της επιδεκτικότητας χ' σχετίζεται με τη διασπορά, ενώ το φανταστικό μέρος της επιδεκτικότητας χ" με την απορρόφηση.

- Κβαντική προσέγγιση

Έως τώρα, μελετήσαμε την αλληλεπίδραση ύλης-φωτός με την ημικλασική προσέγγιση, δηλαδή θεωρήσαμε ότι η ύλη είναι κβαντισμένη, αλλά από την άλλη πλευρά, θεωρήσαμε ότι το Η/Μ πεδίο είναι κλασικό (θυμηθείτε ότι σε όλη την παραπάνω ανάλυση χρησιμοποιήσαμε το ηλεκτρικό πεδίο όπως ακριβώς προκύπτει από τις εξισώσεις Maxwell). Αν και με την ημικλασική προσέγγιση μπορούμε να περιγράψουμε πληθώρα φαινομένων, υπάρχουν φαινόμενα για τα οποία η προσέγγιση αυτή δεν είναι αρκετή και χρειάζεται να θεωρήσουμε ότι και το πεδίο μας είναι κβαντισμένο (κβαντική προσέγγιση). Για παράδειγμα με την κβαντική προσέγγιση μπορούμε να εξηγήσουμε την αυθόρμητη εκπομπή του ατόμου, την οποία την περιγράψαμε φαινομενολογικά στην ημικλασική προσέγγιση (ουσιαστικά εισάγαμε "με το χέρι" έναν όρο γ στις εξισώσεις μας, ο οποίος έπαιξε το ρόλο της αυθόρμητης εκπομπής έτσι ώστε οι εξισώσεις μας να συμβαδίζουν με τα πειραματικά αποτελέσματα). Μέσω της κβαντικής προσέγγισης λοιπόν αποδεικνύεται ότι η αυθόρμητη εκπομπή ενός ατόμου προέρχεται από την αλ/ση του ατόμου με τις καταστάσεις κενού του περιβάλλοντός του (θυμηθείτε ότι στην Κβαντομηχανική το κενό δεν είναι πραγματικό κενό). Επιπλέον, αν και η ημικλασική προσέγγιση προβλέπει ταλαντώσεις Rabi για την αντιστροφή πληθυσμού ενός κβαντικού συστήματος δύο επιπέδων, η κβαντική προσέγγιση, λόγω της κβάντωσης του πεδίου, θα δουμε ότι προβλέπει κατάρρευση (collapse) και αναβίωση (revival) του πληθυσμού.

→ Χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης ύλης-φωτός

Όπως γνωρίζουμε, για να περιγράψουμε οποιοδήποτε πρόβλημα στην Κβαντομηχανική θα πρέπει να γνωρίζουμε τη Χαμιλτονιανή του. Όπως και στην ημικλασική προσέγγιση, έτσι και εδώ, θα θεωρούμε πάντοτε ότι το άτομό μας είναι ένας κβαντικός εκπομπός δύο επιπέδων. Η αλληλεπίδραση ενός τέτοιου εκπομπού με ένα πεδίο $\vec{E}$ μπορεί να περιγραφεί από τη Χαμιλτονιανή

$$H = H_A + H_F + H_{int} \qquad (248)$$

όπου H_A είναι η ενέργεια του απομονωμένου ατόμου, H_F η ενέργεια του πεδίου και H_{int} η Χαμιλτονιανή η οποία περιγράφει την αλληλεπίδραση του ατόμου με το πεδίο.

Πριν πάμε στην ανάλυση του εκάστοτε όρου της εξ.

(248), σημειώνουμε ότι στην εξ. (248) έχουμε θεωρήσει τη διπολική προσέγγιση, δηλαδή έχουμε θεωρήσει ότι το μήκος κύματος του πεδίου είναι πολύ μεγαλύτερο από το μέγεθος του κβαντικού μας συστήματος με αποτέλεσμα να θεωρούμε ότι το ηλεκτρικό μας πεδίο είναι ανεξάρτητο του χώρου (δείτε για λεπτομέρειες τη σελ. 126 όπου είχαμε κάνει την προσέγγιση αυτή και στην ημικλασική περίπτωση).

Στη συνέχεια, θυμηθείτε ότι ήδη από την ημικλασική προσέγγιση είχαμε θεωρήσει ότι η Χαμιλτονιανή η οποία περιγράφει την αλληλεπίδραση του εκπομπού μας με το πεδίο $\vec{E}$, είναι

$$H_{int} = -\vec{p}\cdot\vec{E}(t) \qquad (249)$$

όπου $\vec{p} = -e\vec{r}$ (δείτε ξανά τις σελ. 127-128). Τώρα όμως, το ηλεκτρικό μας πεδίο δε θα δίνεται από την εξ.

(171) μιας και θα είναι κβαντισμένο. Θεωρώντας ότι βρισκόμαστε μέσα σε ιδανική κοιλότητα (δηλαδή δεν θα έχουμε απώλειες από τα τοιχώματα της κοιλότητας) το ηλεκτρικό πεδίο θα γράφεται

$$\vec{E}(z,t) = \hat{\varepsilon}\,\mathcal{E}_0\,(\hat{a}^{+} + \hat{a})\,\sin(kz) \qquad (250)$$

όπου θεωρήσαμε μονοχρωματικό πεδίο με πόλωση κατά τη διεύθυνση $\hat{\varepsilon}$ και διάδοση κατά τον άξονα z (δείτε και σελ. 13) και $\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}}$, όπου V ο όγκος της κοιλότητας. Σημειώστε ότι η ποσότητα $\mathcal{E}_0$ εκφράζει ουσιαστικά το στοιχειώδες πεδίο που οφείλεται ανά φωτόνιο ενώ η χρονική εξάρτηση εμπεριέχεται στους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής αφού όπως έχουμε δει είναι $a(t) = a(0)\,e^{-i\omega t}$ και $a^{+}(t) = a^{+}(0)\,e^{i\omega t}$. Όμως, από την ανάλυση που κάναμε μόλις προηγουμένως δεν θέλουμε να έχουμε χωρική εξάρτηση στο πεδίο μας και έτσι θέλουμε να εκφράσουμε το πεδίο της εξ. (250) έτσι ώστε η σταθερά $\mathcal{E}_0$ να εκφράζει το μέσο πεδίο ανά φωτόνιο που υπάρχει στον όγκο. Ανατρέχοντας στην εξ. (3) μπορεί κανείς να βρει ότι η μέση ηλεκτρική ενέργεια ανά φωτόνιο θα είναι $\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V} \int dV \sin^2 k_z = \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}$,

οπότε το μέσο πεδίο ανά φωτόνιο είναι $\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}}$, και

έτσι το ηλεκτρικό μας πεδίο γράφεται

$$\vec{E}(t) = \hat{\varepsilon}\, \mathcal{E}_0 \,(\hat{a}^+ + \hat{a}) = \hat{\varepsilon} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}}\, (\hat{a}^+ + \hat{a}) \qquad (251)$$

[σε κάποια βιβλία αφήνουν το ηλεκτρικό πεδίο στη μορφή της εξ. (250) παίρνοντάς το σε κάποιο σημείο z_0, δηλαδή είναι $\vec{E}(z,t) = \hat{\varepsilon}\, \mathcal{E}_0 \,(\hat{a}^+ + \hat{a}) \sin(k z_0)$ με $\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}}$ →

π.χ. Lambropoulos and Petrosian σελ 90, και Gerry και Knight σελ. 90) Εφόσον τώρα έχουμε θεωρήσει ότι ο εκπομπός μας είναι ένας κβαντικός εκπομπός δύο στιπέδων, θα συμβολίσουμε με $|1\rangle$ τη θεμελιώδη του κατάσταση και με $|2\rangle$ τη διεγερμένη. Προφανώς, οι καταστάσεις $|1\rangle$ και $|2\rangle$ αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύνολο για τον κβαντικό μας εκπομπό και έτσι θα είναι $\sum_{i=1}^{2} |i\rangle\langle i| = 1$. Με βάση αυτό, μπορούμε να γράψουμε για τη Χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης της εξ. (249)

$$H_{int} = -\vec{p}\cdot\vec{E}(t) = -\vec{p}\cdot\hat{\varepsilon}\,\mathcal{E}_0\,(\hat{a}^+ + \hat{a}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_{int} = -\sum_{i=1}^{2} |i\rangle\langle i|\,\vec{p}\cdot\hat{\varepsilon}\sum_{j=1}^{2}|j\rangle\langle j|\,\mathcal{E}_0\,(\hat{a}^+ + \hat{a}) \overset{p_{11}=p_{22}=0}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow H_{int} = -\big(|1\rangle\underbrace{\langle 1|\vec{p}\cdot\hat{\varepsilon}|2\rangle}_{p_{12}}\langle 2| + |2\rangle\underbrace{\langle 2|\vec{p}\cdot\hat{\varepsilon}|1\rangle}_{p_{21}}\langle 1|\big)\,\mathcal{E}_0\,(\hat{a}^+ + \hat{a})$$

$$\Rightarrow H_{int} = -\big(p_{12}\,|1\rangle\langle 2| + p_{21}\,|2\rangle\langle 1|\big)\,\mathcal{E}_0\,(a^+ + a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_{int} = -\big(p_{12}\,\hat{\sigma}_{12} + p_{21}\,\hat{\sigma}_{21}\big)\,\mathcal{E}_0\,(\hat{a}^+ + \hat{a}) \overset{p_{12}\in\mathbb{R}}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow H_{int} = \hbar g\,(\hat{\sigma}_{12} + \hat{\sigma}_{21})(\hat{a}^+ + \hat{a}) \qquad (252)$$

όπου θέσαμε ότι $g = -\frac{p_{12}\,\mathcal{E}_0}{\hbar}$, καθώς επίσης θεωρήσαμε ότι $p_{11} = p_{22} = 0$ και ότι η p_{12} είναι πραγματική. Σημειώνουμε εδώ ότι η ποσότητα g ονομάζεται σταθερά αλληλεπίδρασης και μας δίνει πληροφορία σχετικά με το πόσο ισχυρή ή ασθενής είναι η άλλαγη μεταξύ του εκπομπού και του περιβάλλοντός του (παίζει ρόλο αντίστοιχο με εκείνον της συχνότητας Rabi στην ημικλασική προσέγγιση).

Όσο αναφορά τους άλλους δύο όρους της εξ. (248), σημειώνουμε ότι ο H_A δίνει την ενέργεια του απομονωμένου ατόμου, δηλαδή

$$H_A = \sum_{i=1}^{2} \hbar\omega_i |i\rangle\langle i| = \hbar\omega_1 \hat{\sigma}_{11} + \hbar\omega_2 \hat{\sigma}_{22} \qquad (253)$$

όπου $\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle\langle j|$, όπως και προηγουμένως. Ομοίως, ο όρος H_F μας δίνει την ενέργεια του Η/Μ πεδίου και έτσι γράφουμε ότι

$$H_F = \hbar\omega \hat{a}^{+}\hat{a} \qquad (254)$$

όπου έχουμε αγνοήσει την ενέργεια του κενού. Έτσι λοιπόν, σύμφωνα με τα παραπάνω, η Χαμιλτονιανή του συστήματός μας γράφεται

$$H = H_A + H_F + H_{int} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \sum_{i=1}^{2} \hbar \omega_i \sigma_{ii} + \hbar \omega \hat{a}^+ \hat{a} + \hbar g (\hat{\sigma}_{12} + \hat{\sigma}_{21})(\hat{a}^+ + \hat{a}) \qquad (255)$$

Σημειώνουμε στο σημείο αυτό ότι αν δεν είχαμε μονο-χρωματικό πεδίο τότε ο δεύτερος όρος θα έπαιρνε τη μορφή $\sum_k \hbar \omega_k \hat{a}_k^+ a_k$, όπου ω_k, $\hat{a}_k^+$ και $\hat{a}_k$ η συχνότητα καθώς και οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής για κάθε $\vec{k}$, ενώ ο τρίτος όρος θα γραφόταν $\sum_k \hbar g_k (\hat{\sigma}_{12} + \hat{\sigma}_{21}) \cdot (\hat{a}_k^+ + \hat{a}_k)$, όπου $g_k = -\frac{p_{12} \mathcal{E}_{0k}}{\hbar}$ η σταθερά αλληλεπίδρασης... η σταθερά αλλοης η οποία θα χαρακτήριζε την αλλοη του ατόμου με το εκάστοτε φωτόνιο που χαρακτηρίζεται από το κυματάνυσμα $\vec{k}$.

Θυμηθείτε τώρα ότι η χρονική εξέλιξη στη Χαμιλ-τονιανή της εξ. (255) "κρύβεται" στους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής $\hat{a}^+$ και $\hat{a}$ [δείτε ξανά την ανάλυση που είχαμε κάνει στη σελ. 34 για τη Χαμιλτονιανή του πεδίου H_F (free field Hamiltonian)]. Σε πλήρη αναλογία μπορούμε να κάνουμε την ίδια ανάλυση και για την Χαμιλτονιανή του απομονωμένου ατόμου H_A και συμβολίζοντας με ω_0 την ενεργειακή διαφορά των δύο επιπέδων του, βρίσκουμε ότι

$$\hat{\sigma}_{12}(t) = \hat{\sigma}_{12}(0)\, e^{-i\omega_0 t} \quad \text{και} \quad \hat{\sigma}_{21}(t) = \hat{\sigma}_{21}(0)\, e^{+i\omega_0 t} \qquad (256).$$

Γνωρίζοντας ήδη από τις εξ. (46) - (47) ότι $\hat{a}(t) = \hat{a}(0)\, e^{-i\omega t}$ και $\hat{a}^+(t) = \hat{a}^+(0)\, e^{i\omega t}$, τότε προκύπτει ότι στον τρίτο όρο της εξ. (255) θα έχουμε τα γινόμενα (συμβολίζουμε από εδώ και στο εξής $\hat{\sigma}_+ = \hat{\sigma}_{21} = |2\rangle\langle 1|$ μιας και ο τελεστής αυτός δρα ως τελεστής αναβίβασης για το άτομό μας αφού μας πηγαίνει από την κατάσταση $|1\rangle$ στη $|2\rangle$, καθώς και $\hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_{12} = |1\rangle\langle 2|$ αφού αυτός δρα ως ατομικός τελεστής καταβίβασης οδηγώντας μας από τη διεγερμένη κατάσταση $|2\rangle$ στη θεμελιώδη $|1\rangle$)

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{\sigma}_+ \hat{a}^+ \sim e^{i(\omega_0+\omega)t}\\
&\hat{\sigma}_+ \hat{a} \sim e^{i(\omega_0-\omega)t}\\
&\hat{\sigma}_- \hat{a}^+ \sim e^{-i(\omega_0-\omega)t}\\
&\hat{\sigma}_- \hat{a} \sim e^{-i(\omega_0+\omega)t}
\end{aligned}\right\}$$

γινόμενα που προκύπτουν από τον τρίτο όρο της εξ. (255) $\hbar g(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a}^+ + \hat{a})$

Προφανώς ισχύει ότι $\omega \simeq \omega_0$ μιας και θέλουμε το πεδίο να μπορεί να διεγείρει τον εκπομπό μας. Λαμβάνοντας λοιπόν υπόψιν το γεγονός αυτό, βλέπουμε ότι ο πρώτος και ο τέταρτος από τους παραπάνω όρους ταλαντώνονται πολύ πιο γρήγορα σε σχέση με τους άλλους δύο οι οποίοι είναι ανάλογοι του $e^{\pm i(\omega_0-\omega)t}$ και έτσι μπορούμε να τους αμελήσουμε. Αυτή είναι ουσιαστικά η προσέγγιση περιστρεφόμενου κύματος που χρησιμοποιήσαμε και στην ημικλασική προσέγγιση (σελ. 134). Επίσης, στο σημείο αυτό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια επιπλέον φυσικά επιχειρήματα για να αγνοήσουμε τους όρους $\hat{\sigma}_+\hat{a}^+$ και $\hat{\sigma}_-\hat{a}$. Σκεφτείτε για παράδειγμα τη διαδικασία διέγερσης: το άτομο απορροφά ένα φωτόνιο από το περιβάλλον του και μεταβαίνει από τη θεμελιώδη κατάσταση στη διεγερμένη. Με άλλα λόγια, έχουμε την καταστροφή (⇒ απορρόφηση) ενός φωτονίου ($\hat{a}$) με αποτέλεσμα τη διέγερση του ατόμου ($\hat{\sigma}_+$) και έτσι η διαδικασία αυτή μπορεί να περιγραφεί από το γινόμενο $\hat{\sigma}_+\hat{a}^+$ (σημειώστε επίσης ότι η σειρά των συγκεκριμένων τελεστών δεν παίζει ρόλο αφού ο ένας αναφέρεται στο άτομο και ο άλλος στο πεδίο). Αντίστοιχη λογική έχουμε στη διεργασία της αποδιέγερσης: καθώς το άτομό μας αποδιεγείρεται ($\hat{\sigma}_-$) εκπέμπει (⇒ δημιουργεί) ένα φωτόνιο ($\hat{a}^+$) και έτσι η διεργασία αυτή περιγράφεται από το γινόμενο $\hat{\sigma}_-\hat{a}^+$. Επομένως, οι όροι αυτοί, $\hat{\sigma}_+\hat{a}$ και $\hat{\sigma}_-\hat{a}^+$, διατηρούν την ενέργεια του συστήματος εν αντιθέση με τους άλλους δύο όρους, $\hat{\sigma}_+ \hat{a}^+$ και $\hat{\sigma}_- \hat{a}$, οι οποίοι δεν τη διατηρούν, αφού ο πρώτος από αυτούς περιγράφει τη διέγερση του ατόμου με ταυτόχρονη εκπομπή φωτονίου, ενώ ο δεύτερος περιγράφει την αποδιέγερση του ατόμου με ταυτόχρονη απορρόφηση φωτονίου. Μπορούμε λοιπόν με ασφάλεια να αγνοήσουμε τους όρους αυτούς στη συνέχεια της ανάλυσής μας.

Σημειώνουμε ότι οι όροι αυτοί (οι $\hat{\sigma}_+ \hat{a}^+$ και $\hat{\sigma}_- \hat{a}$) ονομάζονται counter rotating terms και αγνοούνται στα περισσότερα προβλήματα με τα οποία ασχολείται η Κβαντική Οπτική (λαμβάνονται υπόψιν μόνο στην περίπτωση όπου έχουμε πολύ ισχυρή αλληλεπίδραση του ατόμου με το περιβάλλον του).

Με τη βοήθεια λοιπόν όλων των παραπάνω παρατηρήσεων καταλήγουμε στο ότι η Χαμιλτονιανή του συστήματός μας εν τέλει γράφεται

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{2} \hbar \omega_i \hat{\sigma}_{ii} + \hbar \omega \hat{a}^+ \hat{a} + \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^+) \qquad (257)$$

Η παραπάνω Χαμιλτονιανή η οποία περιγράφει τη σύζευξη ενός ατόμου δύο επιπέδων με ένα μονοχρωματικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο (single-mode electromagnetic field) ονομάζεται μοντέλο Jaynes-Cummings.

Στη συνέχεια της ανάλυσής μας θα επικεντρωθούμε στη λύση του μοντέλου Jaynes-Cummings για τις περιπτώσεις όπου το πεδίο μας περιγράφεται είτε με τη βοήθεια των number states είτε με τη βοήθεια των σύμφωνων καταστάσεων (coherent states).

Σημειώνουμε στο σημείο αυτό κάτι σημαντικό: Όπως στην Κβαντομηχανική, έτσι και στην Κβαντική Οπτική είναι σύνηθες ένα πρόβλημα να μπορεί να περιγραφεί με παραπάνω από έναν τρόπους. Σκεφτείτε για παράδειγμα ότι στην Κβαντομηχανική έχουμε δύο διαφορετικές αλλά ισοδύναμες μεθόδους για να περιγράφουμε κάθε φαινόμενο στο μικρόκοσμο: την εικόνα Schrödinger και την εικόνα Heisenberg. Έτσι λοιπόν, και στην Κβαντική Οπτική μπορούμε να μελετήσουμε ένα πρόβλημα είτε με τη μέθοδο των πλατών πιθανότητας, είτε με τη μέθοδο του πίνακα πυκνότητας. Αν και η κάθε μία μέθοδος έχει τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά της, εμείς θα συνεχίσουμε την ανάλυσή μας με τη μέθοδο των πλατών πιθανότητας. Πιο συγκεκριμένα, για να αναλύσουμε περαιτέρω το μοντέλο Jaynes-Cummings υπάρχουν αρκετοί τρόποι[*] (π.χ. δείτε Lambropoulos and Petrosian Κεφ. 3.3.2, Gerry and Knight Κεφ. 4.5-4.9, Scully and Zubairy Κεφ. 6.2 και Quantum Optics for Beginners, Ficek and Wahiddin Κεφ. 8). Εμείς εδώ, όπως είπαμε, θα επικεντρωθούμε στην αναπαράσταση του μοντέλου Jaynes-Cummings με τη μέθοδο των πλατών πιθανότητας για την περίπτωση όπου το πεδίο μας περιγράφεται από τις number states ή από τις σύμφωνες καταστάσεις, καθώς επίσης θα προσπαθήσουμε να

---

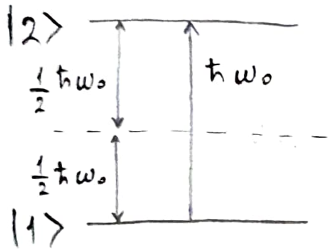
[*] ανάλογα βέβαια και με τις ανάγκες μας

βρούμε τις dressed states του σύνθετου αυτού συστήματος (τις dressed states τις έχουμε ήδη μελετήσει στην περίπτωση της ημικλασικής προσέγγισης, αλλά θα τις δούμε και εδώ στο πλαίσιο της κβαντικής προσέγγισης).

Μία τελευταία σημείωση πριν προχωρήσουμε στην περαιτέρω ανάλυση του μοντέλου Jaynes-Cummings είναι η εξής: Ορίζουμε τον τελεστή $\hat{N}_e = \hat{a}^{+}\hat{a} + |2\rangle\langle 2|$ ο οποίος αντιπροσωπεύει τον αριθμό των διεγέρσεων στο σύνθετο σύστημά μας άτομο δύο επιπέδων + Η/Μ πεδίο (παρατηρείστε ότι μπορούμε να έχουμε μόνο μία διέγερση στο σύστημά μας). Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη Χαμιλτονιανή της εξ. (257) βρίσκουμε ότι $[\hat{H}, \hat{N}_e] = 0$, το οποίο σημαίνει ότι η Χαμιλτονιανή Jaynes-Cummings διατηρεί τον αριθμό των διεγέρσεων στο σύστημά μας.

- Πεδίο σε number state (χώρος Fock).

Σαν ένα πρώτο παράδειγμα στο μοντέλο Jaynes-Cummings θεωρούμε ότι το πεδίο μας βρίσκεται σε μία number state $|n\rangle$. Επίσης, θεωρούμε ότι αρχικά ο εκπομπός δύο επιπέδων που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, βρίσκεται στη θεμελιώδη του κατάσταση, δηλαδή στην κατάσταση $|1\rangle$. Τώρα, αν συμβολίσουμε με $H_{ατόμου}$ το χώρο Hilbert για το άτομο και με $H_{πεδίου}$ το χώρο Hilbert για το πεδίο, τότε ο συνολικός χώρος Hilbert του συστήματός μας θα είναι $H = H_{ατόμου} \otimes H_{πεδίου}$. Επομένως, για την περίπτωση αυτή ο χώρος Hilbert του σύνθετου συστήματος θα περιέχει τις καταστάσεις $|1\rangle \otimes |n\rangle \equiv |1, n\rangle$, δηλαδή το άτομο στη θεμελιώδη κατάστα-



ση και το πεδίο να περιέχει n φωτόνια, καθώς και $|2\rangle \otimes |n-1\rangle \equiv |2, n-1\rangle$, δηλαδή το άτομο στη διεγερμένη κατάσταση με το πεδίο τώρα να περιέχει n-1 φωτόνια αφού ένα από αυτά απορροφήθηκε από το άτομο ώστε να διεγερθεί. Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, η γενική κατάσταση $|\psi(t)\rangle$ η οποία θα περιγράφει το σύνθετο σύστημά μας σε κάποια χρονική στιγμή t θα γράφεται

$$|\psi(t)\rangle = \underbrace{c_1(t)\, e^{+i\omega_0 t/2}\, e^{-in\omega t}}_{\tilde{c}_1(t)} |1, n\rangle + \underbrace{c_2(t)\, e^{-i\omega_0 t/2}\, e^{-i(n-1)\omega t}}_{\tilde{c}_2(t)} |2, n-1\rangle \qquad (258)$$

όπου σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες που θεωρήσαμε παραπάνω θα είναι $c_1(0) = 1$ και $c_2(0) = 0$. Σύμφωνα με τη μέθοδο των πλατών πιθανότητας, μέθοδο την οποία έχουμε χρησιμοποιήσει σε όλη την έως τώρα ανάλυσή μας, για να βρούμε τη χρονική εξέλιξη του συστήματός μας, θα αντικαταστήσουμε τη γενική κατάσταση της εξ. (258), καθώς και τη Χαμιλτονιανή της εξ. (257) στην εξίσωση Schrödinger. Επομένως θα είναι

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i\hbar \left[\dot{\tilde{c}}_1(t) |1,n\rangle + \dot{\tilde{c}}_2(t) |2,n-1\rangle \right] = \left(\hat{H}_{ατ.} + \hat{H}_{πεδ.} + \hat{H}_{int} \right) |\psi(t)\rangle$$

όπου $\hat{H}_{ατ.} = \sum_i \hbar \omega_i \sigma_{ii}$ είναι η Χαμιλτονιανή που περιγράφει το απομονωμένο άτομο, $\hat{H}_{πεδ.} = \hbar \omega \hat{a}^+ a$ η Χαμιλτονιανή του πεδίου και $\hat{H}_{int} = \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^+)$ η Χαμιλτονιανή που περιγράφει την αλληλ. ατόμου - πεδίου και όπου θυμίζουμε ότι $g = -\frac{\wp_{12} E_0}{\hbar}$. Υπολογίζοντας ξεχωριστά τους τρεις όρους οι οποίοι προκύπτουν στο δεξί μέρος της παραπάνω εξίσωσης έχουμε

$$\hat{H}_{\alpha\tau} |\psi(t)\rangle = (\hbar\omega_1 |1\rangle\langle 1| + \hbar\omega_2 |2\rangle\langle 2|) [\tilde{c}_1(t) |1, n\rangle +$$

$$+ \tilde{c}_2(t) |2, n-1\rangle] =$$

$$= \frac{1}{2}\hbar\omega_0 (|2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|) [\tilde{c}_1(t) |1, n\rangle + \tilde{c}_2(t) |2, n-1\rangle] =$$

$$= \hbar\omega_0 \left[-\frac{1}{2} \tilde{c}_1(t) |1, n\rangle + \frac{1}{2} \tilde{c}_2(t) |2, n-1\rangle \right] ,$$

όπου θεωρήσαμε ως επίπεδο μηδενικής ενέργειας το επίπεδο το οποίο βρίσκεται ακριβώς ενδιάμεσα των ενεργειακών επιπέδων του ατόμου. Επιπλέον, για τα άλλα δύο μέρη της Χαμιλτονιανής θα έχουμε

$$\hat{H}_{\pi\varepsilon\delta} |\psi(t)\rangle = \hbar\omega_0 \hat{a}^+\hat{a} [\tilde{c}_1(t) |1, n\rangle + \tilde{c}_2(t) |2, n-1\rangle] =$$

$$= \hbar\omega_0 [\tilde{c}_1(t) \cdot n |1, n\rangle + \tilde{c}_2(t) (n-1) |2, n-1\rangle] ,$$

όπου θεωρήσαμε ότι το πεδίο είναι σε συντονισμό με τον εκπομπό $(\Delta = \omega - \omega_0 = 0)$, καθώς και

$$\hat{H}_{int}|\psi(t)\rangle = \hbar g(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^+)[\tilde{c}_1(t)|1,n\rangle + \tilde{c}_2(t)|2,n-1\rangle] =$$

$$= \hbar g[\tilde{c}_1(t)\,\hat{\sigma}_+\hat{a}|1,n\rangle + \tilde{c}_2(t)\,\hat{\sigma}_-\hat{a}^+|2,n-1\rangle] =$$

$$= \hbar g[\tilde{c}_1(t)\sqrt{n}|2,n-1\rangle + \tilde{c}_2(t)\sqrt{n}|1,n\rangle$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις εξ. (39) και (40). Επιστρέφοντας στην εξίσωση Schrödinger και αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα που μόλις βρήκαμε, παίρνουμε ότι $(\omega = \omega_0)$

$$i\hbar[\dot{\tilde{c}}_1(t)|1,n\rangle + \dot{\tilde{c}}_2(t)|2,n-1\rangle = -\frac{1}{2}\hbar\omega_0\tilde{c}_1(t)|1,n\rangle +$$

$$+\frac{1}{2}\hbar\omega_0\tilde{c}_2(t)|2,n-1\rangle + n\hbar\omega_0\tilde{c}_1(t)|1,n\rangle + (n-1)\hbar\omega_0\tilde{c}_2(t)\cdot$$

$$\cdot|2,n-1\rangle + \hbar g\sqrt{n}\,\tilde{c}_1(t)|2,n-1\rangle + \hbar g\sqrt{n}\,\tilde{c}_2(t)|1,n\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i\hbar\Big[+i\frac{\omega_0}{2}c_1(t)e^{+i\omega_0 t/2}e^{-in\omega_0 t}|1,n\rangle - in\omega_0 c_1(t)e^{i\omega_0 t/2}e^{-in\omega_0 t}|1,n\rangle$$

$$+\dot{c}_1(t)e^{+i\omega_0 t/2}e^{-in\omega_0 t}|1,n\rangle - i\frac{\omega_0}{2}c_2(t)e^{-i\omega_0 t/2}e^{-i(n-1)\omega_0 t}|2,n-1\rangle -$$

$$-i(n-1)\omega_0 c_2(t)e^{-i\omega_0 t/2}e^{-i(n-1)\omega_0 t}|2,n-1\rangle + \dot{c}_2(t)e^{-i\omega_0 t/2}e^{-i(n-1)\omega_0 t/2}|2,n-1\rangle\Big]$$

$$= -\frac{1}{2}\hbar\omega_0 c_1(t) \cancel{e^{+i\omega_0 t/2}} e^{-in\omega_0 t} |1,n\rangle + \frac{1}{2}\hbar\omega_0 c_2(t) \cancel{e^{-i\omega_0 t/2}} e^{-i(n-1)\omega_0 t} \cdot$$

$$\cdot |2,n-1\rangle + n\hbar\omega_0 c_1(t) \cancel{e^{+i\omega_0 t/2}} e^{-in\omega_0 t} |n,1\rangle + (n-1)\hbar\omega_0 c_2(t) \cdot$$

$$\cdot \cancel{e^{-i\omega_0 t/2}} e^{-i(n-1)\omega_0 t} |2,n-1\rangle + \hbar g\sqrt{n}\, c_2(t) e^{-i\omega_0 t/2} e^{-i(n-1)\omega_0 t} |1,n\rangle +$$

$$+ \hbar g\sqrt{n}\, c_1(t) e^{+i\omega_0 t/2} e^{-in\omega_0 t} |2,n-1\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i\cancel{\hbar}\left[\dot{c}_1(t) e^{+i\omega_0 t/2} e^{-in\omega_0 t} |1,n\rangle + \dot{c}_2(t) e^{-i\omega_0 t/2} e^{-i(n-1)\omega_0 t} |2,n-1\rangle\right] =$$

$$= \cancel{\hbar} g\sqrt{n}\left[c_2(t) e^{-i\omega_0 t/2} e^{-i(n-1)\omega_0 t} |1,n\rangle + c_1(t) e^{+i\omega_0 t/2} e^{-in\omega_0 t} |2,n-1\rangle\right]$$

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω εξίσωση από αριστερά με $\langle 1,n|$ βρίσκουμε ότι

$$i\dot{c}_1(t) \cancel{e^{-i(n-\frac{1}{2})\omega_0 t}} = g\sqrt{n}\, c_2(t) \cancel{e^{-i(n-1+\frac{1}{2})\omega_0 t}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{c}_1(t) = -ig\sqrt{n}\, c_2(t) \qquad (259a)$$

Αντίστοιχα, πολλαπλασιάζοντας με $\langle 2,n-1|$ βρίσκουμε ότι

$$i\dot{c}_2(t)\,\cancel{e^{-i\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\omega_0 t}} = g\sqrt{n}\,c_1(t)\,\cancel{e^{-i\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega_0 t}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{c}_2(t) = -ig\sqrt{n}\cdot c_1(t) \qquad (259b)$$

Παρατηρείστε ότι οι εξ. (259) έχουν παρόμοια μορφή με τις εξ. (181) που βγάλαμε στην ημικλασική περίπτωση. Επιπλέον, στην περίπτωση όπου είχαμε $\Delta \neq 0$ οι εξ. (259) θα έπαιρναν τη μορφή (επιβεβαιώστε το)

$$\dot{c}_1(t) = -ig\sqrt{n}\,e^{i\Delta t}\cdot c_2(t) \qquad (260a)$$

$$\dot{c}_2(t) = -ig\sqrt{n}\,e^{-i\Delta t}\cdot c_1(t) \qquad (260b)$$

Προχωρώντας στην επίλυση του συστήματος των Δ.Ε. των εξ. (259) με τρόπο ανάλογο με εκείνο που επιλύσαμε τις εξ. (181), βρίσκουμε τελικά ότι

$$c_1(t) = \cos\left(g\sqrt{n}\,t\right) \qquad (261a)$$

$$c_2(t) = -i\sin\left(g\sqrt{n}\,t\right) \qquad (261b)$$

όπου για την εξαγωγή των εξισώσεων αυτών χρησιμοποιήσαμε τις αρχικές συνθήκες $c_1(0)=1$ και $c_2(0)=0$.

Στη γενικότερη περίπτωση όπου $\Delta \neq 0$ καθώς και $0 < c_i(t) < 1$, $i=1,2$ (δηλαδή τα $c_i(t)$ έχουν τυχαίες τιμές και όχι κάποια από τις ακραίες) τότε για αυτή τη γενικότερη περίπτωση θα είχαμε αντί των εξ. (261) ότι (δείτε Scully και Zubairy, Κεφ. 6.2)

$$c_1(t) = e^{i\Delta t/2}\left\{ c_1(0)\left[\cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Omega_n}\sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right)\right] - \frac{2ig\sqrt{n}}{\Omega_n} c_2(0)\sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right)\right\} \qquad (262a)$$

$$c_2(t) = e^{-i\Delta t/2}\left\{ c_2(0)\left[\cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) + \frac{i\Delta}{\Omega_n}\sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right)\right] - \frac{2ig\sqrt{n}}{\Omega_n} c_1(0)\sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right)\right\} \qquad (262b)$$

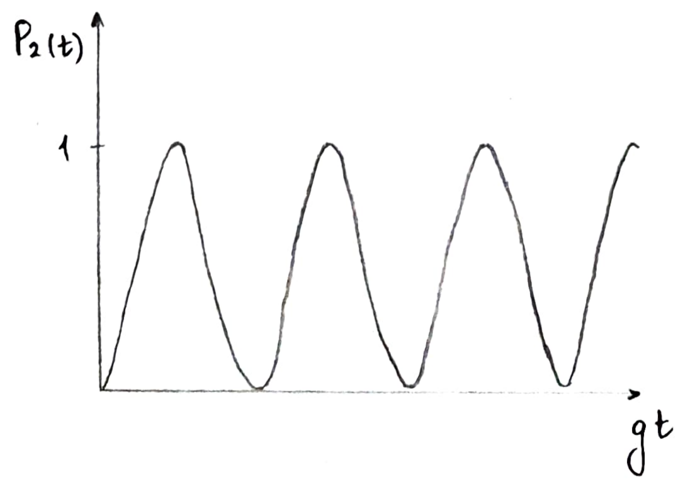
όπου $\Omega_n = \Delta^2 + 4g^2 n$.

Επιστρέφοντας στη δική μας, ειδικότερη, περίπτωση σημειώνουμε ότι οι πιθανότητες κατάληψης της θεμελιώδους αλλά και της διεγερμένης κατάστασης θα είναι

$$(261a) \Rightarrow P_1(t) = |c_1(t)|^2 = \cos^2(g\sqrt{n}\,t) = \cos^2(\Omega_n t) \qquad (263a)$$

$$(261b) \Rightarrow P_2(t) = |c_2(t)|^2 = \sin^2(g\sqrt{n}\,t) = \sin^2(\Omega_n t) \qquad (263b)$$

όπου προφανώς η ποσότητα $\Omega_n = g\sqrt{n}$ είναι η συχνότητα Rabi για το σύστημά μας μιας και ο πληθυσμός ταλαντώνεται από τη θεμελιώδη στη διεγερμένη κατάσταση με τη συγκεκριμένη συχνότητα. Επομένως, ο πληθυσμός της διεγερμένης κατάστασης θα ταλαντώνεται, όπως φαίνεται και στο σχήμα.



Προφανώς, για μεγαλύτερα n θα έχουμε και μεγαλύτερο $\Omega_n \Rightarrow$ εντονότερες ταλαντώσεις.