευξης».

Απάντηση: Λύνεται όπως προηγουμένως, με $s\rightarrow m\frac{g}{l}=m\omega_0^2,\ s+2s_1\rightarrow m\frac{g}{l}+2s=m\omega_1^2.$

Παράδειγμα: Ασθενής σύζευξη. Στο παρακάτω σχήμα, οι συχνότητες των τρόπων ταλάντωσης είναι:



$\omega_1^2 = \frac{s}{m}, \omega_2^2 = \frac{s}{m} + \frac{2s_1}{m}$. Η περίπτωση της «ασθενούς σύζευξης» ισχύει όταν $s_1 << s$. Τότε, η ενέργεια του ελατηρίου σύζευξης είναι αμελητέα σε σχέση με την ενέργεια των μαζών και των πλευρικών ελατηρίων. Επίσης, οι δύο συχνότητες των τρόπων ταλάντωσης είναι παραπλήσιες. Στην περίπτωση που ένα τέτοιο σύστημα εκκινεί με αρχικές μετατοπίσεις $x(0) = 2a,\ y(0) = 0$ και μηδενική ταχύτητα, μπορεί να αποδειχτεί ότι εκτελεί διακροτήματα ίσου πλάτους και οι σχέσεις για τις μετατοπίσεις είναι (εξισώσεις 3.22 και 3.23 βιβλίου):

$$\left.\begin{aligned} x &= 2a\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) = 2a\cos\omega_m t\cos\omega_a t \\ y &= 2a\sin\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) = 2a\sin\omega_m t\sin\omega_a t \end{aligned}\right\} \omega_m = \frac{\omega_2-\omega_1}{2},\ \omega_a = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$$

Στην ασθενή σύζευξη, $\omega_m << \omega_a$ και επομένως, το διαμορφωμένο πλάτος κάθε μετατόπισης $2a\cos\omega_m t$ και $2a\sin\omega_m t$ είναι περίπου σταθερό μέσα σε ένα κύκλο. Άρα, η ενέργεια του κάθε ταλαντωτή (δηλαδή της μάζας με το αντίστοιχο πλευρικό ελατήριο) είναι κατά προσέγγιση ίση με εκείνη του απλού αρμονικού ταλαντωτή: $E = \frac{1}{2}sa^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 a^2,\ \omega_0^2 = s/m$. Τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{2}m\omega_a^2(2a\cos\omega_m t)^2 = 2ma^2\omega_a^2\cos^2\omega_m t, \\ E_y &= \frac{1}{2}m\omega_a^2(2a\sin\omega_m t)^2 = 2ma^2\omega_a^2\sin^2\omega_m t \end{aligned}$$

Με προσθαφαιρέσεις προκύπτει:

$$E = E_x + E_y = 2ma^2\omega_a^2\cos^2\omega_m t + 2ma^2\omega_a^2\sin^2\omega_m t \Rightarrow \boxed{E = E_x + E_y = 2ma^2\omega_a^2}\ (A)$$

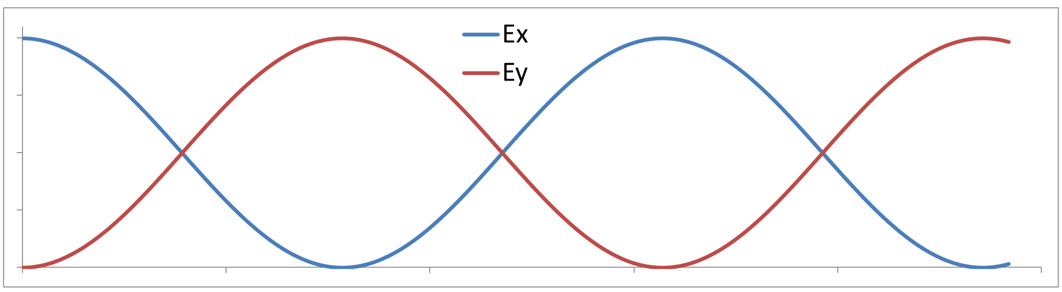
$$E_x - E_y = 2ma^2\omega_a^2\cos^2\omega_m t - 2ma^2\omega_a^2\sin^2\omega_m t = 2ma^2\omega_a^2\left(\cos^2\omega_m t - \sin^2\omega_m t\right) \xrightarrow[\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a]{E = 2ma^2\omega_a^2}$$

$$\Rightarrow E_x - E_y = E(\cos 2\omega_m t) = E\cos\left(2\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right) \Rightarrow \boxed{E_x - E_y = E\cos(\omega_2-\omega_1)t}\ (B)$$

Άρα μπορούμε να βρούμε προσεγγιστική σχέση για την ενέργεια κάθε ταλαντωτή, με προσθαφαίρεση των εξισώσεων (A) και (B):

$$\begin{aligned} (A)+(B) &\Rightarrow E_x = \frac{E}{2}\left[1+\cos(\omega_2-\omega_1)t\right] \\ (A)-(B) &\Rightarrow E_y = \frac{E}{2}\left[1-\cos(\omega_2-\omega_1)t\right] \end{aligned}$$

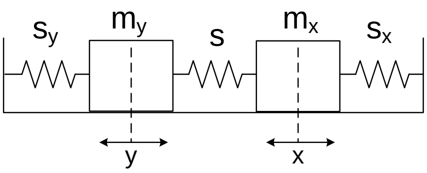
Άρα, η μηχανική ενέργεια ανταλλάσσεται μεταξύ των δύο ταλαντωτών, με συχνότητα $\omega_2-\omega_1=2\omega_m$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Πρόβλημα 4.6 (3.6). Να αποδείξετε ότι τα προηγούμενα ισχύουν και στην περίπτωση του συστήματος συζευγμένων εκκρεμών, όταν ισχύει η προσέγγιση ασθενούς σύζευξης, δηλαδή $s<<mg/l$.

Απάντηση: Λύνεται όπως το παράδειγμα, με συχνότητες τρόπων ταλάντωσης $\omega_1^2=\dfrac{g}{l},\ \omega_2^2=\dfrac{g}{l}+\dfrac{2s}{m}$

Παράδειγμα: Συστηματική αναζήτηση των τρόπων ταλάντωσης.



Η μέθοδος των κανονικών συντεταγμένων δεν είναι εύχρηστη στην περίπτωση ενός συστήματος συζευγμένων ταλαντωτών που δεν παρουσιάζει συμμετρία, όπως αυτό στο διπλανό σχήμα, όπου οι μάζες και τα ελατήρια είναι όλα διαφορετικά (γενική περίπτωση). Για τη λύση ενός τέτοιου προβλήματος εφαρμόζεται η μέθοδος της συστηματικής αναζήτησης των τρόπων ταλάντωσης, λαμβάνοντας υπόψη ότι αν στην κίνηση του συστήματος συμμετέχει μόνο ένας τρόπος ταλάντωσης, αυτό θα εμφανίζει σταθερά πλάτη και η συχνότητα ταλάντωσης θα είναι εκείνη του συγκεκριμένου τρόπου.

Υποθέτουμε ότι έχουμε βρει ένα τρόπο με συχνότητα ω. Οι μάζες θα κινούνται με σταθερά πλάτη A, B είτε σε φάση είτε σε αντίθεση φάσης. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε: $x=A\cos(\omega t),\ \ y=B\cos(\omega t)$. (Αν A, B είναι ετερόσημα, θα έχουμε αντίθεση φάσης). Οι διαφορικές εξισώσεις είναι:

$$m_x\ddot{x}+s_x x+s(x-y)=0,\qquad m_y\ddot{y}+s_y y+s(y-x)=0$$

Αντικαθιστώντας τα $x=A\cos(\omega t),\ \ddot{x}=-\omega^2 A\cos(\omega t),\ y=B\cos(\omega t),\ \ddot{y}=-\omega^2 B\cos(\omega t)$ στις διαφορικές εξισώσεις και απαλείφοντας τους όρους *cos(ωt)*, προκύπτει το παρακάτω σύστημα ως προς A, B:

$$\begin{aligned}(-\omega^2 m_x+s_x+s)A-sB&=0\\ -sA+(-\omega^2 m_y+s_y+s)B&=0\end{aligned}\qquad \text{με } DET=(-\omega^2 m_x+s_x+s)(-\omega^2 m_y+s_y+s)-s^2$$

Το σύστημα αυτό, έχει το δεξί μέλος κάθε εξίσωσης ίσο με το μηδέν και επομένως αληθεύει για $A=B=0$, (τετριμμένη λύση). Μπορεί να λυθεί και για οποιεσδήποτε τιμές των A, B εάν η ορίζουσα είναι μηδέν. Αυτό δίνει μια εξίσωση 2ου βαθμού ως προς το ω^2 και οδηγεί στον υπολογισμό της συχνότητας:

Μηδενίζοντας την ορίζουσα προκύπτει:

$$a\omega^4+b\omega^2+c=0\ \ \mu\varepsilon$$
$$a=m_x m_y,$$
$$b=-(m_x s_y+m_x s+m_y s_x+m_y s)$$
$$c=s_x s_y+s_x s+s_y s$$

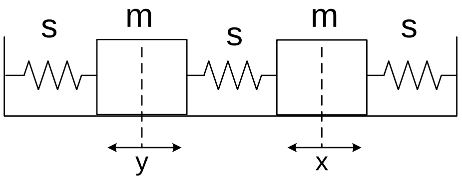
Οι συχνότητες των τρόπων είναι:

$$\omega^2=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Σε σύστημα με δύο μάζες (2 βαθμοί ελευθερίας) προκύπτουν δύο συχνότητες ω_1 και ω_2 και άρα δύο τρόποι ταλάντωσης.

Μπορούμε κατόπιν να βρούμε το λόγο των πλατών σε κάθε τρόπο, με αντικατάσταση των συχνοτήτων ω_1 και ω_2 σε μια από τις εξισώσεις του συστήματος, εδώ η 2η: $\dfrac{A}{B}=1+\dfrac{s_y}{s}-\omega_{1,2}^2\dfrac{m_y}{s}$. Αν τα A και B προκύψουν ετερόσημα, θα έχουμε αντίθεση φάσης.

Παράδειγμα. Να διατυπώσετε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης του παρακάτω συστήματος συζευγμένων ταλαντωτών. Να βρείτε τις συχνότητες των τρόπων ταλάντωσης και το λόγο πλατών σε κάθε τρόπο.



Λύση: Οι Δ.Ε. είναι (σύμφωνα με την ανάλυση των δυνάμεων που ασκούνται σε κάθε μάζα, όπως είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα): $m\ddot{x}+sx+s(x-y)=0, \quad m\ddot{y}+sy+s(y-x)=0$.

Θεωρώντας ότι έχουμε βρει ένα τρόπο με συχνότητα ω. Οι μάζες θα κινούνται με σταθερά πλάτη A, B και οι μετατοπίσεις, επιταχύνσεις θα είναι: $x=Ae^{i\omega t}$, $\ddot{x}=-\omega^2 Ae^{i\omega t}$, $y=Be^{i\omega t}$, $\ddot{y}=-\omega^2 Be^{i\omega t}$.

Αντικαθιστώντας στις Δ.Ε. προκύπτει το σύστημα:

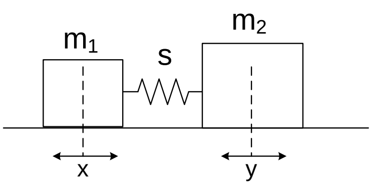
$$\begin{aligned}(-\omega^2 m+2s)A-sB=0\\ -sA+(-\omega^2 m+2s)B=0\end{aligned} \quad \text{με } DET=(-\omega^2 m+2s)(-\omega^2 m+2s)-s^2=0\Rightarrow$$

$m^2\omega^4-2sm\omega^2-2sm\omega^2+4s^2-s^2=0\Rightarrow \omega^4-4\dfrac{s}{m}\omega^2+3\dfrac{s^2}{m^2}=0$. Η εξίσωση έχει λύσεις:

$\omega^2=2\dfrac{s}{m}\pm\sqrt{\dfrac{4s^2}{m^2}-\dfrac{3s^2}{m^2}} \Rightarrow \omega_1^2=\dfrac{s}{m},\ \omega_2^2=\dfrac{3s}{m}$. Οι λόγοι των πλατών A/B, βρίσκονται με χρήση της εξίσωσης: $-sA+(-\omega^2 m+2s)B=0\Rightarrow \dfrac{A}{B}=2-\omega^2\dfrac{m}{s}$. Για κάθε συχνότητα παίρνουμε:

$\omega_1:\ \dfrac{A}{B}=1,\ \omega_2:\ \dfrac{A}{B}=-1$. Επομένως, στον 1$^{\text{o}}$ τρόπο ταλάντωσης οι μάζες είναι σε φάση, ενώ στο 2$^{\text{o}}$ (με τη μεγαλύτερη συχνότητα) σε αντίθεση φάσης.

Πρόβλημα 4.4 (3.4). «Μοντέλο του μορίου CO». Να διατυπώσετε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης του παρακάτω συστήματος συζευγμένων ταλαντωτών. Να βρείτε τις συχνότητες των τρόπων ταλάντωσης και το λόγο πλατών σε κάθε τρόπο.



Λύση: Οι Δ.Ε. είναι: $m_1\ddot{x}+\cancel{sx}+s(x-y)=0, \quad m_2\ddot{y}+\cancel{sy}+s(y-x)=0$.

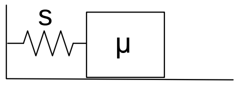
Παρατηρείστε ότι καθώς δεν υπάρχουν πλευρικά ελατήρια, οι όροι sx, sy της δύναμης επαναφοράς έχουν μηδενιστεί. Θεωρώντας ότι έχουμε βρει ένα τρόπο με συχνότητα ω. Οι μάζες θα κινούνται με σταθερά πλάτη A, B και οι μετατοπίσεις, επιταχύνσεις θα είναι:

$x=A\sin\omega t,\ \ddot{x}=-\omega^2 A\sin\omega t,\ y=B\sin\omega t,\ \ddot{y}=-\omega^2 B\sin\omega t$. Προκύπτει το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{aligned}(-\omega^2 m_1+s)A-sB=0\\ -sA+(-\omega^2 m_2+s)B=0\end{aligned} \quad \text{με } DET=(-\omega^2 m_1+s)(-\omega^2 m_2+s)-s^2=0\Rightarrow$$

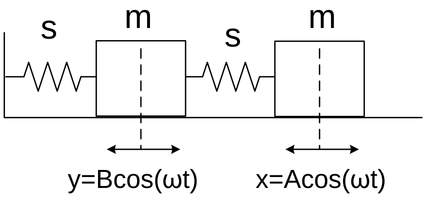
$\omega^4 m_1 m_2-\omega^2 m_1 s--\omega^2 m_2 s+\cancel{s^2}-\cancel{s^2}=0\Rightarrow \omega^4-\omega^2 s\left(\dfrac{1}{m_2}+\dfrac{1}{m_1}\right)=0\Rightarrow \omega^2\left[\omega^2-s\left(\dfrac{1}{m_2}+\dfrac{1}{m_1}\right)\right]=0$ με

λύσεις: $\omega_1^2=0,\ \omega_2^2=\dfrac{s}{\mu},\quad \dfrac{1}{\mu}=\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}$. Η μη ύπαρξη δύναμης επαναφοράς, δίδει $\omega_1^2=0$, που σημαίνει ότι το σύστημα ηρεμεί ή κινείται με σταθερή ταχύτητα. Ο όρος μ είναι η «ανηγμένη μάζα», δηλαδή η μάζα που θα έπρεπε να έχει ένας απλός αρμονικός ταλαντωτής με ελατήριο σταθεράς *s* για να εκτελεί ταλαντώσεις με συχνότητα $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{s}{\mu}}$, όπως στο δίπλα σχήμα:



Ο λόγος πλατών *A/B* είναι: $-sA + (-\omega^2 m_2 + s)B = 0 \Rightarrow \dfrac{A}{B} = 1 - \omega^2 \dfrac{m_2}{s}$. Επομένως, $\dfrac{A}{B} = -\dfrac{m_2}{m_1}$.

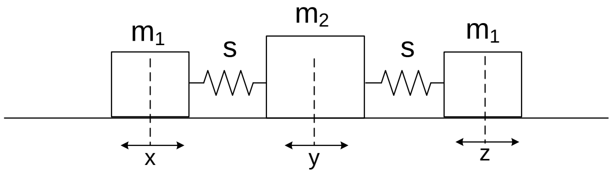
Πρόβλημα 4.5 (3.5). Να διατυπώσετε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης του παρακάτω συστήματος συζευγμένων ταλαντωτών. Να βρείτε τις συχνότητες των τρόπων ταλάντωσης και το λόγο πλατών σε κάθε τρόπο.



Απάντηση: $m\ddot{x} + s(x - y) = 0, \quad m\ddot{y} + sy + s(y - x) = 0,$

$\omega_{1,2}^2 = \left(3 \mp \sqrt{5}\right)\dfrac{s}{2m}, \ \omega_1 : \dfrac{B}{A} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \ \omega_2 : \dfrac{B}{A} = -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

Πρόβλημα 4.19 (δεν υπάρχει στην 3η έκδοση). Μοντέλο του μορίου CO_2. Να διατυπώσετε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης του παρακάτω συστήματος συζευγμένων ταλαντωτών. Να βρείτε τις συχνότητες των τρόπων ταλάντωσης και το λόγο πλατών σε κάθε τρόπο.



Λύση: Εδώ έχουμε τρείς μάζες, τρείς βαθμούς ελευθερίας και άρα τρείς τρόπους ταλάντωσης. Επίσης δεν υπάρχουν πλευρικά ελατήρια. Οι Δ.Ε. θεωρώντας τυχαία θέση των μαζών με *z>y>x>0* και βρίσκοντας τις δυνάμεις, είναι:

$$m_1\ddot{x} + s(x - y) = 0, \quad m_2\ddot{y} + s(y - x) + s(y - z) = 0, \quad m_1\ddot{z} + s(z - y) = 0\,.$$

Θέτουμε $x = A\cos(\omega t), \ \ y = B\cos(\omega t), \ z = C\cos(\omega t)$ και παίρνουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{array}{llllll}
\left(s - m_1\omega^2\right)A & -sB & +0C & =0 & (1) \\
-sA & +\left(2s - m_2\omega^2\right)B & -sC & =0 & (2) \\
0A & -sB & +\left(s - m_1\omega^2\right)C & =0 & (3)
\end{array}$$

Θέτουμε DET=0: $\left(s - m_1\omega^2\right)\left[\left(2s - m_2\omega^2\right)\left(s - m_1\omega^2\right) - s^2\right] - s^2\left(s - m_1\omega^2\right) = 0 \Rightarrow$

$$\left(s - m_1\omega^2\right)\left[\cancel{2s^2} - 2sm_1\omega^2 - 2sm_2\omega^2 + m_1m_2\omega^4 - \cancel{s^2} - \cancel{s^2}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\left(s - m_1\omega^2\right)\omega^2\left[m_1m_2\omega^2 - s(2m_1 + m_2)\right] = 0$$

Επομένως προκύπτουν τρείς συχνότητες: $\omega_1 = 0, \ \omega_2^2 = \dfrac{s}{m_1}, \ \omega_3^2 = \dfrac{s}{m_1} + \dfrac{2s}{m_2}$. Και εδώ η 1η συχνότητα αντιστοιχεί σε ηρεμία ή μεταφορική κίνηση.

Για τους λόγους των πλατών, χρησιμοποιώ τις εξισώσεις (1) και (2):

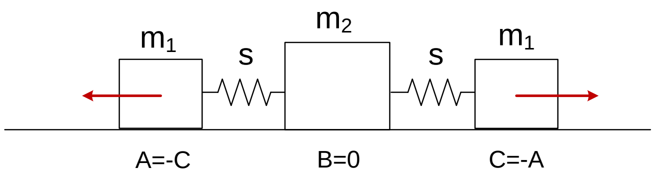
$\frac{B}{A}=1-\frac{m_1}{s}\omega^2$, $-\frac{s}{m_2}A+\left(\frac{2s}{m_2}-\omega^2\right)B-\frac{s}{m_2}C=0$. Για $\omega_2^2=\frac{s}{m_1}$, προκύπτει:

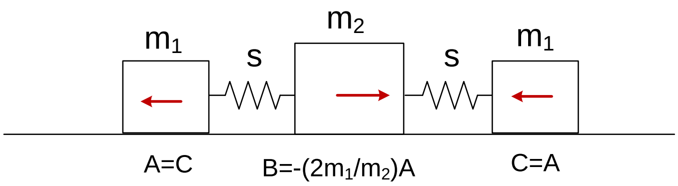
$\frac{B}{A}=1-1=0\Rightarrow\boxed{B=0}$, $-\frac{s}{m_2}A+\left(\frac{2s}{m_2}-\omega^2\right)\cancel{B}^0-\frac{s}{m_2}C=0\Rightarrow\boxed{A=-C}$. Άρα η κεντρική μάζα είναι ακίνητη και οι πλευρικές κινούνται με αντίθετα πλάτη, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Για $\omega_3^2=\frac{s}{m_1}+\frac{2s}{m_2}$, προκύπτει από την εξίσωση (1):

$\frac{B}{A}=1-\frac{m_1}{s}\left(\frac{s}{m_1}+\frac{2s}{m_2}\right)=1-1-\frac{2m_1}{m_2}\Rightarrow\boxed{\frac{B}{A}=-\frac{2m_1}{m_2}}$ Ομοίως, από την εξίσωση (3):

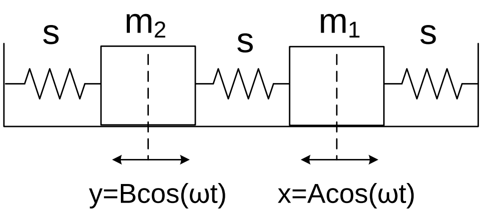
$\frac{B}{C}=1-\frac{m_1}{s}\left(\frac{s}{m_1}+\frac{2s}{m_2}\right)\Rightarrow\boxed{\frac{B}{C}=-\frac{2m_1}{m_2}}$ Συγκρίνοντας τις δύο σχέσεις, προκύπτει ότι $\boxed{A=C}$. Επομένως, η κεντρική μάζα είναι σε αντίθεση φάσης με τις δύο πλευρικές, οι οποίες έχουν τα ίδια πλάτη, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:





Παρατηρείστε ότι στον τρόπο ταλάντωσης με τη μεγαλύτερη συχνότητα οι διαδοχικές μάζες είναι σε αντίθεση φάσης (συνθήκη μέγιστης σύζευξης).

Άσκηση. Να διατυπώσετε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης του παρακάτω συστήματος συζευγμένων ταλαντωτών.



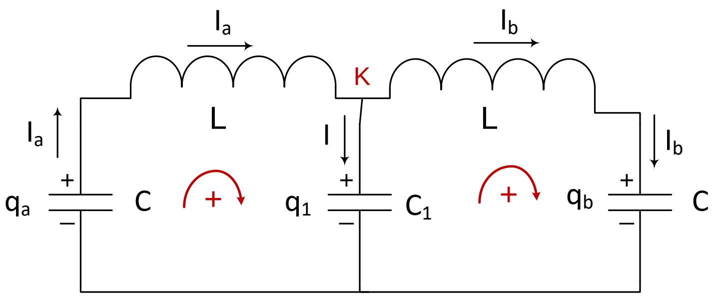
Να βρείτε τις συχνότητες των τρόπων ταλάντωσης και το λόγο πλατών σε κάθε τρόπο.

Απάντηση: $\omega^2=s\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\pm\frac{s}{m_1m_2}\sqrt{m_1^2+m_2^2-m_1m_2}$, $\frac{A}{B}=1-\frac{m_2}{m_1}\pm\sqrt{1+\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2-\frac{m_2}{m_1}}$.

Δείτε το αρχείο EXCEL «Συζευγμένο σύστημα γενική περίπτωση» στο e-class.

Στο φύλλο «Εύρεση τρόπων» δοκιμάστε τιμές [SI]: $m_x=m_y=5$, $s_x=s_y=1$, s=0.2 ή 0.01 (ασθενής σύζευξη) και αρχικές συνθήκες (x_0,y_0): (1,0), (1,0.7), (1,1) 1^{ος} τρόπος, (1,-1) 2^{ος} τρόπος. Στο φύλλο «προσομοίωση» παρατηρείστε τα διακροτήματα, τη συνεισφορά κάθε τρόπου και την ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ των δύο ταλαντωτών μέσω του ελατηρίου σύζευξης. Όταν υφίσταται μόνο ο ένας τρόπος ταλάντωσης παρατηρείστε ότι δε γίνεται ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ των ταλαντωτών.

Πρόβλημα 4.12 (3.12). Το ηλεκτρικό ισοδύναμο του συζευγμένου συστήματος. Να δείξετε ότι το σύστημα του σχήματος μπορεί να θεωρηθεί ως συζευγμένο σύστημα ηλεκτρικών ταλαντώσεων έντασης ρεύματος. Να βρεθούν οι κατάλληλες Δ.Ε. και με χρήση κανονικών συντεταγμένων να βρεθούν οι συχνότητες των τρόπων ταλάντωσης.



Λύση: Στην περίπτωση αυτή, αντί για τυχαίες μετατοπίσεις των μαζών, επιλέγουμε τυχαία φορτία q_a, q_1, q_b στους πυκνωτές, με τις πολικότητες που φαίνονται στο σχήμα, καθώς και ρεύματα I_a, I, I_b που διαρρέουν τα αντίστοιχα στοιχεία του κυκλώματος. Εφαρμόζοντας το νόμο Kirchhoff για τα ρεύματα στον κόμβο «Κ», παίρνουμε: $I_a = I + I_b$. Εφαρμόζοντας το νόμο Kirchhoff για τις τάσεις στους δύο βρόχους, λαμβάνοντας ως θετική τη φορά που φαίνεται στο σχήμα, έχουμε:

$\dfrac{q_a}{C} - L\dot{I}_a - \dfrac{q_1}{C_1} = 0,\ \ \dfrac{q_1}{C_1} - L\dot{I}_b - \dfrac{q_b}{C} = 0$. Οι εξισώσεις αυτές, δεν είναι συζευγμένες, γιατί δεν υπάρχει συσχέτιση των φορτίων των πυκνωτών. Αντίθετα, τα ρεύματα συνδέονται μεταξύ τους, μέσω του κόμβου «Κ». Έτσι, παραγωγίζοντας τις παραπάνω Δ.Ε. ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$\dfrac{\dot{q}_a}{C} - L\ddot{I}_a - \dfrac{\dot{q}_1}{C_1} = 0,\ \ \dfrac{\dot{q}_1}{C_1} - L\ddot{I}_b - \dfrac{\dot{q}_b}{C} = 0$. Εδώ πρέπει να προσέξουμε την πολικότητα του φορτίου κάθε πυκνωτή και τη φορά του αντίστοιχου ρεύματος και να εφαρμόσουμε τον παρακάτω κανόνα: Αν η πολικότητα του πυκνωτή συμβαδίζει με τη συμβατική φορά του ρεύματος, δηλαδή έχουμε ροή ρεύματος από τον θετικό πόλο του πυκνωτή προς τον αρνητικό, τότε θεωρούμε ότι $\dot{q}_i = I_i$. Διαφορετικά, θεωρούμε ότι $\dot{q}_i = -I_i$, δηλαδή, η φορά που έχουμε επιλέξει για το ρεύμα είναι αντίθετη εκείνης που προκύπτει από την πολικότητα του πυκνωτή. Έτσι, λαμβάνουμε $\dot{q}_a = -I_a,\ \ \dot{q}_1 = I = I_a - I_b,\ \ \dot{q}_b = I_b$. Επίσης, $I = I_a - I_b$ και αντικαθιστώντας αυτά στις Δ.Ε. έχουμε:

$$\frac{\dot{q}_a}{C} - L\ddot{I}_a - \frac{\dot{q}_1}{C_1} = 0 \Rightarrow -\frac{I_a}{C} - L\ddot{I}_a - \frac{I_a - I_b}{C_1} = 0 \Rightarrow \boxed{L\ddot{I}_a + \frac{I_a}{C} + \frac{I_a - I_b}{C_1} = 0} \quad (1)$$

$$\frac{\dot{q}_1}{C_1} - L\ddot{I}_b - \frac{\dot{q}_b}{C} = 0 \Rightarrow \frac{I_a - I_b}{C_1} - L\ddot{I}_b - \frac{I_b}{C} = 0 \Rightarrow \boxed{L\ddot{I}_b + \frac{I_b}{C} - \frac{I_a - I_b}{C_1} = 0} \quad (2)$$

Οι Δ.Ε. είναι συζευγμένες.

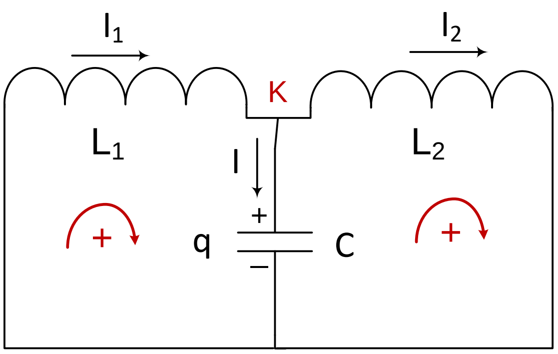
Θέτοντας τις κανονικές συντεταγμένες $I_1 = I_a + I_b,\ I_2 = I_a - I_b$ και προσθαφαιρώντας τις εξισώσεις (1) και (2):

$$(1)+(2):\ \ \ddot{I}_1 + \frac{I_1}{LC} = 0,\ \text{με γνωστή λύση την}\ \ \omega_1^2 = \frac{1}{LC},\ I_1 = A\sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$(1)-(2):\ \ddot{I}_2 + \left(\frac{1}{LC} + \frac{2}{LC_1}\right)I_2 = 0,\ \text{με γνωστή λύση την}\ \ \omega_2^2 = \frac{1}{LC} + \frac{2}{LC_1},\ I_2 = B\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Οι μορφές των παραπάνω εξισώσεων, είναι **πανομοιότυπες** με εκείνες των συζευγμένων εκκρεμών, εξισώσεις (3.8) και (3.9). Έτσι, προκύπτουν οι δύο τρόποι ταλάντωσης, με τις συχνότητες που φαίνονται παραπάνω. Στον 1^{o} τρόπο ισχύει $I_a = I_b$, ενώ στο 2^{o} ισχύει $I_a = -I_b$.

Άσκηση: Να διατυπώσετε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης του συστήματος συζευγμένων ταλαντωτών που φαίνεται στο σχήμα. Να βρείτε τις συχνότητες των τρόπων ταλάντωσης και το λόγο πλατών σε κάθε τρόπο.



Υπόδειξη: Να λυθεί με συστηματική αναζήτηση των τρόπων.

Λύση: Εφαρμόζοντας το νόμο Kirchhoff για τα ρεύματα στον κόμβο «Κ», παίρνουμε: $I_1 = I + I_2$. Εφαρμόζοντας το νόμο Kirchhoff για τις τάσεις στους δύο βρόχους, λαμβάνοντας ως θετική τη φορά που φαίνεται στο σχήμα, έχουμε:

$-L_1\dot{I}_1 - \dfrac{q}{C} = 0,\ \ \dfrac{q}{C} - L_2\dot{I}_2 = 0$. Παραγωγίζοντας τις Δ.Ε. ως προς το χρόνο και αντικαθιστώντας το $\dot{q} = I = I_1 - I_2$ λαμβάνουμε:

$L_1\ddot{I}_1 + \dfrac{I_1 - I_2}{C} = 0,\ L_2\ddot{I}_2 - \dfrac{I_1 - I_2}{C} = 0$. Θέτοντας $I_1 = Ae^{i\omega t},\ I_2 = Be^{i\omega t}$ προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{aligned} &\left(-\omega^2 L_1 + \frac{1}{C}\right)A \quad - \frac{1}{C}B = 0 \\ &-\frac{1}{C}A + \left(-\omega^2 L_2 + \frac{1}{C}\right)B = 0 \end{aligned}$$

Με DET: $\left(-\omega^2 L_1 + \dfrac{1}{C}\right)\left(-\omega^2 L_2 + \dfrac{1}{C}\right) - \dfrac{1}{C^2} = 0 \Rightarrow$

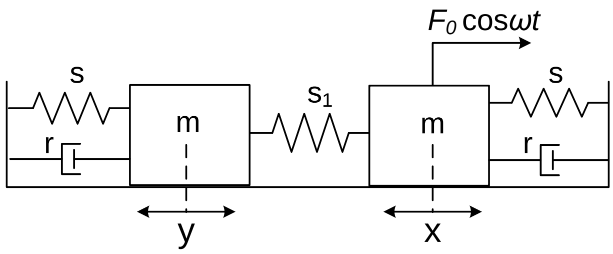
$$\omega^4 L_1 L_2 - \omega^2\frac{L_1}{C} - \omega^2\frac{L_2}{C} + \cancel{\frac{1}{C^2}} - \cancel{\frac{1}{C^2}} = 0 \Rightarrow \omega^2\left(\omega^2 L_1 L_2 - \frac{L_1}{C} - \frac{L_2}{C}\right) = 0$$

Προκύπτουν οι συχνότητες $\omega_1 = 0,\ \omega_2^2 = \dfrac{1}{C}\left(\dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2}\right)$. Ο λόγος των πλατών, από την $1^{η}$ εξίσωση:

$$\frac{A}{B} = 1 - \omega^2\frac{L_2}{C} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \frac{A}{B} = -\frac{L_2}{L_1}\ .$$

Τα αποτελέσματα **είναι πανομοιότυπα** με εκείνα του προβλήματος **4.4** **(3.4).** «Μοντέλο του μορίου CO», με αντιστοίχιση των μεγεθών: $C \to \dfrac{1}{s},\ L_1 \to m_1,\ L_2 \to m_2$.

Παράδειγμα: Συζευγμένο σύστημα που εκτελεί εξαναγκασμένες ταλαντώσεις.



Το σύστημα του σχήματος, εκτός από μάζα *m* και ελατήριο σκληρότητας *s* έχει και απόσβεση *r* (τριβή). Στη δεξιά μάζα ενεργεί μια συνημιτονοειδής δύναμη και το σύστημα εκτελεί εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. Οι Δ.Ε. για κάθε μάζα προκύπτουν όπως στο παράδειγμα της σελίδας 2:

$m\ddot{x}+r\dot{x}+sx+s_1\left(x-y\right)=F_0\cos\omega t,\quad m\ddot{y}+r\dot{y}+sy+s_1\left(y-x\right)=0$. Μπορεί να λυθεί με χρήση κανονικών συντεταγμένων: $X=x+y,\ Y=x-y$. Με προσθαφαίρεση των Δ.Ε. έχουμε:

$$m\ddot{X}+r\dot{X}+sX=F_0\cos\omega t \quad (1)$$
$$m\ddot{Y}+r\dot{Y}+\left(s+2s_1\right)Y=F_0\cos\omega t \quad (2)$$

Οι δύο εξισώσεις περιγράφουν ταλαντωτές που εκτελούν εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. Η μόνιμη λύση για κάθε εξίσωση είναι γνωστή:

$$X=\frac{F_0}{\omega Z_1}\sin\left(\omega t-\varphi_1\right),\ Z_1=\sqrt{r^2+\left(\omega m-\frac{s}{\omega}\right)^2},\quad \cos\varphi_1=\frac{r}{Z_1},\ \sin\varphi_1=\frac{X_1}{Z_1},\ X_1=\omega m-\frac{s}{\omega}$$
$$Y=\frac{F_0}{\omega Z_2}\sin\left(\omega t-\varphi_2\right),\ Z_2=\sqrt{r^2+\left(\omega m-\frac{s+2s_1}{\omega}\right)^2},\quad \cos\varphi_2=\frac{r}{Z_2},\ \sin\varphi_2=\frac{X_2}{Z_2},\ X_2=\omega m-\frac{s+2s_1}{\omega}$$

Οι δύο τρόποι ταλάντωσης έχουν συχνότητες $\omega_1^2=\dfrac{s}{m},\ \omega_2^2=\dfrac{s+2s_1}{m}$. Οι μετατοπίσεις για κάθε τρόπο είναι $x=y,\ x=-y$, όπως περιγράφεται από τις κανονικές συντεταγμένες.

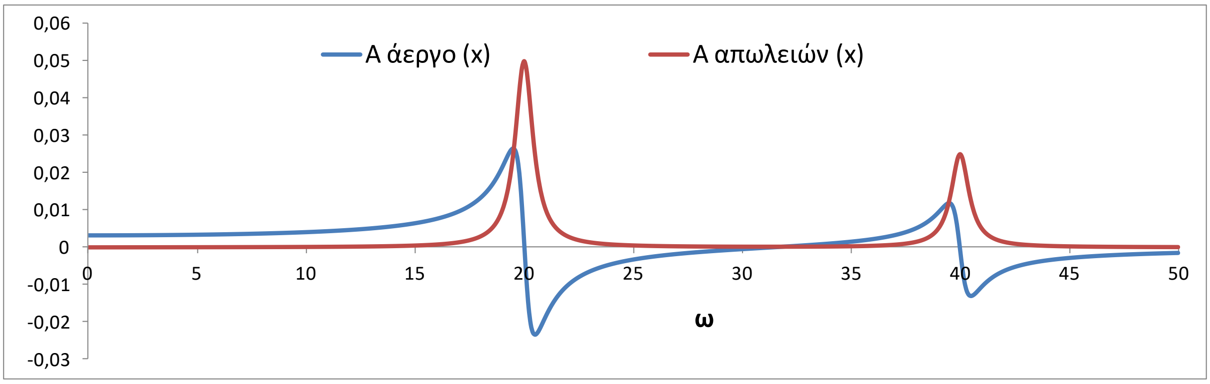
Μπορούμε να αναλύσουμε τα πλάτη *X, Y* στις άεργες συνιστώσες και συνιστώσες απωλειών:

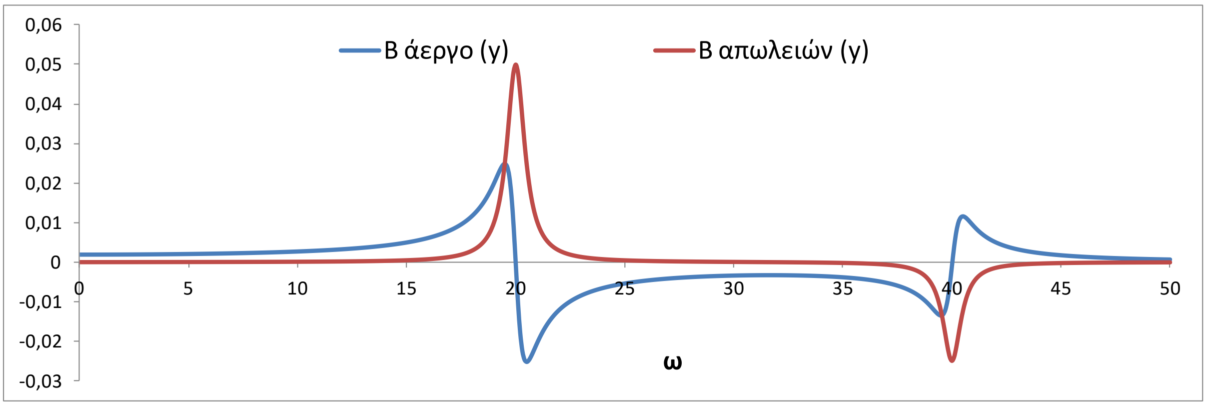
$X=\dfrac{F_0 r}{\omega Z_1^2}\sin\omega t-\dfrac{F_0 X_1}{\omega Z_1^2}\cos\omega t$, $Y=\dfrac{F_0 r}{\omega Z_2^2}\sin\omega t-\dfrac{F_0 X_2}{\omega Z_2^2}\cos\omega t$. Οι μετατοπίσεις γίνονται:

$$x=\frac{X+Y}{2}=\underbrace{\frac{F_0 r}{2\omega}\left[\frac{1}{Z_1^2}+\frac{1}{Z_2^2}\right]}_{\text{Πλάτος απωλειών}}\sin\omega t-\underbrace{\frac{F_0}{2\omega}\left[\frac{X_1}{Z_1^2}+\frac{X_2}{Z_2^2}\right]}_{\text{Πλάτος άεργο}}\cos\omega t=A_{\alpha\pi\omega\lambda\varepsilon\iota\acute{\omega}\nu}\sin\omega t+A_{\acute{\alpha}\varepsilon\rho\gamma o}\cos\omega t$$

$$y=\frac{X-Y}{2}=\underbrace{\frac{F_0 r}{2\omega}\left[\frac{1}{Z_1^2}-\frac{1}{Z_2^2}\right]}_{\text{Πλάτος απωλειών}}\sin\omega t-\underbrace{\frac{F_0}{2\omega}\left[\frac{X_1}{Z_1^2}-\frac{X_2}{Z_2^2}\right]}_{\text{Πλάτος άεργο}}\cos\omega t=B_{\alpha\pi\omega\lambda\varepsilon\iota\acute{\omega}\nu}\sin\omega t+B_{\acute{\alpha}\varepsilon\rho\gamma o}\cos\omega t$$

Οι καμπύλες των μετατοπίσεων *πλατών A και B (άεργο και απωλειών)* συναρτήσει της συχνότητας *ω* φαίνεται στα επόμενα διαγράμματα για τιμές $F_0=2,\ m=1,\ r=1\ \omega_1=20,\ \omega_2=40$ *[SI]*:

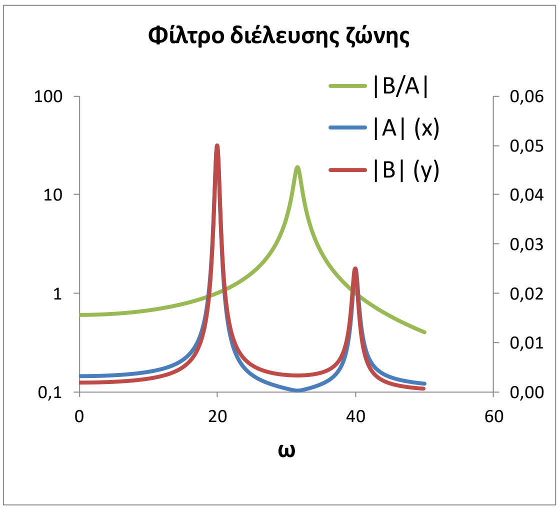




Παρατηρούμε ότι οι καμπύλες εμφανίζουν δύο συντονισμούς γύρω από τις συχνότητες των τρόπων ταλάντωσης ω_1 και ω_2 με τους ταλαντωτές να είναι σε φάση στην ω_1 και σε αντίθεση στην ω_2.

Δείτε το αρχείο EXCEL «Εξαναγκασμένη ταλάντωση συζευγμένου συστήματος» στο e-class.

Το σύστημα που περιγράψαμε μπορεί να θεωρηθεί ως ένα **μηχανικό φίλτρο**, όπου είσοδος είναι η μάζα δεξιά που κινείται υπό την επίδραση της δύναμης και έξοδος η μάζα αριστερά. Αν το πλάτος της μετατόπισης y είναι μικρότερο του πλάτους της μετατόπισης x τότε έχουμε **απόσβεση**, ενώ αν είναι μεγαλύτερο, έχουμε **ενίσχυση**. Ο λόγος των πλατών $\left|\frac{B}{A}\right|$ για το σύστημα των παραπάνω διαγραμμάτων στο επόμενο σχήμα:



Παρατηρούμε ότι ο λόγος $|B/A|$ γίνεται μεγαλύτερος της μονάδας στην περιοχή συχνοτήτων (ω_1, ω_2) και επομένως αποτελεί φίλτρο διέλευσης ζώνης. Οι ταλαντώσεις με συχνότητες έξω από αυτή τη ζώνη αποσβεννύονται, ενώ εκείνες που βρίσκονται μέσα στη ζώνη ενισχύονται.

Αναλυτική περιγραφή της συμπεριφοράς του μηχανικού φίλτρου μπορεί να γίνει στην οριακή περίπτωση όπου $r \to 0$ (απόσβεση που τείνει στο μηδέν). Τότε οι όροι απωλειών μπορούν να θεωρηθούν αμελητέοι και καθώς:

$Z_1 \simeq X_1 = \omega m - \frac{s}{\omega} = \frac{m}{\omega}\left(\omega^2 - \omega_1^2\right)$, $Z_2 \simeq X_2 = \omega m - \frac{s+2s_1}{\omega} = \frac{m}{\omega}\left(\omega^2 - \omega_2^2\right)$, παίρνουμε:

$x \simeq \frac{F_0}{2m}\left[\frac{1}{\omega_1^2-\omega^2} + \frac{1}{\omega_2^2-\omega^2}\right]\cos\omega t, \quad y \simeq \frac{F_0}{2m}\left[\frac{1}{\omega_1^2-\omega^2} - \frac{1}{\omega_2^2-\omega^2}\right]\cos\omega t$. Έτσι:

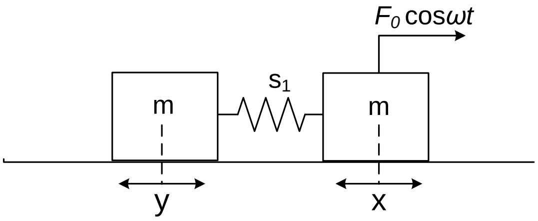
$\left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{B}{A}\right| \simeq \left|\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{\omega_2^2+\omega_1^2-2\omega^2}\right|$. Οι τιμές του λόγου για διάφορες τιμές της ω δίδονται στον πίνακα.

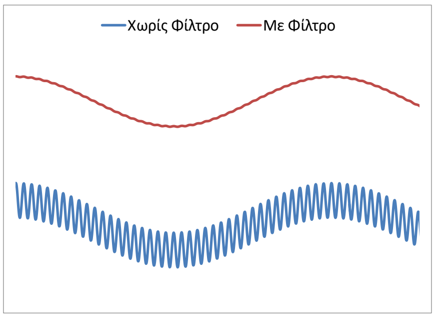
ω	$\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert$
0	$\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{\omega_2^2+\omega_1^2} < 1$
$\omega_1 = \sqrt{\frac{s}{m}}$	1, με $y/x > 0$
$\sqrt{\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2}}$	$\to \infty$
$\omega_2 = \sqrt{\frac{s+2s_1}{m}}$	1, με $y/x < 0$
$\to \infty$	0

Η συμπεριφορά του συστήματος ως φίλτρου διέλευσης ζώνης στην περιοχή συχνοτήτων (ω_1, ω_2) επιβεβαιώνεται και από τον πίνακα.

Για να μετατρέψουμε το φίλτρο σε **βαθυπερατό**, θα πρέπει η συχνότητα ω_1 να μηδενιστεί, δηλαδή

$s/m=0$. Αυτό επιτυγχάνεται αν μηδενιστεί η σκληρότητα των πλευρικών ελατηρίων, που σημαίνει ότι πρέπει να τα καταργήσουμε. Ένα σύστημα όπως αυτό που φαίνεται στο σχήμα επιτρέπει τη διέλευση συχνοτήτων από μηδέν μέχρι ω_2. Δεξιά φαίνεται η δράση ενός τέτοιου φίλτρου που εξασθενεί κατά 50 φορές την υψίσυχνη συνιστώσα του εισερχόμενου σήματος.





Άσκηση: Πώς μπορεί να γίνει το φίλτρο **υψιπερατό; Απάντηση:** Με $s_1 >>> s$ ή $\omega_2 >>> \omega_1$.

Πρόβλημα 4.10 (3.10). Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις συστήματος συζευγμένων εκκρεμών. Λύνεται όπως το παραπάνω παράδειγμα, με $s \to mg/l$, $s_1 \to s$, $\omega_1^2 = g/l$, $\omega_2^2 = g/l + 2s/m$.

Προβλήματα 4.17 και 4.18 (3.17 και 3.18). Να βρεθούν οι συχνότητες των τρόπων ταλάντωσης και τα πλάτη των μαζών σε κάθε τρόπο, για σύστημα χορδής τρία σφαιρίδια $n=3$.

Λύση: Οι σχέσεις που δίνουν τις συχνότητες και τα πλάτη είναι:

$$\omega_s^2 = 2\omega_0^2\left[1-\cos\left(\frac{s\pi}{n+1}\right)\right],\ \omega_0^2 = \frac{T}{ma}. \quad A_r = C\sin\left(r\frac{s\pi}{n+1}\right).$$

Για τον 1ο τρόπο ταλάντωσης, $s=1$:

$$\omega_1^2 = 2\frac{T}{ma}\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{T}{ma}\left(2-\sqrt{2}\right). \quad A_1 = C\frac{\sqrt{2}}{2},\ A_2 = C,\ A_3 = C\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Για τον 2ο τρόπο ταλάντωσης, $s=2$:

$$\omega_2^2 = 2\frac{T}{ma}\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\frac{T}{ma}. \quad A_1 = C,\ A_2 = 0,\ A_3 = -C$$

Για τον 3ο τρόπο ταλάντωσης, $s=3$:

$$\omega_3^2 = 2\frac{T}{ma}\left[1-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \frac{T}{ma}\left(2+\sqrt{2}\right). \quad A_1 = C\frac{\sqrt{2}}{2},\ A_2 = -C,\ A_3 = C\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Παρατηρείστε τις ομοιότητες των τρόπων 2, 3 με εκείνους του προβλήματος 4.19 (μόριο CO_2)

Πρόβλημα 4.21 (3.20). Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη συχνότητα συστήματος χορδής με σφαιρίδια, στην περίπτωση μεγάλου αριθμού σφαιριδίων (*n μεγάλο*). Αν $s<<n$, να αποδείξετε ότι οι συχνότητες των τρόπων ταλάντωσης δίδονται από τη σχέση $\omega_s = \frac{s\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$.

Λύση: Για *n μεγάλο,* η μέγιστη συχνότητα (αποκοπής) είναι η ω_n:

$$\omega_n^2 = 2\frac{T}{ma}\left[1-\cos\left(\cancel{\frac{n\pi}{n+1}}\right)^{(-1)}\right] \approx 4\frac{T}{ma}. \quad \text{Άρα, } \omega_{\max} = 2\sqrt{\frac{T}{ma}} = 2\omega_0 .$$

Η ελάχιστη είναι: $\omega_{min}^2 = \omega_1^2 = 2\frac{T}{ma}\left[1-\cos\left(\cancel{\frac{\pi}{n+1}}\right)^{(1)}\right] \Rightarrow \omega_{min}^2 \to 0$

Για τους «χαμηλούς» τρόπους ταλάντωσης, $s<<n$ όταν *n μεγάλο,* χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα:

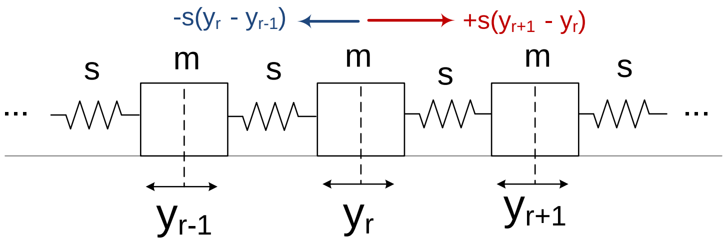
$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$ και παίρνουμε: $\cos\left(\frac{s\pi}{n+1}\right) \approx 1-\frac{1}{2}\left(\frac{s\pi}{n+1}\right)^2$ οπότε η ω_s γίνεται:

$\omega_s^2 = 2\frac{T}{ma}\left[1-1+\frac{1}{2}\left(\frac{s\pi}{n+1}\right)^2\right] = \frac{T}{ma}\left(\frac{s\pi}{n+1}\right)^2,\ \ \omega_s = \frac{s\pi}{n+1}\sqrt{\frac{T}{ma}}$. Με $m/a=\rho$ γραμμική πυκνότητα και

$(n+1)a=l$ μήκος της χορδής παίρνουμε τη σχέση που ζητείται: $\omega_s = \frac{s\pi}{n+1}\sqrt{\frac{T}{ma}} = \frac{s\pi}{(n+1)a}\sqrt{\frac{Ta}{m}} = \frac{s\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$

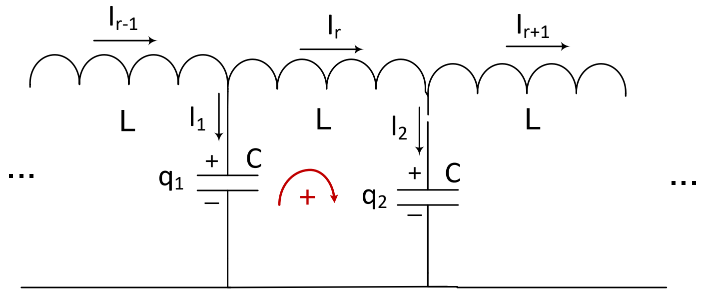
Δείτε το αρχείο EXCEL «Χορδή με σφαιρίδια» στο e-class.
Το 1ο φύλλο εμφανίζει τις συχνότητες των τρόπων ταλάντωσης (μέχρι n=100 σφαιρίδια)
Επιλέγοντας n=20, στο 2ο φύλλο «ΠΛΑΤΗ» εμφανίζονται τα στιγμιότυπα της χορδής για κάθε τρόπο.

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι σχέσεις που δίδουν τις συχνότητες των τρόπων ταλάντωσης και τα πλάτη των μαζών σε κάθε τρόπο, για το σύστημα του σχήματος όπου n μάζες m συνδέονται με ελατήρια σκληρότητας s. Να χρησιμοποιήσετε τη μεθοδολογία της χορδής με σφαιρίδια.



Απάντηση: Θεωρούμε αρχικές μετατοπίσεις $y_{r+1} > y_r > y_{r-1} > 0$, βρίσκουμε τις δυνάμεις στη μάζα r, όπως φαίνεται στο σχήμα και παίρνουμε την εξίσωση: $\ddot{y}_r = \frac{s}{m}\left(y_{r+1} - 2y_r + y_{r-1}\right)$. Αυτή είναι πανομοιότυπη με την εξίσωση 4.14 (3.54) και λύνεται με τον ίδιο τρόπο. Εδώ $\omega_0^2 = \frac{s}{m}$, $\omega_{\max} = 2\sqrt{\frac{s}{m}}$.

Πρόβλημα 4.22 (3.21). «Γραμμή μεταφοράς» ηλεκτρικού φορτίου. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα σύστημα που αποτελείται από n πανομοιότυπες αυτεπαγωγές L συνδεδεμένες με χωρητικότητες C. Να βρεθούν οι σχέσεις που δίνουν τις συχνότητες των τρόπων ταλάντωσης και τα πλάτη των μαζών σε κάθε τρόπο, χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία της χορδής με σφαιρίδια.



Απάντηση: Γνωρίζουμε ότι: $I_1 = I_{r-1} - I_r$, $I_2 = I_r - I_{r+1}$, $\dot{q}_1 = I_1$, $\dot{q}_2 = I_2$. Εφαρμόζοντας το νόμο Kirchhoff στο βρόχο του σχήματος: $\frac{q_1}{C} - L\dot{I}_r - \frac{q_2}{C} = 0$. Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο:

$$\frac{\dot{q}_1}{C} - L\ddot{I}_r - \frac{\dot{q}_2}{C} = 0 \Rightarrow \frac{I_{r-1} - I_r}{C} - L\ddot{I}_r - \frac{I_r - I_{r+1}}{C} = 0 \Rightarrow \ddot{I}_r = \frac{1}{LC}\left(I_{r+1} - 2I_r + I_{r+1}\right).$$

Αυτή είναι πανομοιότυπη με την εξίσωση 4.14 (3.54) και λύνεται με τον ίδιο τρόπο. Εδώ $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $\omega_{\max} = 2\sqrt{\frac{1}{LC}}$.