Προβλήματα Κεφαλαίου 3 στην 6η Έκδοση

Κεφάλαιο 2 στην 3η Έκδοση

Παράδειγμα: Μιγαδικοί αριθμοί και φάσορες.

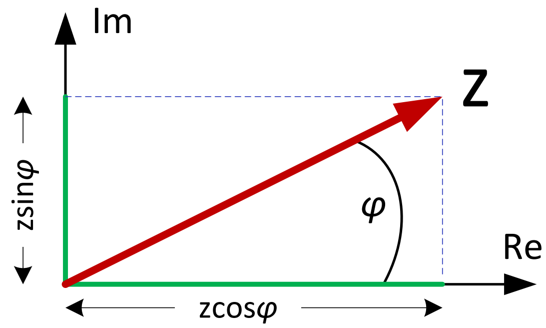
Ένας μιγαδικός αριθμός z ορίζεται ως:

$z = a + ib$, ή σε πολικές συντεταγμένες: $z = |z|e^{i\varphi} = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi$ όπου $|z|$ είναι το μέτρο και φ η «φάση». Προφανώς ισχύει $a = |z|\cos\varphi,\ b = |z|\sin\varphi,\ \varphi = \arctan\frac{b}{a}$.

Επίσης, $|z|^2 = zz^* = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2,\ z^*$"συζυγής" ενώ $z^2 = zz = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + i2ab$.

Στο βιβλίο Pain (σε όλες τις εκδόσεις) οι μιγαδικοί συμβολίζονται με **έντονα στοιχεία (bold),** πχ: **z** και το μέτρο τους με μη έντονα: $z \to |z|$, για ευκολία. Στις σημειώσεις των προηγούμενων ετών (από τον πίνακα) και στα παραδείγματα-ασκήσεις παρακάτω, οι μιγαδικοί συμβολίζονται ως διανύσματα: $\vec{z} \to \mathbf{z}$ και το μέτρο τους ως: $z \to |z|$. Ο συμβολισμός αυτός παραπέμπει στη θέση ενός μιγαδικού αριθμού στο επίπεδο και μας υπενθυμίζει ότι μπορούμε να τον θεωρήσουμε διάνυσμα:

Όπως φαίνεται στο δίπλα σχήμα, οι προβολές του $\vec{z}$ στον πραγματικό και φανταστικό άξονα είναι συνημιτονοειδείς και ημιτονοειδείς αντίστοιχα.



Επομένως, αν θεωρήσουμε ότι η φάση *φ* μεταβάλλεται με το χρόνο, *φ=ωt,* τότε παίρνουμε ένα περιστρεφόμενο διάνυσμα της μορφής: $\vec{z} = ze^{i\omega t} = z\cos\omega t + i\,z\sin\omega t$ και προκύπτει ο γνωστός συμβολισμός των φασόρων, με εφαρμογή στο μιγαδικό επίπεδο.

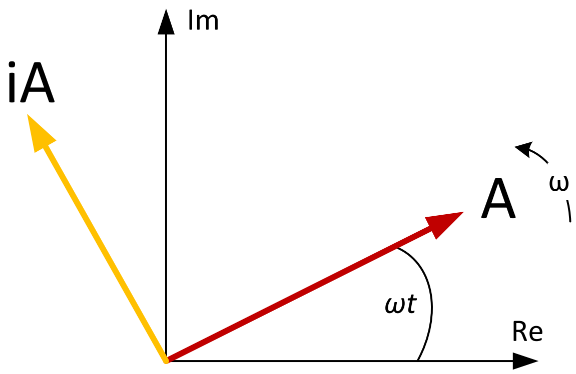
Ο συμβολισμός αυτός επιλέγεται γιατί έχει αρκετά πλεονεκτήματα:

1. **Γινόμενο φάσορα με μιγαδικό αριθμό:** Έστω δύο μιγαδικοί αριθμοί $\vec{A}$ και $\vec{B}$ με $\vec{A} = Ae^{i\omega t}$ και $\vec{B} = Be^{i\varphi}$. Τότε θα ισχύει: $\vec{A}\vec{B} = ABe^{i(\omega t+\varphi)}$, δηλαδή πολλαπλασιάζουμε τα μέτρα και προσθέτουμε τις φάσεις. Παράδειγμα ο νόμος του Ohm στο εναλλασσόμενο: $\vec{V} = \vec{I}\vec{Z} = Ie^{i\omega t}Ze^{i\varphi} \Rightarrow \vec{V} = I\,Ze^{i(\omega t+\varphi)}$, δηλαδή η τάση έχει διαφορά φάσης φ ως προς το ρεύμα.

2. **Επίδραση του *i* στη φάση μιγαδικού αριθμού:** Αν στο παραπάνω παράδειγμα, $\vec{A} = Ae^{i\omega t}$ και $\vec{B} = i = 1e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$. Τότε θα ισχύει: $\vec{A}\vec{B} = i\,\vec{A} = Ae^{i(\omega t+\frac{\pi}{2})}$

Αυτό σημαίνει περιστροφή του φάσορα κατά π/2, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Ομοίως, $-i\vec{A} = Ae^{i(\omega t-\frac{\pi}{2})}$ που σημαίνει περιστροφή κατά –π/2.



Έτσι, οι διαφορές φάσης ανάμεσα στα διάφορα μεγέθη γίνονται εύκολα «ορατές», πχ ο $i\vec{A}$ προηγείται κατά π/2 του $\vec{A}$ ενώ ο $-i\vec{A}$ καθυστερεί κατά π/2 του $\vec{A}$.

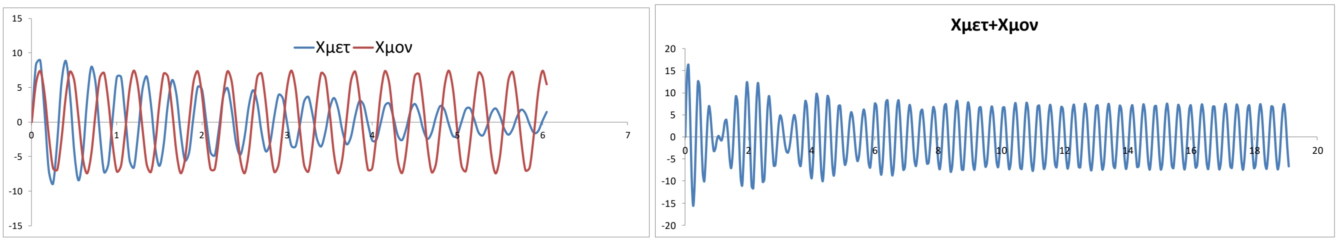
Τέλος, να σημειωθεί ότι $\frac{1}{i} = \frac{-i\cancel{i}}{\cancel{i}} = -i$.

Παράδειγμα: Μεταβατικές ταλαντώσεις. Η πλήρης λύση είναι το άθροισμα του μεταβατικού και του μόνιμου όρου:

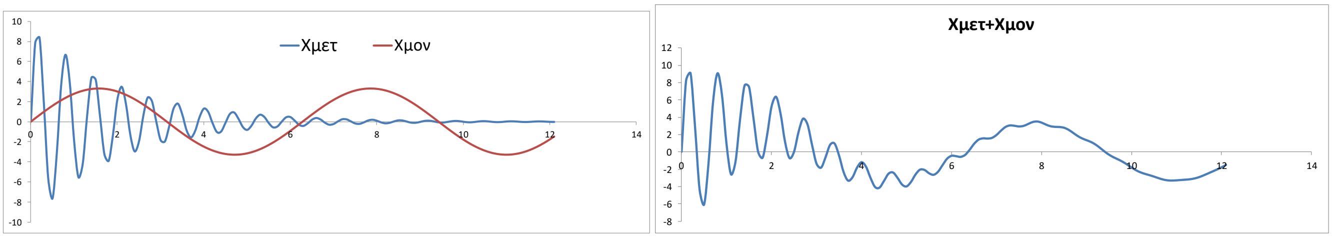
$$m\ddot{x}_{\mu\varepsilon\tau} + r\dot{x}_{\mu\varepsilon\tau} + sx_{\mu\varepsilon\tau} = 0, \quad m\ddot{x}_{\mu o\nu} + r\dot{x}_{\mu o\nu} + sx_{\mu o\nu} = F_0 \cos\omega t \Rightarrow$$

$$m(\ddot{x}_{\mu\varepsilon\tau} + \ddot{x}_{\mu o\nu}) + r(\dot{x}_{\mu\varepsilon\tau} + \dot{x}_{\mu o\nu}) + s(x_{\mu\varepsilon\tau} + x_{\mu o\nu}) = F_0 \cos\omega t$$

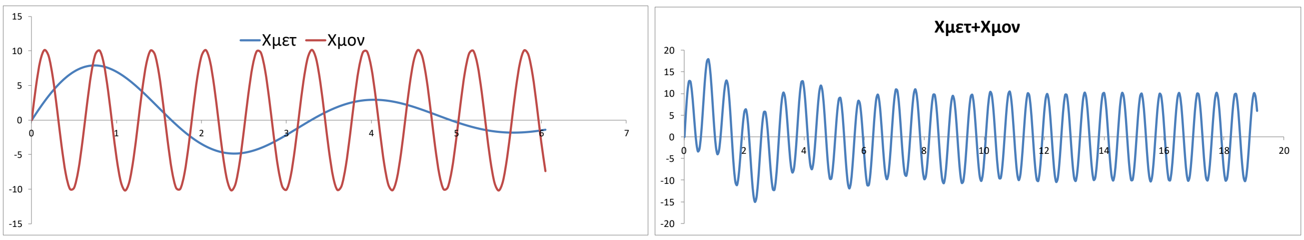
Στα πρώτα στάδια της κίνησης του εξαναγκασμένου ταλαντωτή παρατηρούνται μεταβατικές ταλαντώσεις, όπως στα παρακάτω σχήματα:



Μεταβατικά διακροτήματα όταν ω ≈ ω΄



Μεταβατικές ταλαντώσεις όταν ω << ω΄



Μεταβατικές ταλαντώσεις όταν ω >> ω΄

Δείτε και τα τρία αρχεία EXCEL «Μεταβατικές ταλαντώσεις 1-2-3» στο e-class

Πρόβλημα 3.1 (2.1). Βρείτε τις σχέσεις για τη μετατόπιση την ταχύτητα και την επιτάχυνση ταλαντωτή με ημιτονοειδή διεγείρουσα δύναμη $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$.

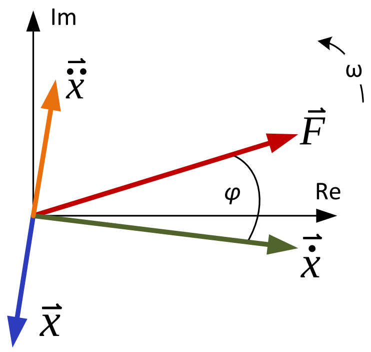
Λύση: Γράφουμε την διανυσματική μορφή των λύσεων και επιλέγουμε το φανταστικό μέρος τους.

$$\vec{F} = F_0 e^{i\omega t} = F_0 \cos\omega t + iF_0 \sin\omega t$$

$$\vec{x} = -\frac{iF_0}{\omega Z_m} e^{i(\omega t-\varphi)} = \frac{F_0}{\omega Z_m}\sin(\omega t-\varphi) - i\frac{F_0}{\omega Z_m}\cos(\omega t-\varphi)$$

$$\dot{\vec{x}} = \frac{F_0}{Z_m} e^{i(\omega t-\varphi)} = \frac{F_0}{Z_m}\cos(\omega t-\varphi) + i\frac{F_0}{Z_m}\sin(\omega t-\varphi)$$

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{i\omega F_0}{Z_m} e^{i(\omega t-\varphi)} = -\frac{\omega F_0}{Z_m}\sin(\omega t-\varphi) + i\frac{\omega F_0}{Z_m}\cos(\omega t-\varphi)$$



Άσκηση εκτός βιβλίου. Να βρεθούν οι διαφορές φάσης ανάμεσα στη διεγείρουσα δύναμη και τη μετατόπιση, ταχύτητα, επιτάχυνση, όταν $\omega \to 0,\ \omega = \omega_0,\ \omega \to \infty$, Να γίνουν τα αντίστοιχα διαγράμματα *δφ(ω)* καθώς και τα διαγράμματα φασόρων για κάθε *ω*.

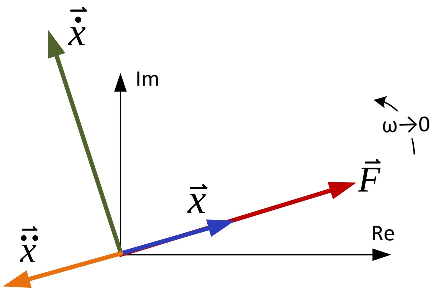
Λύση: Γνωρίζουμε ότι:

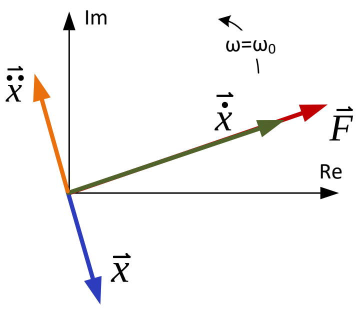
$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega m - \frac{s}{\omega}}{r}\right), \quad \text{Άρα:}$$

$$\omega \to 0, \tan\varphi \to -\infty, \varphi \to -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega = \omega_0, \tan\varphi = 0, \varphi = 0$$

$$\omega \to \infty, \tan\varphi \to +\infty, \varphi \to +\frac{\pi}{2}$$



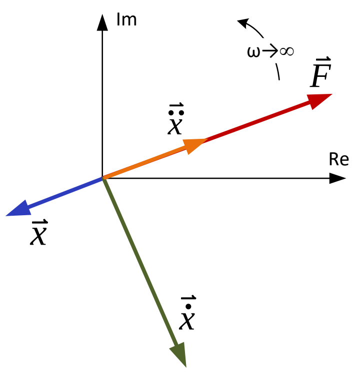


Μπορούμε να βρούμε πρώτα την $\Delta(\dot{\vec{x}},\vec{F}) = -\varphi$. Επομένως:

$$\omega \to 0,\ \varphi \to -\frac{\pi}{2},\ \Delta(\dot{\vec{x}},\vec{F}) = -\varphi \to \frac{\pi}{2}\ \text{(προηγείται η ταχύτητα)}$$

$$\omega = \omega_0,\ \varphi = 0,\ \Delta(\dot{\vec{x}},\vec{F}) = -\varphi = 0\ \text{(σε φάση)}$$

$$\omega \to \infty,\ \varphi \to +\frac{\pi}{2}, \Delta(\dot{\vec{x}},\vec{F}) = -\varphi \to -\frac{\pi}{2}\ \text{(προηγείται η δύναμη)}$$



Ξέρουμε ότι η μετατόπιση καθυστερεί κατά π/2 της ταχύτητας, άρα:

$$\omega \to 0,\ \varphi \to -\frac{\pi}{2},\ \Delta(\vec{x},\vec{F}) = -\varphi - \frac{\pi}{2} \to 0\ \text{(σε φάση)}$$

$$\omega = \omega_0,\ \varphi = 0,\ \Delta(\vec{x},\vec{F}) = -\varphi - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}\text{(προηγείται η δύναμη)}$$

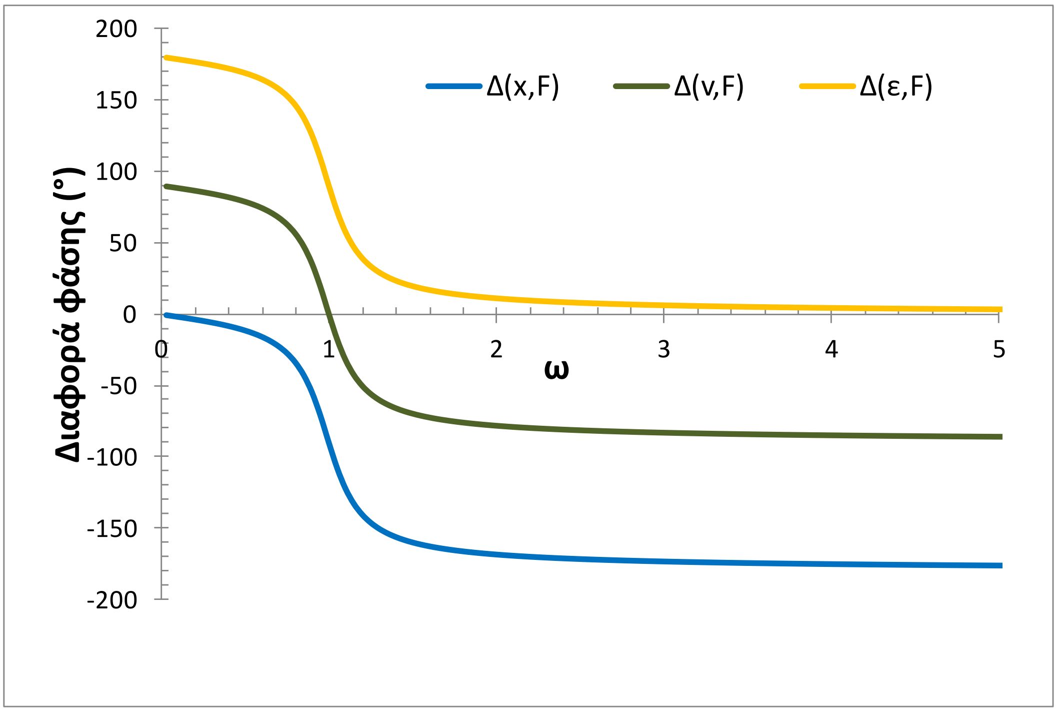
$$\omega \to \infty,\ \varphi \to +\frac{\pi}{2}, \Delta(\vec{x},\vec{F}) = -\varphi - \frac{\pi}{2} \to -\pi\,\text{(προηγείται η δύναμη)}$$

Ξέρουμε ότι η επιτάχυνση προηγείται κατά π/2 της ταχύτητας, άρα:

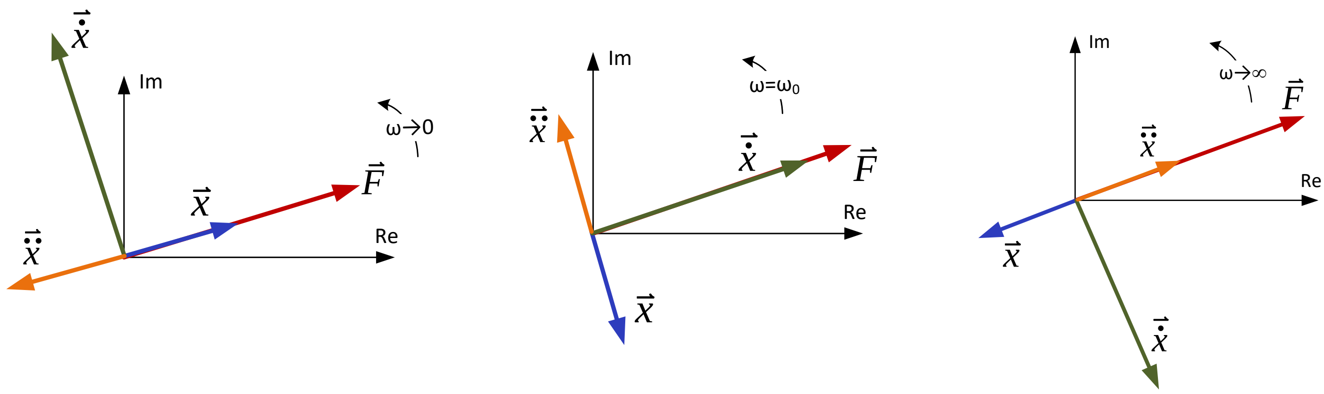
$$\omega \to 0,\ \varphi \to -\frac{\pi}{2},\ \Delta(\ddot{\vec{x}},\vec{F}) = -\varphi + \frac{\pi}{2} \to +\pi \,(\text{προηγείται η επιτάχυνση})$$

$$\omega = \omega_0,\ \varphi = 0,\ \Delta(\ddot{\vec{x}},\vec{F}) = -\varphi + \frac{\pi}{2} = +\frac{\pi}{2}\ (\text{προηγείται η επιτάχυνση})$$

$$\omega \to \infty,\ \varphi \to +\frac{\pi}{2}, \Delta(\ddot{\vec{x}},\vec{F}) = -\varphi + \frac{\pi}{2} \to 0 \,(\text{σε φάση})$$



Τα διαγράμματα για τιμές: *r=3, s=10, m=10, F_0=10, ω_0=1 [SI]*



Δείτε και το αρχείο EXCEL «Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις» στο e-class όπου στο φύλλο «Φάσορες» «ζωντανεύει» το διάγραμμα φασόρων με ενεργοποίηση των μακροεντολών και Ctrl+g.

Στο φύλλο «Συντονισμός» δοκιμάστε τιμές r=10, s=10, m=10, F_0=10, ω (συχνότητα της F_0)=2 [SI] και r=1, s=10, m=10, F_0=10, ω (συχνότητα της F_0)=2

Πρόβλημα 3.6 (2.6). Να βρείτε τη συχνότητα ω_A για την οποία μεγιστοποιείται το πλάτος A της μετατόπισης καθώς και το μέγιστο πλάτος A_{max}.

Λύση: Πρώτα βρίσκουμε την παράγωγο της εμπέδησης ως προς τη συχνότητα.

$$\frac{dZ_m}{d\omega} = \frac{d\sqrt{r^2+\left(\omega m-\frac{s}{\omega}\right)^2}}{d\left(r^2+\left(\omega m-\frac{s}{\omega}\right)^2\right)} \times \frac{d\left(r^2+\left(\omega m-\frac{s}{\omega}\right)^2\right)}{d\left(\omega m-\frac{s}{\omega}\right)} \times \frac{d\left(\omega m-\frac{s}{\omega}\right)}{d\omega} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{r^2+\left(\omega m-\frac{s}{\omega}\right)^2}} \times \cancel{2}\left(\omega m-\frac{s}{\omega}\right) \times \left(m+\frac{s}{\omega^2}\right) = \frac{\left(\omega m-\frac{s}{\omega}\right)\left(m+\frac{s}{\omega^2}\right)}{Z_m}$$

Για μεγιστοποίηση του πλάτους $A=\frac{F_0}{\omega Z_m}$, αρκεί:

$$\frac{d(\omega Z_m)}{d\omega}=0 \Rightarrow \frac{d(\omega Z_m)}{d\omega} = Z_m+\omega\frac{dZ_m}{d\omega} = Z_m + \frac{\omega\left(\omega m-\frac{s}{\omega}\right)\left(m+\frac{s}{\omega^2}\right)}{Z_m}$$ Επομένως:

$$\frac{d(\omega Z_m)}{d\omega}=0 \Rightarrow Z_m^2+\omega\left(\omega m-\frac{s}{\omega}\right)\left(m+\frac{s}{\omega^2}\right)=0 \Rightarrow r^2+\left(\omega m-\frac{s}{\omega}\right)^2+\left(\omega m-\frac{s}{\omega}\right)\left(\omega m+\frac{s}{\omega}\right)=0$$

$$\Rightarrow r^2+\omega^2m^2+\cancel{\frac{s^2}{\omega^2}}-2ms+\omega^2m^2-\cancel{\frac{s^2}{\omega^2}}=0 \Rightarrow r^2+2\omega^2m^2-2ms=0 \Rightarrow \omega_A^2=\frac{s}{m}-\frac{r^2}{2m^2}$$

Η σχέση μεταξύ των συχνοτήτων που έχουμε συναντήσει μέχρι τώρα είναι:

$$\omega_A=\sqrt{\frac{s}{m}-\frac{r^2}{2m^2}}<\omega'=\sqrt{\frac{s}{m}-\frac{r^2}{4m^2}}<\omega_0=\sqrt{\frac{s}{m}}$$

Το πλάτος A_{max} είναι: $A_{\max}=\frac{F_0}{\omega_A Z_m(\omega_A)}=\frac{F_0}{r\omega'}$. Απόδειξη:

$$\omega_A Z_m(\omega_A)=\omega_A\left(r^2+\left(\omega_A m-\frac{s}{\omega_A}\right)^2\right)^{1/2} = \omega_A\left(r^2+\underbrace{\left(\frac{m}{\omega_A}\omega_A^2-\frac{m}{\omega_A}\frac{s}{m}\right)^2}_{\text{κοινός παράγοντας το } m/\omega_A}\right)^{1/2} = \omega_A\left(r^2+\frac{m^2}{\omega_A^2}\left(\omega_A^2-\frac{s}{m}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$=\omega_A\left(r^2+\frac{m^2}{\omega_A^2}\left(\cancel{\frac{s}{m}}-\frac{r^2}{2m^2}-\cancel{\frac{s}{m}}\right)^2\right)^{1/2} = \omega_A\left(r^2+\frac{\cancel{m^2}}{\omega_A^2}\frac{r^4}{4m^{\cancel{4}2}}\right)^{1/2} = \omega_A\left(\underbrace{\frac{r^2}{\omega_A^2}\omega_A^2+\frac{r^2}{\omega_A^2}\frac{r^2}{4m^2}}_{\text{κοινός παράγοντας το } r^2/\omega_A^2}\right)^{1/2}$$

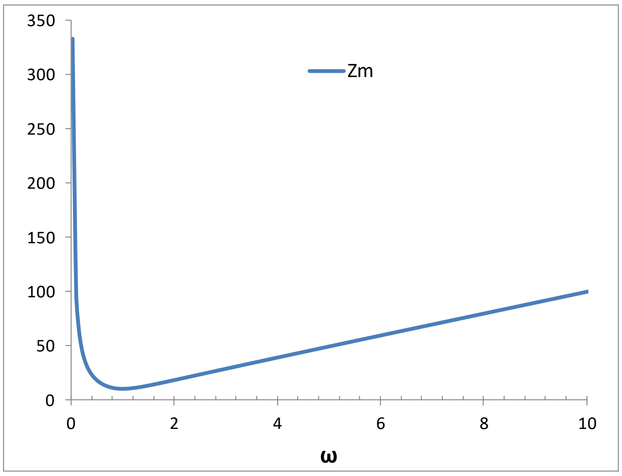
$$=\cancel{\omega_A}\frac{r}{\cancel{\omega_A}}\left(\omega_A^2+\frac{r^2}{4m^2}\right)^{1/2} = r\left(\frac{s}{m}-\frac{r^2}{2m^2}+\frac{r^2}{4m^2}\right)^{1/2} = r\left(\frac{s}{m}-\frac{r^2}{4m^2}\right)^{1/2} = r\omega'$$

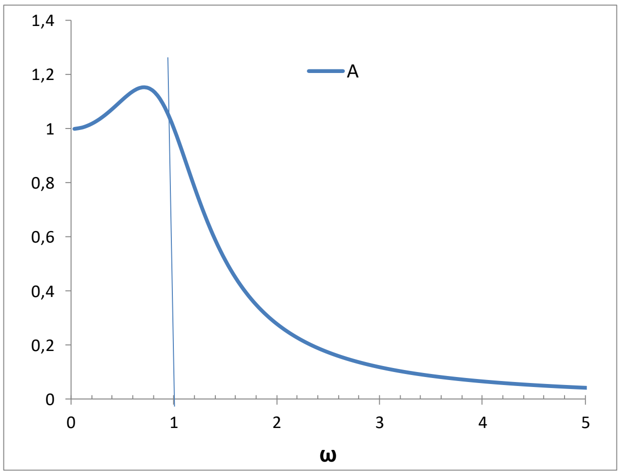
Άσκηση εκτός βιβλίου, περιλαμβάνει το πρόβλημα 3.7 **(2.7).** Να γίνει πίνακας με τις τιμές της μηχανικής εμπέδησης Z_m και των πλατών μετατόπισης, ταχύτητας και επιτάχυνσης, *(A, V, E αντίστοιχα)*, ενός ταλαντωτή σε εξαναγκασμένη ταλάντωση για τιμές της συχνότητας διέγερσης *ω: (0, ω_0, ∞)*. Να γίνουν τα διαγράμματα $Z_m(\omega)$, $A(\omega)$, $V(\omega)$ και $E(\omega)$.

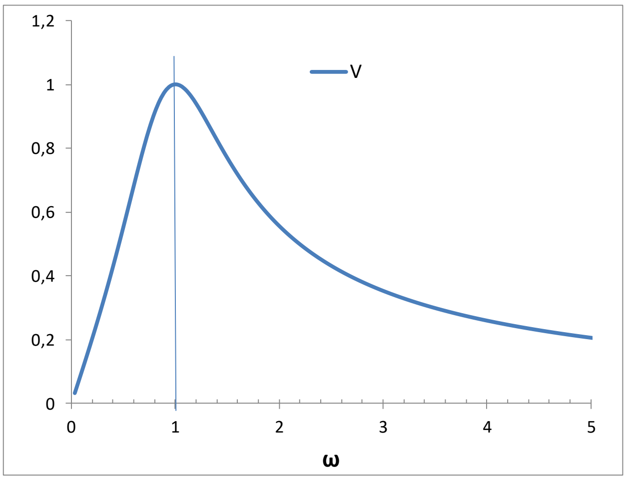
Λύση:

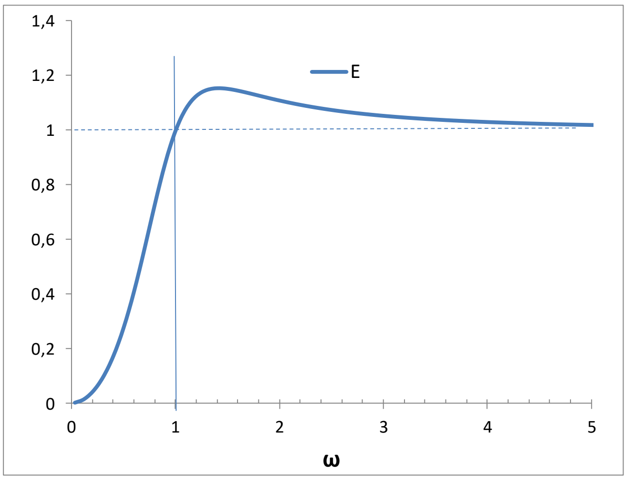
ω	ω→0	ω0	ω→∞
$Z_m=\left[r^2+\left(\omega m-\frac{s}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}$	$\to \frac{s}{\omega}$	r	$\to$ ωm
$A=\frac{F_0}{\omega Z_m}$	$\to \frac{F_0}{\cancel{\omega}\,(s/\cancel{\omega})}=\frac{F_0}{s}$	$\frac{F_0}{\omega_0 r}$, max : $\frac{F_0}{\omega' r}$	$\to 0$
$V=\frac{F_0}{Z_m}$	$\to 0$	$\frac{F_0}{r}$ (max)	$\to 0$
$E=\frac{\omega F_0}{Z_m}$	$\to 0$	$\frac{\omega_0 F_0}{r}$, max : $\frac{\omega'' F_0}{r}$	$\to \frac{F_0}{m}$

Τα διαγράμματα για τιμές: *r=10, s=10, m=10, F_0=10, ω_0=1 [SI]*









Δείτε και το αρχείο EXCEL «Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις» στο e-class

Πρόβλημα 3.5 (2.5). α) Να βρεθεί η συχνότητα στην οποία μεγιστοποιείται το πλάτος της επιτάχυνσης ταλαντωτή που εκτελεί εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. β) *Προαιρετικό.* Να βρείτε το μέγιστο πλάτος της επιτάχυνσης. γ) Να δείξετε ότι αν $r=\sqrt{sm}$ τότε το πλάτος της επιτάχυνσης στη συχνότητα συντονισμού ταχύτητας $\omega_0 F_0 / r$ είναι ίσο με F_0 / m.

Απάντηση:

$$E=\frac{\omega F_0}{Z_m}.\ \text{Αρκεί}\ \frac{d\left(\frac{Z_m}{\omega}\right)}{d\omega}=0 \Rightarrow .... \Rightarrow \omega_E^2=\frac{2s^2}{2sm-r^2}.$$

α) Αντιστρέφοντας: $\frac{1}{\omega_E^2}=\frac{m}{s}-\frac{r^2}{2s^2} \Rightarrow \frac{1}{\omega_E^2}=\frac{1}{\omega_0^2}-\frac{r^2}{2s^2}$

Επομένως: $\omega_E > \omega_0$

β) $Z_m(\omega_E)=\frac{r\omega_E}{\omega''}$, $E_{\max}=\frac{\omega'' F_0}{r}$, όπου: $\frac{1}{\omega''^2}=\frac{1}{\omega_0^2}-\frac{r^2}{4s^2}$

γ) Εύκολο, $\omega_0=\sqrt{\frac{s}{m}}$ κλπ.

Παράδειγμα: Οι δύο όροι της μετατόπισης, «άεργη» μετατόπιση και μετατόπιση «απωλειών»

Η μετατόπιση για συνημιτονοειδή διέγερση $F=F_0\cos\omega t$ είναι $x=\frac{F_0}{\omega Z_m}\sin(\omega t-\varphi)$. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$, η μετατόπιση μπορεί να γραφεί:

$$x=\frac{F_0}{\omega Z_m}\sin(\omega t-\varphi)=\frac{F_0}{\omega Z_m}\sin\omega t\cos\varphi-\frac{F_0}{\omega Z_m}\cos\omega t\sin\varphi,\ \text{όμως:}\ \cos\varphi=\frac{r}{Z_m},\ \sin\varphi=\frac{X_m}{Z_m}=\frac{\omega m-\frac{s}{\omega}}{Z_m}$$

Επομένως, η μετατόπιση χωρίζεται σε δύο συνιστώσες:

$$x=\underbrace{\frac{F_0 r}{\omega Z_m^2}\sin\omega t}\ \underbrace{-\frac{F_0 X_m}{\omega Z_m^2}\cos\omega t}$$

$\frac{F_0 r}{\omega Z_m^2}\sin\omega t$	$-\frac{F_0 X_m}{\omega Z_m^2}\cos\omega t$
↓	↓
καθυστερεί π/2 ως προς F	σε αντίθεση φάσης με F αν $X_m>0$, σε φάση αν $X_m<0$
επικρατεί όταν $X_m=0$	επικρατεί όταν r=0
"Απωλειών"	"Άεργη"

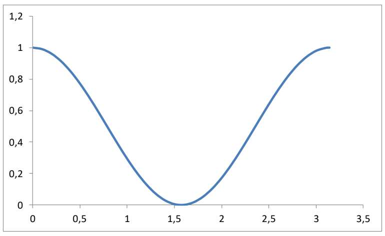
Παραγωγίζω κάθε όρο ως προς το χρόνο για να βρώ τις συνιστώσες της ταχύτητας:

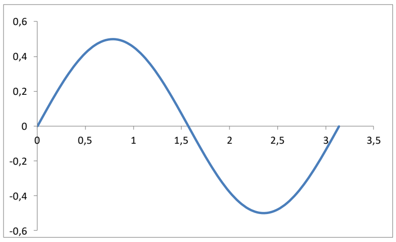
$$\dot{x} = \underbrace{\frac{F_0\, r}{Z_m^2}\cos\omega t}_{\substack{\downarrow \\ \text{σε φάση με την F} \\ \text{επικρατεί όταν } X_m = 0 \\ \text{"Απωλειών"}}} \qquad + \underbrace{\frac{F_0\, X_m}{Z_m^2}\sin\omega t}_{\substack{\downarrow \\ \text{καθυστερεί } \pi/2 \text{ ως προς F αν } X_m > 0, \text{προηγείται } \pi/2 \text{ αν } X_m < 0 \\ \text{επικρατεί όταν r=0} \\ \text{"Άεργη"}}}$$

Η στιγμιαία ισχύς που προσφέρεται από τη δύναμη στον ταλαντωτή είναι: $P = F \cdot \dot{x}$, επομένως παίρνω:

$$F \cdot \dot{x} = F_0 \cos\omega t \cdot \frac{F_0\, r}{Z_m^2}\cos\omega t \qquad + F_0 \cos\omega t \cdot \frac{F_0\, X_m}{Z_m^2}\sin\omega t \Rightarrow$$

$$F \cdot \dot{x} = \underbrace{\frac{F_0^2\, r}{Z_m^2}\cos^2\omega t}_{\substack{\downarrow \\ \text{"Ισχύς Απωλειών"}}} \qquad \underbrace{+ \frac{F_0^2\, X_m}{Z_m^2}\cos\omega t \sin\omega t = \frac{F_0^2\, X_m}{Z_m^2}\left(\frac{1}{2}\sin 2\omega t\right)}_{\substack{\downarrow \\ \text{"Άεργος Ισχύς"}}}$$





Η «μέση» ισχύς που προσφέρεται από τη δύναμη στον ταλαντωτή μέσα σε μία περίοδο είναι:

$$P_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt \;\text{ και επειδή, }\; \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\omega t\,dt = \frac{1}{2},\; \frac{1}{T}\int_0^T \cos\omega t \sin\omega t\,dt = 0 \;\text{ θα πάρουμε:}$$

$$P_{av} = \underbrace{\frac{F_0^2\, r}{2Z_m^2} = \frac{F_0^2}{2Z_m}\cos\varphi}_{\substack{\downarrow \\ \text{"Ισχύς Απωλειών"}}} \qquad \underbrace{+ \frac{F_0^2\, X_m}{Z_m^2}\int_0^T \cos\omega t \sin\omega t\,dt = 0}_{\substack{\downarrow \\ \text{"Άεργος Ισχύς"}}}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η άεργη συνιστώσα δε συνεισφέρει στην απορρόφηση ισχύος που παρέχεται από τη δύναμη στον ταλαντωτή. Στη διάρκεια κάθε κύκλου, όση ενέργεια αποθηκεύεται στο ελατήριο και τη μάζα, αποδίδεται πάλι πίσω στη διεγείρουσα δύναμη χωρίς απώλειες.

Άσκηση εκτός βιβλίου. Να βρείτε σχέσεις για τη στιγμιαία και τη μέση ισχύ που καταναλώνεται σε κάθε στοιχείο *(r, s, m)* του εξαναγκασμένου αρμονικού ταλαντωτή με διέγερση $F = F_0 \cos\omega t$ **.**

Απάντηση: $P_r = F_r \cdot \dot{x} = (r\dot{x})\dot{x} = r\frac{F_0^2}{Z_m^2}\cos^2(\omega t - \varphi)$, $P_{r,ave} = r\frac{F_0^2}{Z_m^2}\frac{1}{T}\cancel{\int_0^T \cos^2(\omega t - \varphi)\,dt}^{\frac{T}{2}} = \frac{F_0^2 r}{2Z_m^2} = P_{ave}$. Ομοίως,

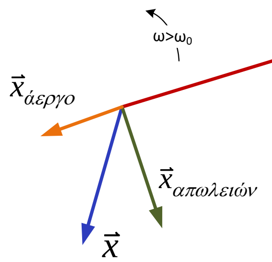
$P_s = (sx)\dot{x} = \frac{s}{\omega}\frac{F_0^2}{Z_m^2}\sin(\omega t - \varphi)\cos(\omega t - \varphi)$, $P_m = (m\ddot{x})\dot{x} = -m\omega\frac{F_0^2}{Z_m^2}\sin(\omega t - \varphi)\cos(\omega t - \varphi)$ $P_{s,ave} = P_{m,ave} = 0$

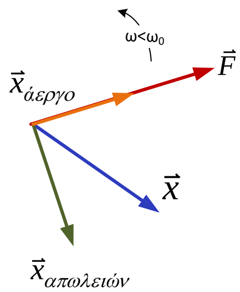
Παράδειγμα: Το «άεργο» πλάτος και το πλάτος «απωλειών» της μετατόπισης.

Αναλύοντας τη μετατόπιση σε δύο συνιστώσες: $x=\dfrac{F_0\,r}{\omega Z_m^2}\sin\omega t-\dfrac{F_0\,X_m}{\omega Z_m^2}\cos\omega t$, μπορούμε να ορίσουμε τα πλάτη τους ως $A_{απωλειών}=\dfrac{F_0\,r}{\omega Z_m^2}$, $A_{άεργο}=-\dfrac{F_0\,X_m}{\omega Z_m^2}$, όπου $X_m=\omega m-\dfrac{s}{\omega}$, $Z_m=\sqrt{r^2+X_m^2}$.

Οι δύο συνιστώσες της μετατόπισης έχουν διαφορά φάσης π/2 μεταξύ τους, άρα μπορούν να θεωρηθούν ως φάσορες με μέτρο το πλάτος κάθε συνιστώσας, οπότε το συνολικό πλάτος της μετατόπισης είναι: $A=\sqrt{A_{απωλειών}^2+A_{άεργο}^2}$ **(να αποδειχτεί).** Για να φαίνεται η εξάρτησή του από την ω, το X_m μπορεί να γραφεί ως: $X_m=\omega m-\dfrac{s}{\omega}=\omega^2\left(\dfrac{m}{\omega}\right)-\dfrac{s}{m}\left(\dfrac{m}{\omega}\right)=\dfrac{m}{\omega}\left(\omega^2-\omega_0^2\right)$, οπότε προκύπτει ότι:

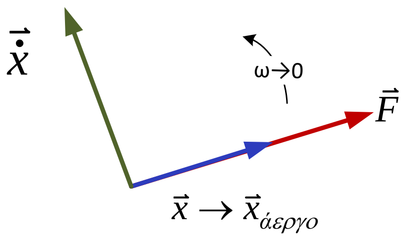
$\omega>\omega_0: X_m>0\Rightarrow\Delta\varphi(\vec{x}_{άεργο},\vec{F})=\pi$ $\quad\omega<\omega_0: X_m<0\Rightarrow\Delta\varphi(\vec{x}_{άεργο},\vec{F})=0$, τα διαγράμματα φασόρων είναι:

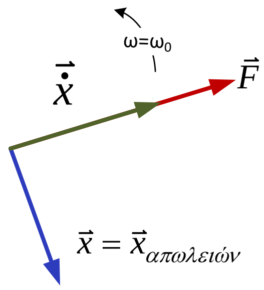




Με οριακές περιπτώσεις:

$\omega\to 0,\ x\to x_{άεργο},\ \dot{x}$ προηγείται π/2 της F $\qquad\omega=\omega_0,\ x=x_{απωλειών},\ \dot{x}$,F σε φάση





Με $X_m=\omega m-\dfrac{s}{\omega}=\omega^2\left(\dfrac{m}{\omega}\right)-\dfrac{s}{m}\left(\dfrac{m}{\omega}\right)=-\dfrac{m}{\omega}\left(\omega_0^2-\omega^2\right)$ και $Z_m=\sqrt{r^2+X_m^2}$ παίρνουμε για τα πλάτη:

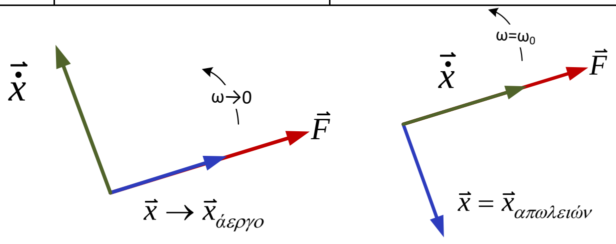
$$A_{απωλειών}=\frac{F_0\,r}{\omega Z_m^2}=\frac{F_0\,r}{\omega\left(r^2+X_m^2\right)}=\frac{F_0\,r}{\omega\left(r^2+\frac{m^2}{\omega^2}\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2\right)}=\frac{F_0\,\omega r}{\omega^2\left(r^2+\frac{m^2}{\omega^2}\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2\right)}=\frac{F_0\,\omega r}{\omega^2r^2+m^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}$$

$$A_{άεργο}=-\frac{F_0\,X_m}{\omega Z_m^2}=-\frac{F_0\,X_m}{\omega\left(r^2+X_m^2\right)}=\cancel{-}\frac{F_0\left(\cancel{-}\frac{m}{\omega}\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\right)}{\omega\left(r^2+\frac{m^2}{\omega^2}\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2\right)}=\frac{F_0\,m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{\omega^2r^2+m^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι τα πλάτη είναι της μορφής $\frac{A}{A^2+B^2}$, και $\frac{B}{A^2+B^2}$. Η συνάρτηση που περιγράφει το πλάτος απωλειών είναι παρόμοια με την «Λορενζιανή» (Lorenzian) συνάρτηση, (δείτε και την ιστοσελίδα https://mathworld.wolfram.com/LorentzianFunction.html) και χαρακτηρίζει τα φαινόμενα συντονισμού, σε αντίθεση με την «Γκαουσιανή» που περιγράφει τυχαία σφάλματα.

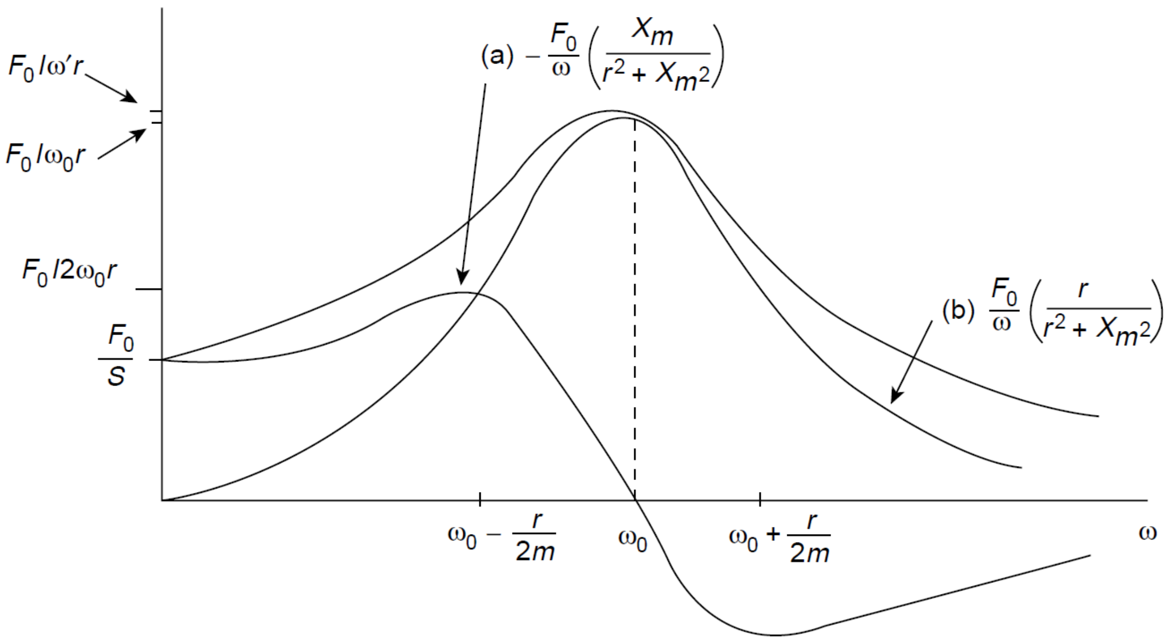
Οι οριακές τιμές των πλατών δίδονται από:

ω	ω→0	ω0	ω→∞
$A_{απωλειών} = \frac{F_0\,\omega r}{\omega^2 r^2 + m^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}$	$\to 0$	$\frac{F_0}{\omega_0 r}$	$\to 0$
$A_{άεργο} = \frac{F_0\, m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{\omega^2 r^2 + m^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}$	$\to \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{s}$	0	$\to 0$ (<0)

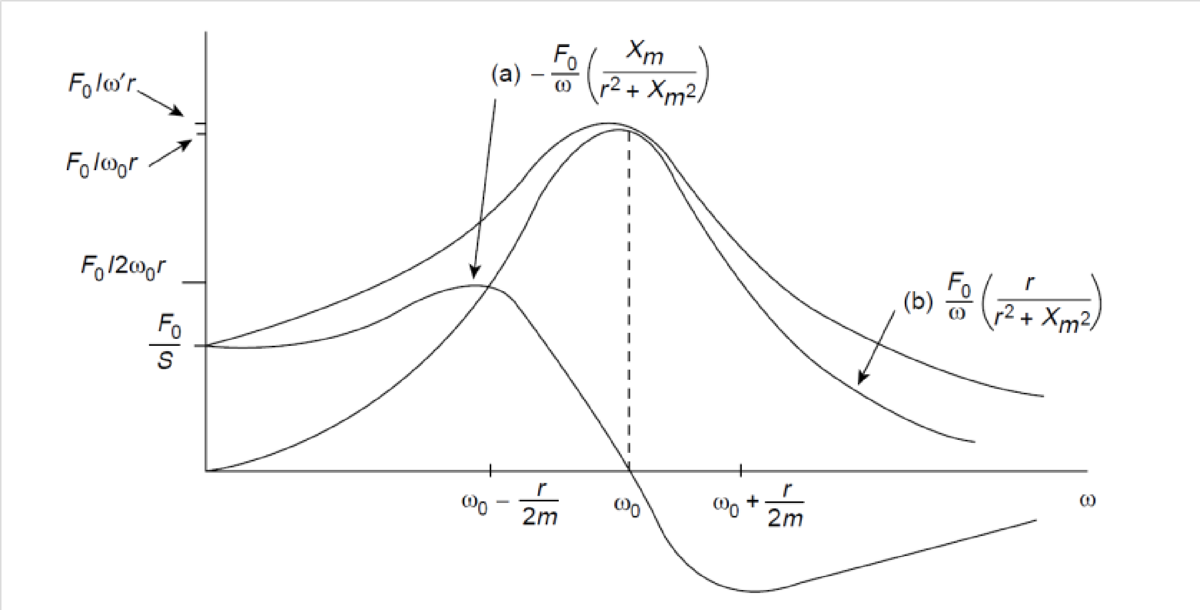


Φάσορες:

Διάγραμμα:



Πρόβλημα 3.8 (2.8): Να αποδειχτεί ότι στο παρακάτω διάγραμμα, η καμπύλη (α) έχει μέγιστο ίσο με $\frac{F_0}{2\omega_0 r}$ για $\omega=\omega_0-\frac{r}{2m}$ και ελάχιστο $-\frac{F_0}{2\omega_0 r}$ για $\omega=\omega_0+\frac{r}{2m}$ στην περίπτωση ασθενούς απόσβεσης.



Λύση: Εφόσον η r είναι μικρή, θα θεωρήσουμε τους όρους r^2, r^3 κλπ αμελητέους. Για $\omega=\omega_0+r/2m$:

Γράφουμε: $\omega_0^2-\omega^2=\left(\omega_0+\omega\right)\left(\omega_0-\omega\right)=(2\omega_0+\frac{r}{2m})(-\frac{r}{2m})=-\frac{\omega_0 r}{m}-\cancelto{0}{\frac{r^2}{4m^2}}\approx-\frac{\omega_0 r}{m}$. Επίσης:

$\omega^2=\omega_0^2+\cancelto{0}{\frac{r^2}{4m^2}}+\frac{\omega_0 r}{m}\approx\omega_0^2+\frac{\omega_0 r}{m}$. Αντικαθιστούμε στην $A_{άεργο}=\frac{F_0 m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{\omega^2 r^2+m^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}$:

$$A_{άεργο}=\frac{F_0 m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{\omega^2 r^2+m^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}=\frac{F_0}{\dfrac{\omega^2 r^2}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}+m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}=\frac{F_0}{\dfrac{\left(\omega_0^2+\frac{\omega_0 r}{m}\right)r^2}{\cancel{m}\left(-\frac{\omega_0 r}{\cancel{m}}\right)}+\cancel{m}\left(-\frac{\omega_0 r}{\cancel{m}}\right)}=$$

$$=\frac{F_0}{\dfrac{\omega_0^2 r^2}{-\omega_0 r}+\dfrac{\omega_0 r^3}{-m\omega_0 r}-\omega_0 r}=\frac{F_0}{-\omega_0 r-\cancelto{0}{\frac{r^2}{m}}-\omega_0 r}\Rightarrow A_{άεργο}\approx-\frac{F_0}{2\omega_0 r}$$

Να λύσετε για $\omega=\omega_0-\frac{r}{2m}$.

Άσκηση εκτός βιβλίου, «ταλαντωτής χωρίς απόσβεση». Παρόμοια με τα προβλήματα 3.3 και 3.4 (2.3 και 2.4) αλλά με συνημιτονοειδή διέγερση. Ταλαντωτής με μάζα *m*, σταθερά ελατηρίου *s* και χωρίς απόσβεση *(r=0)* εκτελεί ταλαντώσεις υπό την επίδραση δύναμης $F=F_0 \cos\omega t$. α) Να λύσετε διανυσματικά τη διαφορική εξίσωση για τη μόνιμη κατάσταση και να βρείτε τη γενική λύση. β) Αν εκκινεί από την ηρεμία χωρίς αρχική ταχύτητα $(x=0,\ \dot{x}=0)$, να δείξετε ότι εκτελεί μεταβατικά διακροτήματα. γ) Αν η συχνότητα ω είναι περίπου ίση με την ω_0 ($\omega=\omega_0+\Delta\omega$, *όπου* $\Delta\omega^2\approx 0$) να δείξετε ότι το πλάτος ταλάντωσης θα αυξάνεται με το χρόνο.

Λύση:

α) Η διαφορική εξίσωση είναι $m\ddot{\vec{x}}+s\vec{x}=F_0 e^{i\omega t}$. Δοκιμάζω λύση: $\vec{x}=\vec{A}e^{i\omega t}$, $\ddot{\vec{x}}=-\omega^2\vec{A}e^{i\omega t}$ και παίρνω:

$$m\ddot{\vec{x}}+s\vec{x}=F_0 e^{i\omega t} \Rightarrow -\omega^2 m\vec{A}\cancel{e^{i\omega t}}+s\vec{A}\cancel{e^{i\omega t}}=F_0\cancel{e^{i\omega t}} \Rightarrow \vec{A}=\frac{F_0}{s-\omega^2 m}=\frac{F_0}{m(s/m-\omega^2)}=\frac{F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}$$

Επομένως το *A* είναι πραγματικός αριθμός και η μετατόπιση είναι σε φάση με τη δύναμη. Παίρνοντας το πραγματικό μέρος, έχω: $x_{\mu o\nu}=\dfrac{F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\cos\omega t$.

Ο μεταβατικός όρος δίδεται από την (σελίδα 75, 6η έκδοση Pain, ή εξίσωση 1.139, 3η έκδοση):

$$x_{\mu\varepsilon\tau}=e^{-pt}\left(C_1 e^{i\omega' t}+C_2 e^{-i\omega' t}\right),\ \text{όπου:}\quad p=\frac{r}{2m},\ \omega'=\sqrt{\frac{s}{m}-\frac{r^2}{4m^2}}.\qquad \text{Εδώ, } p=0,\ \ \omega'=\sqrt{\frac{s}{m}}=\omega_0 \text{ άρα:}$$

$$x_{\mu\varepsilon\tau}=C_1 e^{i\omega_0 t}+C_2 e^{-i\omega_0 t}.\ \text{Θέτω: } C_1=\frac{A+B/i}{2},\ C_2=\frac{A-B/i}{2}\quad \text{και έχω:}\quad x_{\mu\varepsilon\tau}=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$$

Ο μεταβατικός όρος δεν εξασθενεί (έχει σταθερό πλάτος) και η πλήρης λύση είναι:

$$x=x_{\mu o\nu}+x_{\mu\varepsilon\tau}=\frac{F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\cos\omega t+A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t\,.$$

β) Η ταχύτητα είναι: $\dot{x}=\dfrac{-\omega F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\sin\omega t-\omega_0 A\sin\omega_0 t+\omega_0 B\cos\omega_0 t$.

Με αρχικές συνθήκες $(x=0,\ \dot{x}=0)$ παίρνω:

$$x(0)=0\Rightarrow A=-\frac{F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)},\quad \dot{x}(0)=0\Rightarrow B=0\quad \text{άρα}\quad x=\frac{F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\left(\cos\omega t-\cos\omega_0 t\right).$$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα: $\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\beta+\alpha}{2}\right)$ παίρνω:

$$x=\frac{2F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\sin\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}t\right),$$ η οποία περιγράφει μεταβατικά διακροτήματα που δεν εξασθενούν με το χρόνο.

γ) Αν ισχύει: ω=ω$_0$+Δω, όπου Δω^2≈ 0, τότε:

$$\omega_0^2-\omega^2=(\omega_0-\omega)(\omega_0+\omega)=-\Delta\omega(2\omega_0+\Delta\omega)=-2\omega_0\Delta\omega-\cancelto{0}{\Delta\omega^2}\approx-2\omega_0\Delta\omega$$

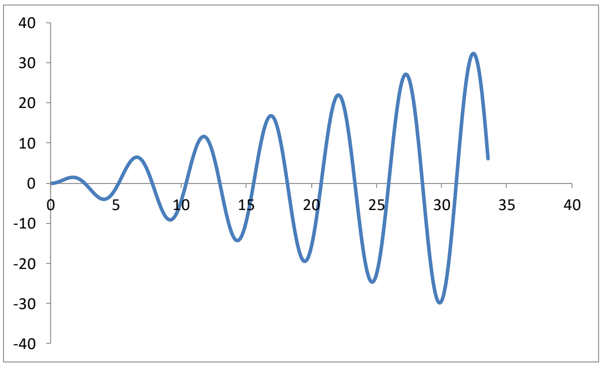
Επίσης, στην αρχή των ταλαντώσεων, όταν t είναι μικρό,

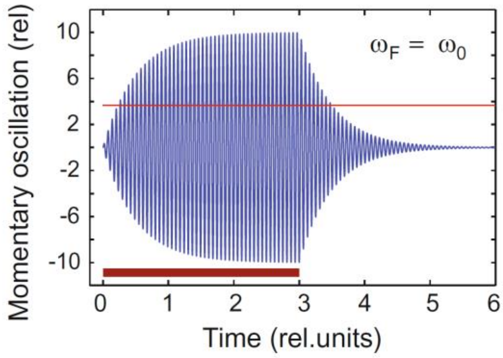
$$\cos\omega t=\cos(\omega_0+\Delta\omega)t=\cos\omega_0 t\,\cancelto{1}{\cos\Delta\omega t}-\sin\omega_0 t\,\cancelto{\Delta\omega t}{\sin\Delta\omega t}\approx\cos\omega_0 t-\Delta\omega t\sin\omega_0 t$$

Οπότε παίρνουμε:

$$x=\frac{F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\left(\cos\omega t-\cos\omega_0 t\right)\approx\frac{F_0}{\cancel{-\Delta\omega}\,2\omega_0 m}\left(\cancel{\cos\omega_0 t}\;\cancel{-\Delta\omega}\,t\sin\omega_0 t-\cancel{\cos\omega_0 t}\right)=\frac{F_0\,t}{2\omega_0 m}\sin\omega_0 t$$

Επομένως το πλάτος $\dfrac{F_0\,t}{2\omega_0 m}$ αυξάνεται με το χρόνο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα αριστερά.





Δεξιά φαίνεται η ίδια περίπτωση για ταλαντωτή με μη μηδενική απόσβεση. Η διέγερση σταματά τη χρονική στιγμή *t=3* και ο ταλαντωτής επιστρέφει σταδιακά στην ηρεμία *[Arnt Inge Vistnes,"Physics of Oscillations and Waves. With use of Matlab and Python", Springer, 2018, ISBN 978-3-319-72313-6]*

Πρόβλημα 3.3 (2.3). Ταλαντωτής με μάζα *m*, σταθερά ελατηρίου *s* και χωρίς απόσβεση *(r=0)* εκτελεί ταλαντώσεις υπό την επίδραση δύναμης $F=F_0\sin\omega t$. Να λύσετε διανυσματικά τη διαφορική εξίσωση για τη μόνιμη κατάσταση και να βρείτε τη γενική λύση.

Απάντηση:

$$x_{\mu o\nu}=\frac{F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\sin\omega t\;,\;x_{\mu o\nu}+x_{\mu\varepsilon\tau}=\frac{F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\sin\omega t+A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t$$

Πρόβλημα 3.4 (2.4). Αν ο ταλαντωτής του προηγούμενου προβλήματος εκκινεί από την ηρεμία χωρίς αρχική ταχύτητα $(x=0,\ \dot{x}=0)$, να βρείτε κατάλληλη σχέση για τη μετατόπιση. Αν η συχνότητα *ω* είναι περίπου ίση με την ω_0 *(ω=ω$_0$+Δω, όπου Δω^2≈0)* να δείξετε ότι το πλάτος ταλάντωσης θα αυξάνεται με το χρόνο.

Απάντηση: $x = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right)$. Αν ισχύει: $\omega=\omega_0+\Delta\omega$, όπου $\Delta\omega^2 \approx 0$, τότε:

$x \approx \frac{F_0}{2m\omega_0^2}\left(\sin\omega_0 t - \omega_0 t\cos\omega_0 t\right)$.