

νως, μπορούμε να θεωρήσουμε και τη δράση ενός unitary τελεστή ως μία απλή στροφή στο χώρο [δείτε από τη θεωρία ομάδων την ομάδα $SU(2)$].

Τώρα, εφόσον οι πίνακες Pauli είναι Ερμιτιανοί τελεστές ($\sigma_k^\dagger = \sigma_k$, $k=1,2,3$), συμπεραίνουμε ότι και ο τελεστής $\vec{r} \cdot \vec{\sigma}$ είναι Ερμιτιανός. Επιπλέον, αφού το διάνυσμα \vec{r} είναι μοναδιαίο, τότε έχουμε από την εξ. (282) ότι $(\vec{\sigma} \cdot \vec{r})(\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) = \mathbb{1}$, και επομένως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι ιδιοτιμές του τελεστή $\vec{r} \cdot \vec{\sigma}$ είναι οι ± 1 . Παραπάνω, είδαμε ότι το ιδιοδιάνυσμα του $\vec{r} \cdot \vec{\sigma}$ με ιδιοτιμή $+1$ είναι το $|\psi\rangle$. Συμβολίζουμε με $|\varphi\rangle$ το ιδιοδιάνυσμα με

ιδιοτιμή -1 , $\vec{r} \cdot \vec{\sigma} |\varphi\rangle = -|\varphi\rangle$, το οποίο προφανώς

θα είναι κάθετο στο $|\psi\rangle$, δηλαδή $\langle \varphi | \psi \rangle = 0$.

Πολλοί/ζουνας με $|\varphi\rangle$ την επίσημη ιδιοτιμή που

βρίκαμε παραπάνω, παίρνουμε ότι

$$\vec{r} \cdot \vec{\sigma} |\varphi\rangle = -|\varphi\rangle \Rightarrow \langle \varphi | \vec{r} \cdot \vec{\sigma} |\varphi\rangle = -\langle \varphi | \varphi \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r} \langle \varphi | \vec{\sigma} |\varphi\rangle = -1 \stackrel{\times \vec{r}}{\Rightarrow} |\vec{r}|^2 \langle \varphi | \vec{\sigma} |\varphi\rangle = -\vec{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \varphi | \vec{\sigma} |\varphi\rangle = -\vec{r}$$

Με άλλα λόγια, η απεικόνιση της κατάστασης $|\varphi\rangle$,

η οποία είναι ορθογώνια ως προς την $|\psi\rangle$, πάνω

στη σφαίρα Bloch θα είναι σε αντιδιαμετρικό ση-

μείο σε σχέση με εκείνο που είχαμε για την κα-

τάσταση $|\psi\rangle$. Επομένως, αν θέλουμε να βρούμε

την ορθογώνια κατάσταση μιας τυχαίας κατάστασης

$|\psi\rangle$ ενός qubit, τότε δεν έχουμε παρά να βρούμε το σφαιρικό της κατάσταση $|\psi\rangle$ στη σφαίρα Bloch και στη συνέχεια να πάρουμε το κατωτέρω συρρετρικό του.

Για να μπορούμε να κάνουμε τη διαδικασία αυτή για οποιαδήποτε κατάσταση, θα πρέπει να δούμε πώς μπορούμε να εκφράσουμε μία γενική κατάσταση $|\psi\rangle$ με τη βοήθεια της υπολογιστικής βάσης $B = \{|0\rangle, |1\rangle\}$, που αναφέραμε και παραπάνω. Εφόσον η κατάσταση $|\psi\rangle$ απεικονίζεται πάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας (και συγκεκριμένα μοναδιαίας), είναι λογικό να εκφράσουμε τη γενική κατάσταση $|\psi\rangle$ συναρτήσει των

γωνιών θ και φ από τις τωλικές συντεταγμένες, όπου $0 \leq \theta \leq \pi$ και $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Θυρίσουμε τώρα, από την εφ. (283), ότι το διάνυσμα Pauli $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ μας βοηθάει να περιγράψουμε μια οποιαδήποτε στροφή γύρω από τυχαίο άξονα σε μια μοναδιαία σφαίρα (εν γένει γύρω από οποιαδήποτε σφαίρα, αλλά εδώ έχουμε $|\vec{r}|=1$). Από την θεωρία Ομάδων όμως, αποδεικνύεται ότι μια στοιχειώδης στροφή στο χώρο γύρω από έναν άξονα n (με μοναδιαίο διάνυσμα \hat{n} κατά μήκος του) γράφεται $e^{i\theta(\hat{n} \cdot \vec{X})}$, όπου $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$ και X_i (με $i=1,2,3$) οι γεννήτορες οι οποίοι παράγουν μια στοιχειώδη στροφή

γύρω από τους άξονες $x (i=1)$, $y (i=2)$ και $z (i=3)$
 αντίστοιχα (για περισσότερες πληροφορίες δείτε
 π.χ. συρρίψεις στα "Ευδικά θέματα κβαντικής
 φυσικής", Κεφ. 3 και "Groups, Representations
 and Physics", H. F. Jones, Κεφ. 6 και 8). Οι γεν-
 νήτορες αυτοί προκύπτει ότι υπακούουν στην
 κυκλική μεταθετική σχέση $[X_i, X_j] = i \epsilon_{ijk} X_k$,
 όπου $i, j, k = 1, 2, 3$ και ϵ_{ijk} το σύμβολο Levi-
 Civita. Συγκρίνοντας με την εξ. (283) βλέπου-
 με ότι η θέση των γεννητόρων αυτών μπορούν
 να την παίξουν οι πίνακες Pauli σ_x, σ_y και σ_z .
 Όπως, επειδή από τις ιδιότητες των πινάκων
 Pauli είδαμε ότι ισχύει $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k$,

όπου $i, j, k = 1, 2, 3$ (ή x, y, z), συμπεραίνουμε ότι οι γεννήτορες μιας στοιχειώδους στροφής στην περιπέτρωσή μας θα είναι οι $\frac{1}{2} \sigma_i$, με $i = 1, 2, 3$, μιας

και $[\frac{1}{2} \sigma_i, \frac{1}{2} \sigma_j] = i \epsilon_{ijk} \frac{1}{2} \sigma_k$. Έτσι λοιπόν, για

στροφή γύρω από άξονα n μπορούμε τελικά να

γράψουμε ότι περιγράφεται από τη σχέση

$$e^{-\frac{i}{2} \theta (\hat{n} \cdot \vec{\sigma})} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbb{1} - i \hat{n} \cdot \vec{\sigma} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (302)$$

όπου το πόλο του μοναδιαίου διανύσματος \hat{n} θα τον παίξει το διάνυσμα Bloch \vec{r} ($|\vec{r}| = 1$).

Από το γεγονός ότι ο πίνακας πυκνότητας του

qubit γράφεται $\rho = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})$ [εξ. (299)], κα-

θώς και ότι για να περιγράψουμε ένα οποιοδήποτε

τότε σγρεις πάνω σε μία μοναδιαία σφαίρα προ-
 ρούρε να το κάνουμε μέσω της ε]. (302), προση-
 πτει ότι η γενική κατάσταση ενός qubit γρά-
 φεται ως (στη βάση $B = \{|0\rangle, |1\rangle\}$)

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (303)$$

όπου $0 \leq \theta \leq \pi$ και $0 \leq \varphi < 2\pi$. Επομένως, ο τι-
 νακός πυκνότητας για τη γενική αυτή κατάσταση
 γράφεται

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{-i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho = \begin{bmatrix} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{i\varphi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\varphi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle\langle 0| + e^{i\varphi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle\langle 1| +$$

$$+ e^{i\varphi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle\langle 0| + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle\langle 1| \quad (304)$$

όπου τα διαγώνια στοιχεία του μας δίνουν άθροισμα μονάδα, όπως και θα έπρεπε, αφού $\cos^2(\frac{\theta}{2}) + \sin^2(\frac{\theta}{2}) = 1$. Θυμηθείτε τώρα ότι από την ε].

(299) είχαμε ότι $\rho = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \hat{r} \cdot \vec{\sigma})$, όπου \hat{r} το μοναδιαίο διάνυσμα Bloch και $\vec{\sigma}$ το διάνυσμα Pauli. Γράφοντας κανείς το μοναδιαίο διάνυσμα Bloch στις πολικές συντεταγμένες έχουμε ότι $\hat{r} =$

$= (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$, οπότε προκύπτει ότι το γινόμενο $\hat{r} \cdot \vec{\sigma}$ γράφεται (επιβεβαιώστε το)

$$\begin{aligned} \hat{r} \cdot \vec{\sigma} &= (\sin\theta \cos\varphi) \sigma_x + (\sin\theta \sin\varphi) \sigma_y + \cos\theta \cdot \sigma_z = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\varphi} \sin\theta \\ e^{i\varphi} \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (305)$$

και με κάποιες επιπλέον πράξεις μπορούμε να απο-

Δείξουμε ότι οι εξ. (299) και (304) είναι ουσιαστικά
ισοδύναμες.

Προηγουμένως είπαμε ότι κάθε πιθανή στροφή στο
χώρο μπορεί να παρασταθεί από έναν unitary πί-
νακα. Πριν προσπαθήσουμε να γράψουμε τη γενική
μορφή ενός τέτοιου πίνακα ας πάρει να δούμε τρεις
ειδικές περιπτώσεις: τους πίνακες Pauli. Όπως εί-
παμε και προηγουμένως οι πίνακες Pauli είναι
unitary πίνακες ($\sigma_k^\dagger = \sigma_k$, $k=1,2,3$), αλλά έχουν
την επιπλέον ιδιότητα ότι αποτελούν ουσιαστι-
κά γεννήτορες για κάθε πιθανή στροφή στο χώ-
ρο. Αν εφαρμόσουμε τους πίνακες αυτούς πάνω στην
κατάσταση $|\psi\rangle$ της εξ. (303), δηλαδή αν πραγ-
ματοποιήσουμε μία μέτρηση με τους τελεστές αυ-

ως πάνω στη γενική κατάσταση του qubit, βρίσκουμε ότι

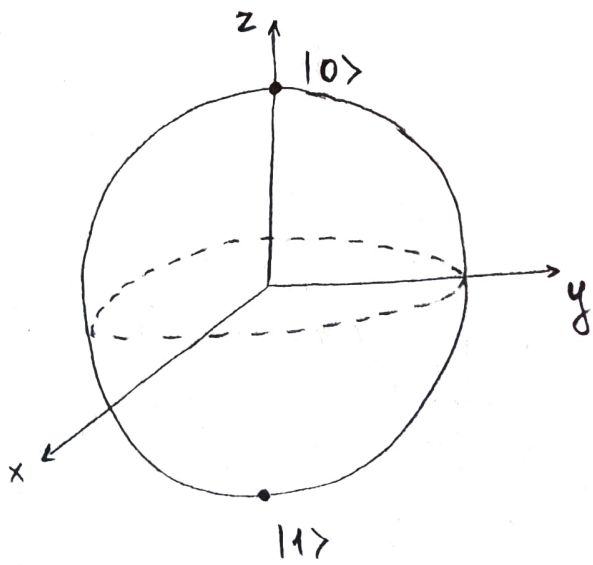
$$\sigma_x |\psi\rangle = e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \quad (306a)$$

$$\sigma_y |\psi\rangle = -i e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \quad (306b)$$

$$\sigma_z |\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle - e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \quad (306c)$$

Σημειώνουμε εδώ ότι κατά την εφαρμογή των τελεστών Pauli πάνω στα διανύσματα της υπολογιστικής βάσης $B = \{|0\rangle, |1\rangle\}$, είδαμε ότι τα διανύσματα αυτά είναι ιδιοδιανύσματα του σ_z αλλά όχι και των σ_x, σ_y (αυτό είναι κάτι αναμενόμενο μιας και από την κβαντομηχανική γνωρίζουμε ότι αν δύο τελεστές περιγράφονται από το ίδιο σύνολο ιδιοδιανυσμάτων, τότε ο μεταθίκτης τους θα ισούται

με μηδέν, κάτι το οποίο δεν ισχύει για τους τε-
 λειους Pauli). Αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα
 $|0\rangle$ και $|1\rangle$ της υπολογιστικής βάσης B θα είναι
 κατά μήκος του άξονα z , καθώς επίσης θα είναι
 αντιδιαμετρικά μεταξύ τους, όπως φαίνεται στο
 παρακάτω σχήμα.



Στη συνέχεια, αν θέλου-
 με να υπολογίσουμε την ανα-
 μενόμενη τιμή των πρώτων τε-
 λειων Pauli για την τυχαία
 κατάσταση $|\psi\rangle$, τότε με τη
 βοήθεια των εξ. (306) έχουμε

$$\langle \psi | \sigma_x | \psi \rangle = \sin \theta \cdot \cos \varphi = x \quad (307a)$$

$$\langle \psi | \sigma_y | \psi \rangle = \sin \theta \cdot \sin \varphi = y \quad (307b)$$

$$\langle \psi | \sigma_z | \psi \rangle = \cos \theta = z \quad (307c).$$

Σημειώστε για τον τελεστή σ_z ότι, μιας και τα διανύσματα $|0\rangle$ και $|1\rangle$ είναι ιδιοδιανύσματα του ίδιου του τελεστή, η αναμενόμενη τιμή της εφ. (307c) είναι ουσιαστικά η προβολή του διανύσματος Bloch πάνω στον άξονα, δηλαδή

$$v_z = \cos\theta = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = |c_0|^2 - |c_1|^2 \quad (308)$$

όπου $c_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ και $c_1 = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}$ οι συντελεστές

της γενικής κατάστασης

Ας θυμόμαστε τώρα από τους πίνακες Pauli και ας

δούμε πώς μπορούμε να περιγράψουμε ένα γενικό

unitary πίνακα ο οποίος περιγράφει, όπως είπαμε,

μία τυχαία στροφή στη σφαίρα Bloch. Με τη βο-

ήθεια του διανύσματος Pauli μπορούμε να γράψουμε ότι μια στροφή γύρω από άξονα \hat{n} είναι

$$\hat{U} = e^{-\frac{i}{2}\varphi \hat{n} \cdot \vec{\sigma}} \quad (309)$$

όπου \hat{n} το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του άξονα περιστροφής n . Έτσι λοιπόν, κάθε unitary μετασχηματισμός μπορεί να γραφεί στην παραπάνω μορφή με απροσδιοριστία μιας φάσης $e^{i\alpha}$, δηλαδή
$$\hat{U} = e^{i\alpha} \cdot e^{-\frac{i}{2}\varphi \hat{n} \cdot \vec{\sigma}}$$
 Η φάση $e^{i\alpha}$ ονομάζεται global phase και μιας και δεν έχει κάποιο φυσικό νόημα συχνά αγνοείται.

Παράδειγμα 1: Θεωρούμε στροφή γύρω από τον άξονα z . Τότε, θα έχουμε ότι το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{n} θα συμπίπτει με το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{z} κατά μήκος του άξονα z , και έτσι θα είναι

$$R_z(a) = e^{-\frac{1}{2}ia\vec{\sigma} \cdot \hat{z}} = e^{-\frac{1}{2}ia\sigma_z} \quad (310)$$

Όπως, από την κβαντομηχανική γνωρίζουμε ότι αν υπάρχει τελεστής \hat{X} ο οποίος έχει ιδιοτιμές χ_i και ιδιοδιανύσματα $|i\rangle$, τότε αν $f(\hat{X})$ μια συνάρτηση του τελεστή αυτού, θα ισχύει ότι

$$f(\hat{X}) = \sum_i f(\chi_i) |i\rangle\langle i| \Rightarrow f(\hat{X}) |i\rangle = f(\chi_i) |i\rangle \quad (311)$$

Με άλλα λόγια η συνάρτηση $f(\hat{X})$ θα περιγράφεται από τα ίδια ιδιοδιανύσματα όπως και ο τελεστής \hat{X} . Εφόσον τώρα τα ιδιοδιανύσματα του σ_z είναι τα διανύσματα της υπολογιστικής βάσης $|0\rangle$ και $|1\rangle$, με αντίστοιχες ιδιοτιμές $+1$ και -1 , τότε μπορούμε να γράψουμε από την εξ. (310) ότι

$$R_z(a) = e^{-\frac{1}{2}ia} |0\rangle\langle 0| + e^{+\frac{1}{2}ia} |1\rangle\langle 1| \quad (312)$$

Αν τώρα θέλουμε να αναπτύξουμε το εκθετικό της εξ. (310), τότε με τη βοήθεια της εξ. (283)

βρίσκουμε ότι

$$R_z(a) = e^{-\frac{1}{2}ia\sigma_z} = \cos\left(\frac{a}{2}\right) \mathbb{1} - i \sin\left(\frac{a}{2}\right) \sigma_z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_z(a) = \cos\left(\frac{a}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - i \sin\left(\frac{a}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_z(a) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{a}{2}\right) - i \sin\left(\frac{a}{2}\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{a}{2}\right) + i \sin\left(\frac{a}{2}\right) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_z(a) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{2}ia} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}ia} \end{bmatrix} = e^{-\frac{1}{2}ia} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{ia} \end{bmatrix} \quad (313)$$

όπου η φάση $e^{-\frac{1}{2}ia}$ είναι η global phase και προ-
 ρει να αγνοηθεί. Εφαρμόζοντας τώρα τον τελεστή

$R_z(a)$, χωρίς τη global phase, πάνω σε γενική κατάσταση $|\psi\rangle$ του qubit βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} R_z(a) |\psi\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{ia} \end{bmatrix} |\psi\rangle = \\ &= (|0\rangle\langle 0| + e^{ia} |1\rangle\langle 1|) \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \right] \\ &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i(a+\varphi)} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \quad (314) \end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν, αν (x, y, z) οι αρχικές συντεταγμένες του διανύσματος $|\psi\rangle$ πάνω σε σφαίρα Bloch

και (x', y', z') οι αντίστοιχες συντεταγμένες του

$R_z(a) |\psi\rangle$, τότε θυμίζοντας ότι $x = \sin\theta \cos\varphi$, $y =$

$= \sin\theta \sin\varphi$ και $z = \cos\theta$, έχουμε ότι

$$x' = \sin\theta \cdot \cos(a+\varphi) = \sin\theta [\cos a \cdot \cos\varphi - \sin a \cdot \sin\varphi] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' = \sin\theta \cos\varphi \cdot \cos a - \sin\theta \sin\varphi \cdot \sin a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' = x \cdot \cos \theta - y \sin \theta \quad (315a)$$

$$y' = \sin \theta \cdot \sin(a + \varphi) = \sin \theta [\sin a \cdot \cos \varphi + \cos a \sin \varphi] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \sin \theta \cos \varphi \cdot \sin a + \sin \theta \sin \varphi \cdot \cos a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = x \sin a + y \cdot \cos a \quad (315b)$$

$$z' = \cos \theta = z \quad (315c)$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ο τελεστής $R_z(a)$ αντιστοιχεί σε μία στροφή με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού κατά μία γωνία a γύρω από τον άξονα z . Μπορεί κανείς να σκεφτεί τη δράση του $R_z(a)$ ως μία στροφή του $|\psi\rangle$ κατά γωνία a με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού, ή ισοδύναμα, ως τη στροφή ολόκληρης της σφαίρας Bloch κατά γωνία a με φορά

ορθότητα εκείνης των δεικτών του ρολογιού.

Την ίδια ανάλυση μπορούμε να κάνουμε και για στροφές γύρω από τους άξονες x και y με φορά αντίθετη εκείνης των δεικτών του ρολογιού, οι οποί-

ες θα περιγράφονται από τους τελεστές $R_x(a) =$

$= e^{-\frac{1}{2}ia\sigma_x}$ και $R_y(a) = e^{-\frac{1}{2}ia\sigma_y}$ αντίστοιχα. Τέλος,

σημειώνουμε ότι εφόσον οι $R_x(a)$, $R_y(a)$ και $R_z(a)$

περιγράφουν στροφή κατά a γύρω από τους άξο-

νες x , y και z αντίστοιχα, είναι λογικό να ανα-

ρίνουμε ότι κάθε στροφή στη σφαίρα Bloch που

θέλουμε να περιγράψουμε θα μπορεί να γραφεί συ-

ναρτήση των στροφών αυτών. Με άλλα λόγια, κά-

θε unitary τελεστής \hat{U} [εξ. (309)] μπορεί να

γραφει συναρτήσεις των $R_x(a)$, $R_y(a)$ και $R_z(a)$,

αφού θεωρώντας $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$ παίρνουμε άνω την

εξ (309) (αγνοώντας την global phase)

$$\hat{U} = e^{-\frac{1}{2}i a \hat{n} \cdot \vec{\sigma}} = e^{-\frac{1}{2}i a n_x \sigma_x} \cdot e^{-\frac{1}{2}i a n_y \sigma_y} \cdot e^{-\frac{1}{2}i a n_z \sigma_z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{U} = R_x(n_x a) \cdot R_y(n_y a) \cdot R_z(n_z a) \quad (316)$$

- Κβαντικές πύλες (quantum gates).

Έως εδώ, έχουμε περιγράψει μία γενική κατάσταση στην οποία μπορεί να βρεθεί ένα qubit και

είδαμε πώς μπορούμε να την απεικονίσουμε γραφικά πάνω σε μία σφαίρα, την σφαίρα Bloch. Στην

συνέχεια, είδαμε πώς μπορούμε να δράσουμε με

unitary μετασχηματισμούς της μορφής $\hat{U} = e^{-\frac{1}{2}i \theta \sigma_k$

($k=1,2,3$) στην γενική αυτή κατάσταση, και πώς

τελικά αλλάζει το ίχνος της πάνω στη σφαίρα Bloch. Οι unitary αυτοί μετασχηματισμοί \hat{U} περιλαμβάνουν όλους τους δυνατούς μετασχηματισμούς που μπορούμε να κάνουμε στη γενική κατάσταση $|\psi\rangle$ του qubit.

Παρ' όλα αυτά, στην Κβαντική Πληροφορία, υπάρχουν unitary τελεστές, οι οποίοι λόγω του μετασχηματισμού που επιφέρουν στην κατάσταση του qubit, έχουν ιδιαίτερη πρακτική σημασία όπως π.χ. για την ανάπτυξη κβαντικών αλγορίθμων και την ανάπτυξη κβαντικών κυκλωμάτων.

Οι unitary αυτοί τελεστές είναι γνωστοί ως κβαντικές πύλες, μία ονομασία που προέκυψε από τις

γνωστές μας λογικές πύλες στην Πληροφορική.

Όπως λοιπόν με τις λογικές πύλες μπορούμε να δράσουμε πάνω στα bits μεταβάλλοντας τα με τρόπο με τον οποίο ερείς επιθυμούμε, έτσι και με τις κβαντικές πύλες (quantum gates) μπορούμε να δράσουμε με συγκεκριμένο τρόπο πάνω σε qubits μεταβάλλοντας την κατάσταση τους με ελεγχόμενο τρόπο.

Ένα παράδειγμα κβαντικών πυλών είναι οι τελεστές

Pauli τους οποίους έχουμε ήδη δει [εξ. (306) \Rightarrow

για να δείτε πιο εύκολα τη δράση τους θεωρεί-

στε $a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ και $b = e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$]. Συγκεκριμέ-

να ο τελεστής Pauli σ_x είναι γνωστός στην

Κβαντική Πληροφορία ως πύλη NOT (NOT gate). Η ονομασία του προέρχεται από το γεγονός ότι, όπως η λογική πύλη NOT στην Πληροφορική έχει την ιδιότητα να μας δίνει αντίθετο αποτέλεσμα από το αρχικό (αν αρχικά το input της πύλης ήταν 0, τότε το output είναι 1, και αντίστροφα), έτσι και ο τελεστής σ_x έχει την ιδιότητα να κάνει την αλλαγή $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ και $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ μιας και

$$\sigma_x |0\rangle = (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) |0\rangle = |1\rangle$$

$$\sigma_x |1\rangle = (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) |1\rangle = |0\rangle$$

Συμβολίζουμε λοιπόν NOT $\equiv \sigma_x$. Προφανώς, εφαρ-

ρόζοντας δύο φορές την πύλη NOT πάνω στην
 κατάσταση του qubit παίρνουμε ξανά την αρχική μας
 κατάσταση αφού $\sigma_x \sigma_x^\dagger = \mathbb{1} \Rightarrow (NOT)(NOT)^\dagger = \mathbb{1}$. Η

πύλη NOT συμβολίζεται ως \oplus . Οι άλλες
 δύο κβαντικές πύλες σ_y και σ_z δεν έχουν κάποιο
 άλλο όνομα και συμβολίζονται ως \boxed{Y} και
 \boxed{Z} , αντίστοιχα.

Στην συνέχεια, ορίζουμε την πύλη \sqrt{NOT} η οποία
 γράφεται

$$\sqrt{NOT} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_x} \quad (317)$$

δηλαδή μπορεί να περιγραφεί ως μία στροφή

κατά $\pi/4$ γύρω από τον άξονα x , αφού

$$e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_x} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathbb{1} + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (318)$$

Η κβαντική αυτή πύλη συμβολίζεται ως $\boxed{\sqrt{NOT}}$ και αν την εφαρμόσουμε δύο διαδοχικές φορές παίρνουμε ότι $\sqrt{NOT} \cdot \sqrt{NOT} = iNOT$ (επιβεβαιώστε το).

Άλλα μία συγγραμική πύλη, είναι η πύλη φάσης (phase gate) και η οποία γράφεται

$$g(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{ia} \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| + e^{ia} |1\rangle\langle 1| \quad (318)$$

Η πύλη αυτή ουσιαστικά προκαλεί μία μετατόπιση φάσης e^{ia} στην κατάσταση $|1\rangle$. Αν θέλουμε να την γράψουμε με το γενικό τύπο της εξ. (309), ο οποίος περιγράφει κάθε unitary τελεστή που μας ενδιαφέρει εδώ, τότε παίρνουμε

$$g(a) = e^{i\frac{1}{2}a} e^{-\frac{i}{2}a\sigma_z} \quad (319)$$

Στη συνέχεια, ως κβαντικές πύλες χρησιμοποιούνται και οι τελεστές $R_x(\alpha)$, $R_y(\alpha)$ και $R_z(\alpha)$, οι οποίοι περιγράφουν μία στροφή κατά α γύρω από τους άξονες x , y και z αντίστοιχα, και τους οποίους είδαμε στο Παράδειγμα 1 παραπάνω. Οι πύλες αυτές γράφονται (ως έχουμε γράψει και νωρίτερα) και συμβολίζονται ως

$$R_x(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}i\alpha\sigma_x} \quad \boxed{X(\alpha)} \quad (320a)$$

$$R_y(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}i\alpha\sigma_y} \quad \boxed{Y(\alpha)} \quad (320b)$$

$$R_z(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}i\alpha\sigma_z} \quad \boxed{Z(\alpha)} \quad (320c).$$

Τέλος, σημειώνουμε την πιο σημαντική κβαντική πύλη (μαζί με τη NOT), η οποία ονομάζεται πύλη Hadamard (Hadamard gate). Η πύλη

Hadamard, σε μορφή πίνακα γράφεται,

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_x + \sigma_z) \quad (321)$$

Για την κβαντική αυτή πύλη έχουμε επιπλέον ότι $H^2 = \mathbb{1}$, καθώς επίσης $H \sigma_x H = \sigma_z$, $H \sigma_y H = -\sigma_y$ και $H \sigma_z H = \sigma_x$. Η εφαρμογή της πύλης Hadamard στα διανύσματα βάσης $|0\rangle$ και $|1\rangle$ της υπολογιστικής βάσης \mathcal{B} , μας δίνει

$$H |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \quad (322a)$$

$$H |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \quad (322b)$$

τα οποία είναι ουσιαστικά τα ίδια διανύσματα του τελεστή σ_x . Τώρα, αν θέλουμε να γράψουμε την

πύλη Hadamard με τη μορφή εκθετικών, τότε
αυτή θα είναι (αποδείξτε το)

$$H = e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_y} \sigma_z \quad (323)$$

ενώ η πύλη αυτή συμβολίζεται αλλά ως \boxed{H}

Τονίζουμε στο σημείο αυτό ότι όλες οι παραπάνω
πύλες που είδαμε εφαρμόζονται πάνω στην κατά-
σταση ενός qubit και για το λόγο αυτό ονομάζο-
νται single qubit gates. Υπάρχουν επιπλέον πύλες
οι οποίες βρίσκουν εφαρμογή στην περίπτωση ό-
που έχουμε δύο qubits και οι πύλες αυτές ονομά-
ζονται two qubit gates (η πιο γνωστή είναι η
CNOT). Με αυτές δεν θα ασχοληθούμε πια και
για την κατανόησή τους χρειάζονται επιπλέον έν-
νοιες, όπως π.χ. του τανυστικού γινομένου.