ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ. *Κάθε θέμα είναι αξίας 2 μονάδων*

ΘΕΜΑ 1: Αρμονικός ταλαντωτής με μάζα m, σκληρότητα ελατηρίου s και χωρίς απόσβεση ($r=0$) εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση υπό την επίδραση της διεγείρουσας δύναμης $F(t)=F_0 \sin\omega t$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση μετατόπισης για τη μόνιμη κατάσταση.

β) Αν η εξίσωση μετατόπισης για τη μεταβατική κατάσταση είναι $x_{\mu\varepsilon\tau} = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}, \quad (\omega_0^2 = s/m)$

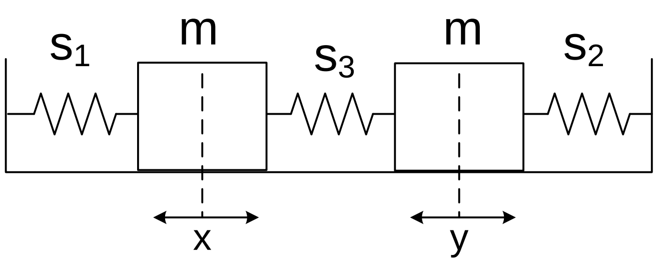
να αποδειχτεί ότι η γενική λύση είναι: $x(t) = \dfrac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin\omega t + A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$.

γ) Αν ο ταλαντωτής εκκινεί από την ηρεμία με μηδενική αρχική ταχύτητα $(x(0)=0, \quad \dot{x}(0)=0)$ να δείξετε ότι το πλάτος ταλάντωσης αυξάνεται συνεχώς κατά τις πρώτες περιόδους, όταν $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, όπου $\Delta\omega$ μικρό.

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθούν οι αρχικές συνθήκες για να απλοποιηθεί η γενική λύση. Στη συνέχεια να αντικατασταθεί η ω με $\omega_0 + \Delta\omega$. Θεωρείστε ότι $\sin\Delta\omega t \approx \Delta\omega t$ και ότι $\cos\Delta\omega t \approx 1$.

ΛΥΣΗ: α) Η λύση βρίσκεται στην παράγραφο 2.4 του βιβλίου Pain, εξίσωση 2.32, θέτοντας $r=0$. Θα πρέπει πρώτα να λυθεί η διαφορική εξίσωση στη μόνιμη κατάσταση με χρήση μιγαδικών μεταβλητών. β) Πρόβλημα 2.3 βιβλίου Pain. Έχει λυθεί στις παραδόσεις. γ) Πρόβλημα 2.4 βιβλίου Pain. Έχει λυθεί στις παραδόσεις.

ΘΕΜΑ 2: Δίδεται σύστημα δύο ίσων μαζών m συζευγμένων με ελατήριο σκληρότητας s_3, οι οποίες κινούνται χωρίς τριβή και χωρίς απόσβεση σε οριζόντιο επίπεδο. Το σύστημα των μαζών είναι προσδεμένο σε ακλόνητους τοίχους με πλευρικά ελατήρια s_1, s_2, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



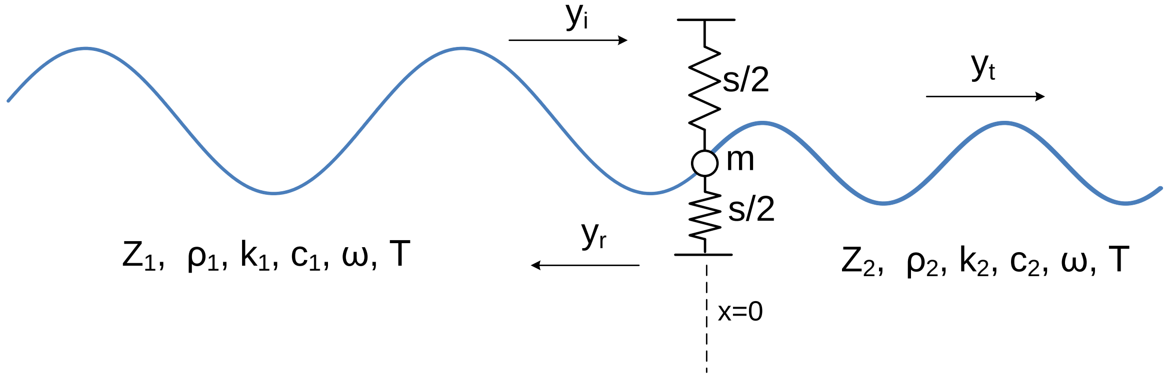
α) Να γραφούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης της κάθε μάζας.

β) Για $s_1=s_2=s$ να βρεθούν οι κανονικές συντεταγμένες και οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης. Πώς επηρεάζονται οι συχνότητες από τη σκληρότητα του ελατηρίου σύζευξης; Σε ποια περίπτωση ισχύει η προσέγγιση της «ασθενούς σύζευξης»;

γ) Για $s_1=0$, $s_2=s_3=s$, να βρεθούν οι συχνότητες και οι λόγοι των πλατών των κανονικών τρόπων ταλάντωσης. *Υπόδειξη:* Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της συστηματικής αναζήτησης των τρόπων.

ΛΥΣΗ: α) $m\ddot{x} + s_1 x + s_3(x-y) = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad m\ddot{y} + s_2 y + s_3(y-x) = 0$ β) Παράγραφός 3.2 βιβλίου Pain με αντικατάσταση των g/l με s/m. γ) Ίδια με το πρόβλημα 3.5 βιβλίου Pain. Έχει λυθεί στις παραδόσεις.

ΘΕΜΑ 3: Χορδή εμπέδησης Z_1 συνδέεται με άλλη χορδή εμπέδησης Z_2 στο σημείο $x=0$ μέσω μάζας m, η οποία συγκρατείται από δύο ίδια ελατήρια σκληρότητας $s/2$ το καθένα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Οι δύο χορδές έχουν ημι-άπειρο μήκος και τείνονται με τάση T. Ένα εγκάρσιο κύμα συχνότητας ω που διαδίδεται από τα αριστερά προς τα δεξιά ανακλάται και διέρχεται μερικώς όταν φτάνει στο $x=0$.

α) Να γραφούν οι οριακές συνθήκες στο σημείο $x=0$.
β) Να βρεθούν οι συντελεστές μετάδοσης και ανάκλασης πλάτους (t_A, r_A *αντίστοιχα)* καθώς και οι συντελεστές μετάδοσης και ανάκλασης ενέργειας (t, r *αντίστοιχα)* συναρτήσει των Z_1, Z_2, m, s, ω.
γ) Να δείξετε ότι όταν $m=0$, $Z_1=Z_2=\rho c$ και A_1, A_2, B_1 τα πλάτη του προσπίπτοντος, μεταδιδόμενου και ανακλώμενου κύματος αντίστοιχα, το A_2 προηγείται του A_1 κατά φ και το B_2 προηγείται του A_1 κατά $\pi/2+\varphi$, όπου: $\tan\varphi = \dfrac{s}{2\rho c\omega}$.
δ) Τι είδους φίλτρο αποτελεί το σύστημα του γ) ερωτήματος;

ΛΥΣΗ:
α) Οι εξισώσεις μετατόπισης για το προσπίπτον, ανακλώμενο και διερχόμενο κύμα είναι:

$$y_i = A_1 e^{i(\omega t - k_1 x)},\quad y_r = B_1 e^{i(\omega t + k_1 x)}\ ,\quad y_t = A_2 e^{i(\omega t - k_2 x)} \tag{1}$$

Η οριακή συνθήκη για τη μετατόπιση είναι:

$$y_i(t,0) + y_r(t,0) = y_t(t,0) \Rightarrow A_1 + B_1 = A_2\ (2a) \qquad ή\ \ 1 + r_A = t_A\ (2b)$$

Για τη δύναμη ισχύει:

$$-T\frac{\partial}{\partial x}(y_i + y_r)|_{x=0} \ = \ m\frac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}|_{x=0} + 2(\frac{s}{2})y_t|_{x=0} - T\frac{\partial y_t}{\partial x}|_{x=0} \tag{3}$$

Η φυσική σημασία της παραπάνω σχέσης είναι: Η εγκάρσια συνιστώσα της τάσης της χορδής *-1-* $-T\dfrac{\partial}{\partial x}(y_i + y_r)|_{x=0}$ ενεργεί ως διεγείρουσα δύναμη στη μάζα η οποία εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση $F = m\dfrac{\partial^2 y_t}{\partial t^2}|_{x=0} + 2(\dfrac{s}{2})y_t|_{x=0}$ και θέτει σε ταλάντωση τη χορδή *-2-* με εγκάρσια συνιστώσα τάσης $-T\dfrac{\partial y_t}{\partial x}|_{x=0}$ μέσω της οποίας διαδίδεται το κύμα.

β) Αντικαθιστώντας τις μετατοπίσεις της (1) στην (3) και λύνοντας έχουμε:

$$ik_1TA_1 - ik_1TB_1 = ii\omega^2 mA_2 + sA_2 + ik_2TA_2$$

$$\acute{o}\mu\omega\varsigma\ \ k_1 = \frac{\omega}{c_1},\ T = \rho_1 c_1^2,\ Z_1 = \rho_1 c_1 \Rightarrow k_1 T = \omega Z_1\ \ \kappa\alpha\iota\ \ k_2 T = \omega Z_2\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \ \pi\alpha\acute{\iota}\rho\nu\omega:$$

$$Z_1A_1 - Z_1B_1 = Z_2A_2 + i\left[\omega m - \frac{s}{\omega}\right]A_2 = Z_2A_2 + iX_mA_2,\ \acute{o}\pi o\upsilon\ X_m = \omega m - \frac{s}{\omega},\ \ \eta\ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\delta\rho\alpha\sigma\eta\ \tau\eta\varsigma\ \mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\varsigma$$

Πολλαπλασιάζω την (2α) με Z_1 και προσθέτω στην παραπάνω: $t_A = \dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{2Z_1}{Z_1 + Z_2 + iX_m}$ (4)

Από την εξίσωση (2b) ισχύει: $r_A = t_A - 1 \Rightarrow r_A = \dfrac{B_1}{A_1} = \dfrac{Z_1 - Z_2 - iX_m}{Z_1 + Z_2 + iX_m}$ (5)

Για τους συντελεστές ενέργειας:

$$t = \frac{Z_2}{Z_1} t_A t_A^* = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2 + X_m^2} \quad (6)$$

$$r = r_A r_A^* = \frac{(Z_1-Z_2)^2 + X_m^2}{(Z_1+Z_2)^2 + X_m^2} \quad (7)$$

γ) Όταν $m=0$, $Z_1=Z_2=\rho c$:

$$t_A = \frac{A_2}{A_1} = \frac{2\rho c}{2\rho c - i\,{}^{s}\!/_{\omega}} = \frac{1}{1-iq}$$

$$r_A = \frac{B_1}{A_1} = \frac{i\,{}^{s}\!/_{\omega}}{2\rho c - i\,{}^{s}\!/_{\omega}} = \frac{iq}{1-iq},\ \acute{o}\pi o\upsilon\ \ q = \frac{s}{2\rho c\omega}$$

Θέτω $\tan\varphi = q = \dfrac{s}{2\rho c\omega}$ και έχω:

$$t_A = \frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{1 - i\tan\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} = \cos\varphi\ e^{i\varphi}$$

$$r_A = \frac{B_1}{A_1} = \frac{iq}{1-iq} = \frac{i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} = i\sin\varphi\ e^{i\varphi} = \sin\varphi\ e^{i(\pi/2+\varphi)}$$

Επομένως το A_2 προηγείται του A_1 κατά φ και το B_2 προηγείται του A_1 κατά $\pi/2+\varphi$.

δ) Από το συντελεστή διάδοσης ενέργειας, εξίσωση (6) προκύπτει όταν $m=0$, $Z_1=Z_2=\rho c$:

$t = \dfrac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2 + X_m^2} = \dfrac{1}{1 + (\frac{s}{2\rho c\omega})^2}$. Επομένως όταν $\omega \to 0,\ o\ \pi\alpha\rho o\nu o\mu\alpha\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma \to \infty\ \kappa\alpha\iota\ \eta\ \ t \to 0$

Ενώ όταν $\omega \to \infty,\ o\ \pi\alpha\rho o\nu o\mu\alpha\sigma\tau\acute{\eta}\varsigma \to 1\ \kappa\alpha\iota\ \eta\ \ t \to 1$

Άρα πρόκειται για φίλτρο διέλευσης υψηλών συχνοτήτων (υψιπερατό).

ΘΕΜΑ 4. Δίδεται ορθογωνική μεμβράνη με μήκη πλευρών α και β στους άξονες –x- και –y- αντίστοιχα. Η μεμβράνη τείνεται με τάση *T* και τα άκρα της είναι ακίνητα. *Ένα* επίπεδο εγκάρσιο κύμα διαδίδεται στην επιφάνεια της μεμβράνης προς τα θετικά –x- και –y- με μετατόπιση $z_1(x,y,t) = A_1 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}$, όπου k_x, k_y οι κυματάριθμοι των κυμάτων που διαδίδονται στις κατευθύνσεις –x- και –y- αντίστοιχα. Η συνολική μετατόπιση σε κάθε σημείο της μεμβράνης προκύπτει από την υπέρθεση του αρχικού κύματος z_1 και άλλων τριών (z_2, z_3, z_4), που έχουν προέλθει από διαδοχικές ανακλάσεις στα όρια της μεμβράνης (x,b), (a,y) και (x,0) με πλάτη A_2, A_3 και A_4 αντίστοιχα.

α) Να βρεθούν οι εκφράσεις για τη μετατόπιση καθενός από τα ανακλώμενα κύματα.

β) Με χρήση των οριακών συνθηκών: *z(x,0,t)=z(0,y,t)=0*, να δείξετε ότι η συνολική μετατόπιση δίδεται από τη σχέση: $z(x,y,t) = -4A_1 \sin k_x x \ \sin k_y y \ \ e^{i\omega t}$.

γ) Να βρεθούν οι συνθήκες δημιουργίας στάσιμων κυμάτων στη μεμβράνη με χρήση των οριακών συνθηκών *z(x,b,t)=z(a,y,t)=0*.

ΛΥΣΗ: Πρόβλημα 8.11 βιβλίου Pain. Λύνεται ευκολότερα με εκθετικά. Έχει λυθεί στις παραδόσεις.