Κβαντική Οπτική

Εξισώσεις του Maxwell στο κενό (διαφορική μορφή)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \quad (\text{Gauss στον Ηλ.})$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad (\text{Gauss στο Μαγν.})$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Ampère-Maxwell})$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{Faraday})$$

$\vec{E} \equiv$ ηλεκτρικό πεδίο

$\vec{B} \equiv$ μαγνητικό πεδίο

$\varepsilon_0 \equiv$ διηλεκτρική σταθερά του κενού

$\mu_0 \equiv$ μαγνητική διαπερατότητα

Γνωρίζοντας ότι $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$ (ταχύτητα φωτός στο κενό) παίρνουμε το curl της εξ. Faraday και έχουμε ότι

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \xrightarrow[\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}) - \vec{\nabla}^2\vec{F}]{\text{Ampère-Maxwell}} \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{\nabla}^2\vec{E} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \xrightarrow{\text{Gauss στον Ηλ.}} -\vec{\nabla}^2\vec{E} = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}^2\vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

→ τρόπος διάδοσης ΗΜ κύματος στο κενό

→ Λύση της κυματικής εξίσωσης: $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 f(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$, όπου $f(x) \sim \cos(x)$ ή $\sin(x)$, $\vec{E}_0$ μια σταθερά, ω η κυκλική συχνότητα όπου $\omega = 2\pi\nu$ και $k = |\vec{k}| = \omega / c$.

Αρχή της επαλληλίας: Εάν λύση της Δ.Ε. είναι η $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 f(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$, τότε λύση της Δ.Ε. είναι και κάθε γραμμικός συνδυασμός τέτοιων συναρτήσεων, δηλαδή

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_i \vec{E}_i f(\vec{k}_i\cdot\vec{r}-\omega t)$$

$\Rightarrow$ το γεγονός αυτό προκύπτει από το ότι η διαφόριση είναι μια γραμμική διαδικασία.

Στην Κβαντική Οπτική είναι σύνηθες να αναλύουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε δύο μέρη: το πρώτο από αυτά τα μέρη έχει να κάνει με θετικές συχνότητες και το δεύτερο με αρνητικές. Συμβολίζοντας με $\vec{E}^+(\vec{r},t)$ και $\vec{E}^-(\vec{r},t)$ το πρώτο και το δεύτερο μέρος αντίστοιχα, έχουμε ότι

$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}^+(\vec{r},t) + \vec{E}^-(\vec{r},t)$, όπου $\vec{E}^+(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\sum_n \mathcal{E}_n(\vec{r})\, e^{-i\omega_n t}$

καθώς και $\vec{E}^-(\vec{r},t) = [\vec{E}^+(\vec{r},t)]^*$,

όπου $\mathcal{E}_n(\vec{r})$ μια εν γένει μιγαδική συνάρτηση και n τα διάφορα modes τα οποία περιέχονται στο συνολικό ηλεκτρικό πεδίο. Τη φυσική σημασία του μαθηματικού αυτού τρικ μπορεί κανείς να τη δει αν ασχοληθεί με την κβαντική θεωρία ανίχνευσης του φωτός.

Εδώ θα ασχοληθούμε κυρίως με μονοχρωματικά ή σχεδόν μονοχρωματικά (quasi-monochromatic) πεδία. Ένα τέτοιο πεδίο το οποίο διαδίδεται κατά τη διεύθυνση z αλλά η πόλωσή του είναι κατά τον άξονα x, περιγράφεται από τη σχέση

$$\vec{E}^{+}(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\hat{x}\,E_0(z,t)\,e^{i[kz-\omega t-\varphi(z,t)]},$$

όπου $E_0(z,t)$ το πλάτος του κύματος και ω η κεντρική του συχνότητα. Αν το κύμα είναι πραγματικά μονοχρωματικό, τότε τα E_0 και φ είναι ανεξάρτητα του χώρου και του χρόνου. Όμως, στη γενικότερη περίπτωση των quasi-monochromatic πεδίων θεωρούμε ότι ισχύουν οι εξής ανισότητες:

$$\left.\begin{array}{ll} \left|\frac{\partial E_0}{\partial t}\right| \ll \omega E_0 , & \left|\frac{\partial E_0}{\partial z}\right| \ll k E_0 \\ \left|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right| \ll \omega , & \left|\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right| \ll k \end{array}\right\}$$

slowly-varying amplitude and phase approximation (SVAP approx.)

Αντικαθιστώντας την έκφραση για το $\vec{E}^{+}(\vec{r},t)$ στην κυματική Δ.Ε. για το ηλεκτρικό πεδίο (εάν $\vec{E}(\vec{r},t)$ είναι λύση της κυματικής Δ.Ε. και ισχύει ότι $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}^{+}(\vec{r},t) + \vec{E}^{-}(\vec{r},t)$, τότε από την αρχή της επαλληλίας προκύπτει ότι και τα $\vec{E}^{+}(\vec{r},t)$, $\vec{E}^{-}(\vec{r},t)$ θα είναι λύσεις της κυματικής εξίσωσης) και λαμβάνοντας υπόψιν τη SVAP approx. καθώς επίσης αμελώντας τη συνεισφορά των όρων $\frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2}$, $\frac{\partial \varphi^2}{\partial t^2}$ και $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$, παίρνουμε ότι

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E_0}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial E_0}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Αναγάγαμε τη δευτεροτάξια Δ.Ε. σε δύο Δ.Ε. πρώτου βαθμού → Αυτό θα φανεί χρήσιμο για την περίπτωση που μελετάμε διάδοση Η/Μ κύματος σε ένα μέσο.

SVAP approx.: Όχι πάντα καλή προσέγγιση. Π.χ. δεν εφαρμόζεται στη φυσική πλάσματος και δεν λαμβάνει υπόψιν τη σκεδαζόμενη προς τα πίσω ακτινοβολία

Εξισώσεις Maxwell μέσα σε διηλεκτρικό μέσο

$$\left.\begin{aligned} &\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{free} && \text{(Gauss στον ΗΔ.)} \\ &\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 && \text{(Gauss στο Μαγν.)} \\ &\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} && \text{(Ampère - Maxwell)} \\ &\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && \text{(Faraday)} \end{aligned}\right\}$$

$\vec{D} \equiv$ διηλεκτρική μετατόπιση

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} + \vec{P}$, όπου $\vec{P}$ η πόλωση.

$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} - \vec{M}$, όπου $\vec{M}$ η μαγνήτιση

Για τα διηλεκτρικά μέσα που θα μελετήσουμε θα είναι $\mu = \mu_0$ και $\vec{M} = \vec{0}$. Επίσης, σε όλα τα παραδείγματα θεωρούμε ότι $\rho_{free} = 0$. Επιπλέον, για την πυκνότητα ρεύματος $\vec{J}$ ισχύει από

από το νόμο του Ohm $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, όπου σ η αγωγιμότητα του μέσου.

Παίρνοντας και πάλι το curl της εξ. Faraday και με τη βοήθεια των υπόλοιπων εξισώσεων Maxwell βρίσκουμε ότι η αντίστοιχη Δ.Ε. για το ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\boxed{-\vec{\nabla}^2 \vec{E} + \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}}$$

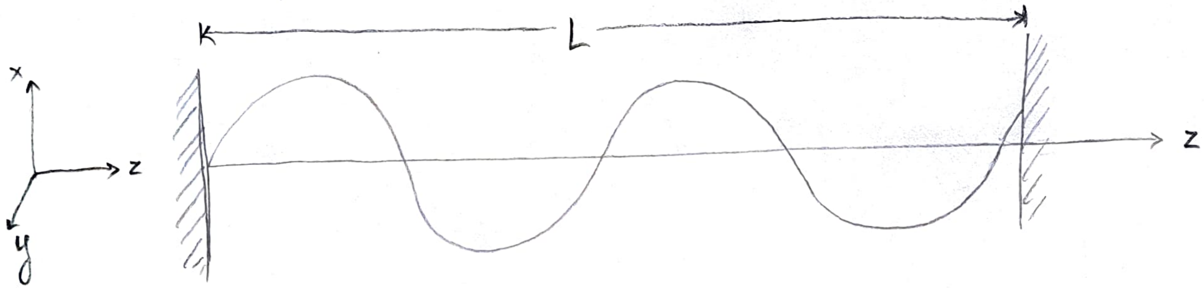
, όπου $c^2 = 1/\varepsilon\mu$.

Ο όρος $\partial \vec{J}/\partial t$ έχει να κάνει με τις απώλειες του μέσου προς το περιβάλλον του. Θεωρώντας ένα μέσο χωρίς απώλειες, αγνοούμε το συγκεκριμένο όρο στην παραπάνω εξίσωση.

Για ένα σχεδόν μονοχρωματικό πεδίο η πόλωση $\vec{P}$ που αυτό προκαλεί στο μέσο, θα είναι επίσης σχεδόν μονοχρωματική αλλά θα διαφέρει κατά μία φάση από το πεδίο.

Ως εδώ έχουμε αντιμετωπίσει το φως ως ένα κλασικό πεδίο μιας και οι μόνες εξισώσεις που έχουμε χρησιμοποιήσει είναι οι εξισώσεις Maxwell. Αντιμετωπίζοντας το φως ως ένα κλασικό πεδίο είναι πολλές φορές αρκετό για να εξηγήσουμε πολλά φαινόμενα στην Κβαντική Οπτική. Παρ' όλα αυτά, αυτό δεν είναι αρκετό για όλα τα φαινόμενα μιας και για κάποια φαινόμενα θα πρέπει να θεωρήσουμε ότι το Η/Μ πεδίο είναι κβαντισμένο (τέτοια φαινόμενα είναι για παράδειγμα η αυθόρμητη εκπομπή, η μετατόπιση Lamb, η δύναμη Casimir καθώς και η στατιστική των φωτονίων τα οποία εκπέμπονται από ένα laser ⇒ τα φαινόμενα αυτά ερμηνεύονται με τη βοήθεια των vacuum flactuations οι οποίες εμφανίζονται μόνο στην κβαντική θεωρία).

Για την κβάντωση του Η/Μ πεδίου θεωρείστε ότι βρισκόμαστε εντός μίας κοιλότητας μήκους L.



Προφανώς, το Η/Μ πεδίο εντός της κοιλότητας θα περιγράφεται από τη Δ.Ε. $\vec{\nabla}^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$, η οποία έχει προκύψει από τις εξισώσεις Maxwell στον κενό χώρο. Θεωρώντας ότι το ηλεκτρικό μας πεδίο είναι πολωμένο κατά τη διεύθυνση $\hat{x}$ και διαδίδεται κατά τη $\hat{z}$, μπορούμε να γράψουμε τις λύσεις της Δ.Ε. ως ένα άθροισμα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, εκμεταλλευόμενοι και την αρχή της επαλληλίας που αναφέραμε προηγουμένως. [κανονικός τρόπος ταλάντωσης (normal mode) ενός συστήματος είναι ένα σχέδιο κίνησης στο οποίο όλα τα μέρη του συστήματος κινούνται ημιτονοειδώς με την ίδια συχνότητα και με μία σταθερή σχέση φάσης. Η ελεύθερη κίνηση που περιγράφεται από τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης πραγματοποιείται σε σταθερές συχνότητες]. Έτσι λοιπόν θα είναι

$$E_x(z,t) = \sum_m A_m q_m(t) \sin(k_m z) \quad , \quad m = 1, 2, 3, \ldots \qquad (1)$$

όπου $q_m(t)$ είναι το πλάτος του κανονικού τρόπου ταλάντωσης σε χρόνο t και έχει διαστάσεις μήκους, ενώ $k_m = m\pi/L$ είναι ο κυματάριθμος τον οποίο βρίσκουμε από τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματός μας, μιας και θέλουμε το ηλεκτρικό πεδίο να μηδενίζεται στα άκρα της κοιλότητας.

Επιπλέον, είναι $A_m = \sqrt{\dfrac{2\omega_m^2 m_m}{\varepsilon_0 V}}$, όπου $\omega_m = k_m c$ είναι η ιδιοσυχνότητα της κοιλότητας, V είναι ο όγκος της κοιλότητας, ενώ m_m είναι μία σταθερά η οποία έχει διαστάσεις μάζας. Την ποσότητα A_m μπορεί κανείς να την υπολογίσει με τη βοήθεια των συνοριακών συνθηκών καθώς και με τη βοήθεια της πυκνότητας καταστάσεων της κοιλότητας.

(ο ισοδύναμος μηχανικός ταλαντωτής θα έχει μάζα m_m και συντεταγμένες q_m και αυτός είναι ο μόνος λόγος για τον οποίο στη σταθερά A_m συμπεριλάβαμε τον όρο m_m· από εδώ και στο εξής θα τον παραλείπουμε).

Εφόσον το Η/Μ κύμα διαδίδεται κατά τον άξονα z και το ηλεκτρικό πεδίο βρίσκεται κατά μήκος του άξονα x, αυτό σημαίνει ότι το μαγνητικό πεδίο θα είναι κατά τον άξονα y και συγκεκριμένα θα είναι

$$B_y(z,t) = \sum_m A_m \frac{\dot{q}_m(t)\,\varepsilon_0 \mu_0}{k_m} \cos(k_m z) \,, \qquad (2)$$

το οποίο το υπολογίσαμε με τη βοήθεια της εξίσωσης Ampère-Maxwell.

Γνωρίζουμε όμως από τον Ηλ/σμό ότι η πυκνότητα ενέργειας του Η/Μ πεδίου εντός της κοιλότητας είναι

$$H = \frac{1}{2}\int_V dV \left(\varepsilon_0 E_x^2 + \frac{1}{\mu_0} B_y^2 \right) \qquad (3)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται στον όγκο της κοιλότητας. Ουσιαστικά, το H είναι η κλασική Χαμιλτονιανή μας και εκφράζει τη συνολική ενέργεια του κλασικού ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου. Αντικαθιστώντας τα $E_x(z,t)$ και $B_y(z,t)$ στην έκφραση για την κλασική Χαμιλτονιανή, βρίσκουμε ότι

$$H = \frac{1}{2}\sum_m \int dx\,dy\,dz \left[\varepsilon_0 A_m^2 q_m^2(t) \sin^2(k_m z) + \frac{1}{\cancel{\mu_0}} A_m^2 \frac{\dot q_m^2(t)\,\varepsilon_0^2\,\cancel{\mu_0^2}}{k_m^2}\cos^2(k_m z)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2}\sum_m \frac{2\omega_m^2}{\varepsilon_0 V}\int dx\,dy\,dz\left[\varepsilon_0 q_m^2(t)\sin^2(k_m z) + \dot q_m^2(t)\,\frac{\varepsilon_0^2\mu_0}{\omega_m^2/c^2}\cdot\cos^2(k_m z)\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{\cancel{2}}\sum_m \frac{\cancel{2}\,\omega_m^2}{\cancel{\varepsilon_0}V}\int dx\,dy\,dz\left[\cancel{\varepsilon_0}\, q_m^2(t)\sin^2(k_m z) + \dot q_m^2(t)\,\frac{\cancel{\varepsilon_0^2}\,\cancel{\mu_0}\cdot c^2}{\omega_m^2}\cos^2(k_m z)\right]$$

$$\Rightarrow H = \sum_m \frac{\omega_m^2}{V}\int dx\,dy\left[q_m^2(t)\int \cancelto{1/2}{\sin^2(k_m z)}\,dz + \dot q_m^2(t)\cdot\frac{1}{\omega_m^2}\int \cancelto{1/2}{\cos^2(k_m z)}\,dz\right]$$

$$\Rightarrow H = \sum_m \frac{\omega_m^2}{\cancel{V}}\cdot\frac{1}{2}\cancel{V}\left[q_m^2(t) + \frac{\dot q_m^2(t)}{\omega_m^2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2}\sum_m\left[\dot q_m^2(t) + \omega_m^2 q_m^2(t)\right] \qquad (4)$$

Η ερμηνεία της παραπάνω εξίσωσης είναι ότι ο εκάστοτε κανονικός τρόπος ταλάντωσης m συμπεριφέρεται σαν ένας αρμονικός ταλαντωτής μοναδιαίας μάζας. Εφόσον η ποσότητα $q_m(t)$ έχει διαστάσεις θέσης, είναι λογικό να αναμένουμε η ποσότητα $\dot q_m(t)$ να έχει διαστάσεις ταχύτητας. Επειδή όμως έχουμε θεωρήσει ότι η μάζα είναι μοναδιαία μπορούμε με ασφάλεια να πούμε ότι η ποσότητα $\dot q_m(t)$ εκφράζει την ορμή, δηλαδή $p_m(t) = \dot q_m(t)$. (φαίνεται και με τη σύγκριση της ανωτέρω κλασικής Χαμιλτονιανής με την αντίστοιχη του μηχανικού αρμονικού ταλαντωτή). Έτσι λοιπόν, μιας και οι ποσότητες $q_m(t)$ και $p_m(t)$ προέρχονται από την έκφραση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου αντίστοιχα, μπορούμε να πούμε με κάποια σχετική ασάφεια ότι το ηλεκτρικό πεδίο παίζει το ρόλο της θέσης ενώ το μαγνητικό πεδίο παίζει το ρόλο της ορμής.

Στη συνέχεια, για να προχωρήσουμε στην κβάντωση του Η/Μ πεδίου θα πρέπει να αντιμετωπίσουμε τις συναρτήσεις της θέσης και της ορμής ως τελεστές. Συμβολίζοντας με $\hat{q}_m$ τον τελεστή θέσης και με $\hat{p}_m$ τον τελεστή ορμής, γράφουμε τις μεταθετικές σχέσεις που ισχύουν για τις ποσότητες αυτές ως

$$[\hat{q}_m, \hat{p}_{m'}] = i\hbar\delta_{mm'}$$

$$[\hat{q}_m, \hat{q}_{m'}] = [\hat{p}_m, \hat{p}_{m'}] = 0.$$

Σε συνέχεια της ανάλυσής μας, είναι βολικό να ορίσουμε δυο καινούργιους τελεστές $\hat{a}$ και $\hat{a}^+$ με τον εξής τρόπο:

$$\hat{a}_m = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_m}}(\omega_m\hat{q}_m + i\hat{p}_m) \quad \text{και} \quad \hat{a}_m^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_m}}(\omega_m\hat{q}_m - i\hat{p}_m) \qquad (5)$$

Ο τελεστής $\hat{a}_m^+$ ονομάζεται τελεστής δημιουργίας, ενώ ο $\hat{a}_m$ τελεστής καταστροφής (ο λόγος για τη συγκεκριμένη ονομασία θα γίνει προφανής στη συνέχεια). Από τις παραπάνω σχέσεις για τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής έχουμε ότι

$$\hat{a}_m^+ + \hat{a}_m = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_m}} \cdot 2\omega_m \hat{q}_m \Rightarrow \hat{q}_m = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_m}}\,(\hat{a}_m^+ + \hat{a}_m)$$

$$\hat{a}_m - \hat{a}_m^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_m}}\, 2i\hat{p}_m \Rightarrow i\hat{p}_m = \sqrt{\frac{\hbar\omega_m}{2}}\,(\hat{a}_m - \hat{a}_m^+)$$

Επομένως, οι τελεστές για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο θα είναι

$$\hat{E}_x(z,t) = \sum_m \sqrt{\frac{\cancel{2}\omega_m^{\cancel{2}}}{\varepsilon_0 V} \cdot \frac{\hbar}{\cancel{2\omega_m}}}\,(\hat{a}_m + \hat{a}_m^+)\sin(k_m z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{E}_x(z,t) = \sum_m \mathcal{E}_{0m}\,(\hat{a}_m + \hat{a}_m^+)\sin(k_m z), \quad \text{όπου} \quad \mathcal{E}_{0m} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_m}{\varepsilon_0 V}}$$

$$\hat{B}_y(z,t) = \sum_m \sqrt{\frac{\cancel{2}\omega_m^2}{\varepsilon_0 V} \cdot \frac{\hbar\omega_m}{\cancel{2}}} \cdot \frac{\varepsilon_0\mu_0}{k_m}\,(\hat{a}_m - \hat{a}_m^+)\cos(k_m z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{B}_y(z,t) = \sum_m B_{0m}\,(\hat{a}_m - \hat{a}_m^+)\cos(k_m z), \quad \text{όπου} \quad B_{0m} = \sqrt{\frac{\hbar\varepsilon_0\omega_m^3}{V}} \cdot \frac{\mu_0}{k_m}.$$

Οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής που ορίσαμε παραπάνω υπακούουν στις μεταθετικές σχέσεις (αποδείξτε το)

$$[\hat{a}_m, \hat{a}_{m'}^+] = \delta_{mm'}$$

$$[\hat{a}_m^+, \hat{a}_{m'}^+] = [\hat{a}_m, \hat{a}_{m'}] = 0$$

Επίσης, η Χαμιλτονιανή της εξ. (4) γίνεται

$$\hat{H} = \hbar \sum_m \omega_m \left(\hat{a}_m^+ \hat{a}_m + \frac{1}{2} \right) \qquad (6)$$

Ό,τι έχουμε πει μέχρι τώρα αφορά το Η/Μ πεδίο σε μία κοιλότητα πεπερασμένων διαστάσεων. Πριν προχωρήσουμε στην περαιτέρω ανάλυση των τελεστών αναβίβασης και καταβίβασης ας δούμε πώς μπορούμε να κάνουμε την κβάντωση του Η/Μ πεδίου στον ελεύθερο χώρο.

Στην περίπτωση όπου θεωρήσαμε το Η/Μ πεδίο εντός μίας πεπερασμένης κοιλότητας αντιμετωπίσαμε το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο ως στάσιμα κύματα [εξ' ου και η εξάρτηση από $\cos(k_x z)$ και $\sin(k_x z)$]. Όμως, στην περίπτωση του ελεύθερου χώρου θα πρέπει να τα αντιμετωπίσουμε ως οδεύοντα κύματα. Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα αυτό θα ξεκινήσουμε και πάλι από τις εξισώσεις Maxwell που αναφέραμε στην αρχή. Εκμεταλλευόμενοι το διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}(\vec{r},t)$, το οποίο ορίζεται ως $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t)$, το οποίο υπακούει και αυτό στην κυματική εξίσωση στον ελεύθερο χώρο,

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

καθώς και με τη χρήση της βαθμίδας Coulomb, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)=0$, έχουμε ότι $\vec{E}(\vec{r},t) = -\dfrac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}$.

Μπορούμε να θεωρήσουμε στη συνέχεια της ανάλυσής μας ότι ο ελεύθερος χώρος μπορεί να προσεγγισθεί σαν μία μεγάλη κυβική κοιλότητα, της οποίας οι διαστάσεις να είναι πολύ μεγαλύτερες από οτιδήποτε υπάρχει στο εσωτερικό της. Έτσι λοιπόν, αν συμβολίσουμε με L την πλευρά αυτής της κοιλότητας θα θεωρούμε κάθε φορά ότι $L\to\infty$. Προσέξτε ότι τώρα λόγω του ότι μελετάμε το Η/Μ πεδίο στο χώρο, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο εξαρτώνται από $\vec{r}$, ενώ στο παράδειγμα της μονοδιάστατης κοιλότητας είχαμε εξάρτηση από τη συνιστώσα x. Τώρα, λόγω του ότι θεωρήσαμε το χώρο ως μία πολύ μεγάλη κυβική κοιλότητα ακμής L μπορούμε να εφαρμόσουμε και πάλι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες στα "άκρα" της κοιλότητας αυτής, όπως κάναμε και στη μονοδιάστατη κοιλότητα. Έτσι λοιπόν, για μία από τις τρεις διευθύνσεις του χώρου, έστω τη x, μπορούμε να γράψουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο θα είναι ένα οδεύον κύμα, θα υπακούει στη συνθήκη

$$e^{ik_x \cdot x} = e^{ik_x(x+L)} \qquad (7)$$

από την οποία συνεπάγεται ότι

$$k_x = n_x \cdot \frac{2\pi}{L} \quad , \quad n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (8)$$

Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο και για τις άλλες διευθύνσεις, έχουμε ότι

$$k_y = n_y \cdot \frac{2\pi}{L} \quad , \quad n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (9)$$

$$k_z = n_z \cdot \frac{2\pi}{L} \quad , \quad n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (10)$$

Από τα παραπάνω, και δεδομένου ότι ο κυματάριθμος $\vec{k}$ γράφεται ως $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$, προκύπτει ότι

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z) \qquad (11)$$

Προφανώς, το μέτρο του κυματάριθμου $|\vec{k}|$ θα σχετίζεται με την κυκλική συχνότητα ω_k, και συγκεκριμένα θα είναι

$k \equiv |\vec{k}| = \omega_k / c$.

Στο σημείο αυτό ξεκινάει να φαίνεται πόσο χρήσιμη είναι η θεώρηση που κάναμε για το χώρο αντιμετωπίζοντάς τον ως μία κυβική κοιλότητα ακμής L. Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, ένας κανονικός τρόπος ταλάντωσης χαρακτηρίζεται από το σύνολο (n_x, n_y, n_z), όπου n_x, n_y, n_z είναι οι ακέραιοι αριθμοί που είδαμε και προηγουμένως. Αν τώρα θέλουμε να δούμε πόσοι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης υπάρχουν στις περιοχές $\Delta n_x, \Delta n_y, \Delta n_z$, τότε αυτό μπορούμε να το υπολογίσουμε από την εξίσωση

$$\Delta n = \Delta n_x \cdot \Delta n_y \cdot \Delta n_z = 2\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \Delta k_x \, \Delta k_y \, \Delta k_z \qquad (12)$$

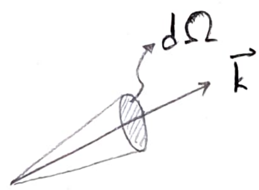
Στην παραπάνω εξίσωση ο παράγοντας 2 έχει προέλθει από το γεγονός ότι κατά τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος έχουμε δύο δυνατές κατευθύνσεις πόλωσης. Δεδομένου ότι το $L \to \infty$ σε σύγκριση με το μήκος κύματος του πεδίου μπορούμε να γράψουμε την εξ. (12) ως ένα διαφορικό, και συγκεκριμένα

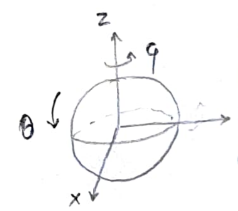
$$dn = 2 \cdot \frac{V}{8\pi^3} \, dk_x \cdot dk_y \cdot dk_z \qquad (13)$$

όπου $V = L^3$. Εκφράζοντας τώρα τον κυματάριθμο στον k-χώρο σε σφαιρικές συντεταγμένες, $\vec{k} = k(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)$, μπορούμε να γράψουμε το παραπάνω διαφορικό ως

$$dn = 2\frac{V}{8\pi^3} k^2 dk\, d\Omega \qquad (14)$$

όπου $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ είναι το στοιχείο της στερεάς γωνίας γύρω από τη διεύθυνση του k, όπως φαίνεται στο σχήμα





$0 \le \theta \le \pi$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$\Omega = \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $k = \omega_k / c$ και ολοκληρώνοντας τη στερεά γωνία $d\Omega$ βρίσκουμε ότι

$$(14) \Rightarrow dn = 2\frac{V}{8\pi^3} \cdot \frac{\omega_k^2}{c^3}\, d\omega_k\, d\Omega \xrightarrow[\text{στερεά γωνία } d\Omega]{\text{ολοκλήρωση για τη}}$$

αριθμός κανονικών τρόπων ταλάντωσης σε όλες τις διευθύνσεις στην περιοχή από k έως k+dk $= V\frac{k^2}{\pi^2}dk = V\rho_k\, dk$ (15)

όπου η ποσότητα $\rho_k dk$ είναι ο αριθμός των κανονικών τρόπων ταλάντωσης ανά μονάδα όγκου (πυκνότητα κανονικών τρόπων ταλάντωσης). Χρησιμοποιώντας στην παραπάνω εξίσωση τη σχέση $k = \omega_k / c$ βρίσκουμε ότι

αριθμός κανονικών τρόπων ταλάντωσης σε όλες τις διευθύνσεις στην περιοχή από ω_k έως $\omega_k + d\omega_k$ $= V \dfrac{\omega_k^2}{\pi^2 c^3} d\omega_k = V \rho(\omega_k)\, d\omega_k$

όπου $\rho(\omega_k)\, d\omega_k$ είναι η πυκνότητα των κυκλικών συχνοτήτων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης. Προφανώς είναι $\rho(\omega_k) = \dfrac{\omega_k^2}{\pi^2 c^3}$.

Αν θέλουμε τώρα να εκφράσουμε το διανυσματικό δυναμικό με τη βοήθεια των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, παίρνουμε

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, s} \hat{e}_{\vec{k},s} \left[A_{\vec{k},s}(t)\, e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} + A^*_{\vec{k},s}\, e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} \right] \qquad (16)$$

όπου $\vec{A}_{\vec{k},s}(t)$ είναι το μιγαδικό πλάτος του διανυσματικού δυναμικού και $\hat{e}_{\vec{k},s}$ είναι το διάνυσμα κατά τη διεύθυνση της πόλωσης. Προφανώς, έχουμε εκφράσει το $\vec{A}(\vec{r},t)$ συναρτήσει όλων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης (άθροισμα στα $\vec{k}$) καθώς και όλων των πιθανών διευθύνσεων της πόλωσης (άθροισμα στα s). Το άθροισμα λοιπόν στα $\vec{k}$ είναι ουσιαστικά το άθροισμα πάνω στο σύνολο των ακεραίων (n_x, n_y, n_z) ενώ το άθροισμα στα s εκφράζει τις δύο πιθανές διευθύνσεις της πόλωσης. Οι διευθύνσεις αυτές της πόλωσης θα είναι ορθογώνιες μεταξύ τους, δηλαδή $\vec{e}_{\vec{k},s} \cdot \vec{e}_{\vec{k},s'} = \delta_{ss'}$, ενώ από τη βαθμίδα Coulomb προκύπτει ότι

$$\vec{k} \cdot \hat{e}_{\vec{k},s} = 0 \qquad (17)$$

Η εξ. (17) είναι και ο λόγος για τον οποίο θεωρήσαμε εξ' αρχής τη βάθμωση Coulomb, μιας και η διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου (πόλωση του πεδίου) θα πρέπει να είναι πάντοτε κάθετη στη διεύθυνση διάδοσής του. Επιπλέον, για τις δύο διευθύνσεις της πόλωσης ισχύει ότι

$$\hat{e}_{\vec{k},1} \times \hat{e}_{\vec{k},2} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \qquad (18)$$

και ουσιαστικά τα διανύσματα $\vec{e}_{\vec{k},1}$, $\vec{e}_{\vec{k},2}$, $\vec{k}$ σχηματίζουν ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων. Σημειώνουμε επίσης ότι, για τον ελεύθερο χώρο, ο οποίος περιέχει έναν άπειρο αριθμό καταστάσεων, εάν θέλουμε να μετατρέψουμε το άθροισμα $\sum_k$ σε ολοκλήρωμα, η εξ. (15) μας υποδεικνύει ότι

$$\sum_k \longrightarrow \frac{V}{\pi^2} \int k^2 \, dk$$

Αντικαθιστώντας τώρα τη μορφή του $\vec{A}(\vec{r},t)$ η οποία δίνεται στην εξ. (16) στην κυματική εξίσωση την οποία υπακούει, βρίσκουμε για το μιγαδικό χρονοεξαρτώμενο πλάτος $A_{\vec{k}s}(t)$,

$$\frac{d^2}{dt^2} A_{\vec{k},s}(t) + c^2 k^2 A_{\vec{k},s}(t) = 0 \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} A_{\vec{k},s}(t) + \omega_k^2 A_{\vec{k},s}(t) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{\vec{k},s}(t) = A_{\vec{k},s}(0)\, e^{-i\omega_k t} ,$$

(αντίστοιχη σχέση θα έχουμε και για τα μιγαδικά συζυγές $A^*_{\vec{k},s}(t)$)

όπου από εδώ και στο εξής θα συμβολίζουμε $A_{\vec{k},s}(0) \equiv A_{\vec{k},s}$.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα βρίσκουμε για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο στον ελεύθερο χώρο,

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r},t) = i \sum_{\vec{k},s} \omega_k \hat{e}_{\vec{k},s} \left[A_{\vec{k},s}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} - A^*_{\vec{k},s}\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} \right] \quad (19)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{i}{c} \sum_{\vec{k},s} \omega_k (\vec{\kappa} \times \hat{e}_{\vec{k},s}) \left[A_{\vec{k},s}\, e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega_k t)} - A^*_{\vec{k},s}\, e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega_k t)} \right] \quad (20)$$

όπου $\vec{\kappa} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$. Από την εξίσωση

$$H = \frac{1}{2} \int_V dV \left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) \quad (21)$$

μπορεί κανείς να υπολογίσει, ύστερα από λίγη άλγεβρα, τη συνολική ενέργεια του Η/Μ πεδίου. Πραγματοποιώντας λοιπόν τις πράξεις βρίσκουμε ότι

$$H = 2\varepsilon_0 V \sum_{\vec{k},s} \omega_k^2 A_{\vec{k},s} A^*_{\vec{k},s} \qquad (22)$$

Στη συνέχεια, στόχος μας είναι να πραγματοποιήσουμε την κβάντωση του Η/Μ πεδίου στον ελεύθερο χώρο. Για να πραγματοποιήσουμε την κβάντωση του πεδίου θα πρέπει να φέρουμε την εξ. (22) στη μορφή της εξ. (4) έτσι ώστε να εργαστούμε με παρόμοιο τρόπο όπως κάναμε και στην περίπτωση της μονοδιάστατης κοιλότητας. Για το λόγο αυτό θέτουμε

$$A_{\vec{k},s} = \frac{1}{2\omega_k(\varepsilon_0 V)^{1/2}} \left(\omega_{\vec{k}} q_{\vec{k},s} + i p_{\vec{k},s}\right) \qquad (23)$$

$$A^*_{\vec{k},s} = \frac{1}{2\omega_k(\varepsilon_0 V)^{1/2}} \left(\omega_k q_{\vec{k},s} - i p_{\vec{k},s}\right) \qquad (24)$$

όπου $q_{\vec{k},s}$ και $p_{\vec{k},s}$ οι μεταβλητές της θέσης και της ορμής. Αντικαθιστώντας τις εξ. (23) και (24) στην εξ (22) βρίσκουμε τελικά ότι

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k},s} \left(p^2_{\vec{k},s} + \omega_k^2 q^2_{\vec{k},s}\right) \qquad (25)$$

Με τη βοήθεια λοιπόν των εξ. (23), (24) καταφέραμε να φέρουμε την εξίσωση για την ολική ενέργεια του Η/Μ πεδίου στην ίδια μορφή με εκείνη του μηχανικού αρμονικού ταλαντωτή.

Όπως κάναμε και στην περίπτωση της μονοδιάστατης κοιλότητας, για να πάρουμε την κβάντωση του πεδίου θα πρέπει να θεωρήσουμε στην εξ. (25) τους αντίστοιχους τελεστές για τη θέση και την ορμή. Έτσι λοιπόν, οι τελεστές αυτοί θα υπακούουν στις εξής μεταθετικές σχέσεις:

$$[\hat{q}_{\vec{k},s}, \hat{q}_{\vec{k}',s'}] = [\hat{p}_{\vec{k},s}, \hat{p}_{\vec{k}',s'}] = 0$$

$$[\hat{q}_{\vec{k},s}, \hat{p}_{\vec{k}',s'}] = i\hbar\,\delta_{\vec{k}\vec{k}'}\,\delta_{ss'}$$

Όπως κάναμε και προηγουμένως για τη μονοδιάστατη κοιλότητα, έτσι και τώρα θα ορίσουμε τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής από τις σχέσεις

$$\hat{a}_{\vec{k},s} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}\left(\omega_k\,\hat{q}_{\vec{k},s} + i\,\hat{p}_{\vec{k},s}\right) \quad \text{και} \quad \hat{a}^{+}_{\vec{k},s} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}\left(\omega_k\cdot\hat{q}_{\vec{k},s} - i\,\hat{p}_{\vec{k},s}\right) \qquad (26)$$

Από τον ορισμό τους συμπεραίνουμε ότι οι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής θα υπακούουν στις σχέσεις

$$[\hat{a}_{\vec{k},s}, \hat{a}_{\vec{k}',s'}] = [\hat{a}^{+}_{\vec{k},s}, \hat{a}^{+}_{\vec{k}',s'}] = 0$$

$$[\hat{a}_{\vec{k},s}, \hat{a}^{+}_{\vec{k}',s'}] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{ss'}$$

Με τη βοήθεια των τελεστών δημιουργίας και καταστροφής, η συνολική ενέργεια του πεδίου η οποία δίνεται από την εξ. (25) είναι

$$H = \sum_{\vec{k},s} \hbar\omega_k \left(\hat{a}^{+}_{\vec{k},s}\hat{a}_{\vec{k},s} + \frac{1}{2}\right) = \sum_{\vec{k},s} \hbar\omega_k \left(\hat{n}_{\vec{k},s} + \frac{1}{2}\right) \qquad (27)$$

όπου $\hat{n}_{\vec{k},s} = \hat{a}^{+}_{\vec{k},s}\hat{a}_{\vec{k},s}$ ονομάζεται number operator και ουσιαστικά μας δίνει τον αριθμό των φωτονίων τα οποία χαρακτηρίζονται από τους αριθμούς $\vec{k}$ και s.

Η παραπάνω ανάλυση προέκυψε από την προσπάθειά μας να γράψουμε το Η/Μ πεδίο ως μία επαλληλία των κανονικών τρόπων ταλάντωσης. Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης είναι ανεξάρτητοι ο ένας από τον άλλο, δηλαδή δεν υπάρχει κάποια σύζευξη μεταξύ τους. Εάν γράψουμε την εξίσωση ιδιοτιμών για τον number operator,

$$\hat{n}_{\vec{k},s}|n_{\vec{k},s}\rangle = n_{\vec{k},s}|n_{\vec{k},s}\rangle \qquad (28)$$

αυτό σημαίνει ότι το εκάστοτε σύνολο $|n_{\vec{k},s}\rangle$ θα αντιστοιχεί και σε ένα κανονικό τρόπο ταλάντωσης.

Από τις εξ. (23), (24) και (26) μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\hat{A}_{\vec{k},s} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0 V}}\, \hat{a}_{\vec{k},s} \quad \text{και} \quad \hat{A}^{+}_{\vec{k},s} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0 V}}\, \hat{a}^{+}_{\vec{k},s} \qquad (29)$$

και έτσι, το διανυσματικό δυναμικό γράφεται

$$\hat{A}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k},s} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0 V}}\, \hat{e}_{\vec{k},s} \left[\hat{a}_{\vec{k},s}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} + \hat{a}^{+}_{\vec{k},s}\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} \right] \qquad (30)$$

Τελικά, από την εξ. (30) καθώς και από τις σχέσεις

$\vec{E}(\vec{r},t) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r},t)$ και $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t)$, βρίσκουμε ότι οι

αντίστοιχοι τελεστές για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο στον ελεύθερο χώρο είναι

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r},t) = i \sum_{\vec{k},s} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}}\, \hat{e}_{\vec{k},s} \left[\hat{a}_{\vec{k},s}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} - \hat{a}^{+}_{\vec{k},s}\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} \right] \qquad (31)$$

$$\hat{\vec{B}}(\vec{r},t) = \frac{i}{c} \sum_{\vec{k},s} (\hat{k}\times\hat{e}_{\vec{k},s}) \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}}\, \hat{e}_{\vec{k},s} \left[\hat{a}_{\vec{k},s}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} - \hat{a}^{+}_{\vec{k},s}\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} \right] \qquad (32)$$

όπου $\hat{k} = \dfrac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$ όπως ορίσαμε και παραπάνω το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση της πόλωσης.

Σύμφωνα με όσα είπαμε στην αρχή για το ηλεκτρικό πεδίο, μπορούμε να το χωρίσουμε σε ένα άθροισμα θετικών και αρνητικών συχνοτήτων, $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}^{(+)}(\vec{r},t) + \vec{E}^{(-)}(\vec{r},t)$. Έτσι λοιπόν, από την εξ. (31) θα είναι

$$\hat{\vec{E}}^{(+)}(\vec{r},t) = i\sum_{\vec{k},s} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}}\, \hat{e}_{\vec{k},s}\, \hat{a}_{\vec{k},s}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, e^{-i\omega_k t}$$

$$\hat{\vec{E}}^{(-)}(\vec{r},t) = \left[\hat{\vec{E}}^{(+)}(\vec{r},t)\right]^{+}$$

Η ποσότητα $\hat{\vec{E}}^{(+)}(\vec{r},t)$ περιέχει όλους τους όρους οι οποίοι ταλαντώνονται ως $e^{-i\omega_k t}$ με $\omega_k > 0$ και για αυτό ονομάζεται positive frequency part. Επιπλέον, το positive frequency part είναι ανάλογο του τελεστή καταστροφής $\hat{a}_{\vec{k},s}$. Αντιθέτως, η ποσότητα $\hat{\vec{E}}^{(-)}(\vec{r},t)$ είναι γνωστή ως negative frequency part μιας και περιέχει όλους εκείνους τους όρους οι οποίοι ταλαντώνονται ως $e^{i\omega_k t}$ με $\omega_k < 0$, ενώ είναι ανάλογος του τελεστή δημιουργίας $\hat{a}^{+}_{\vec{k},s}$. Προφανώς, παρόμοιες εκφράσεις και παρόμοια ανάλυση μπορούν να γίνουν και για το μαγνητικό πεδίο της εξ. (32)

Ο λόγος που τις περισσότερες φορές στην Κβαντική Οπτική επικεντρωνόμαστε στο ηλεκτρικό πεδίο είναι επειδή το ηλεκτρικό πεδίο είναι ισχυρότερο κατά έναν παράγοντα c σε σχέση με το μαγνητικό [δείτε τον παράγοντα $1/c$ ο οποίος εμφανίζεται στην εξ. (32)]. Για το λόγο αυτό στις περισσότερες περιπτώσεις μπορούμε με ασφάλεια να αγνοήσουμε τη μαγνητική σύζευξη λόγω σπιν μεταξύ δύο e^-, ενώ κάτι τέτοιο δε συμβαίνει για την ηλεκτρική αλληλεπίδραση μεταξύ δύο διπόλων.

Τέλος, αξίζει να γράψουμε το ηλεκτρικό πεδίο της εξ. (31) για ένα μόνο τρόπο ταλάντωσης και διεύθυνση πόλωσης (π.χ. κατά τον άξονα x)

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r},t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}}\,\hat{e}_x\left[\hat{a}\,e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \hat{a}^{+}\,e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right] \qquad (33)$$

Στη συνέχεια, σκεφτείτε ότι το ηλεκτρικό αυτό πεδίο αντιστοιχεί σε κάποια ακτινοβολία στο ορατό μέρος του φάσματος. Αυτό σημαίνει ότι το μήκος κύματος της ακτινοβολίας αυτής θα είναι της τάξης των εκατοντάδων angströms, και επομένως θα ισχύει $\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{|\vec{k}|} \gg |\vec{R}_{atom}|$,

όπου $|\vec{R}_{atom}|$ το χαρακτηριστικό μέγεθος του ατόμου μας (ενδεικτικά για το άτομο του υδρογόνου είναι $|\vec{R}_H| \simeq 1$ angst

Αυτό σημαίνει ότι για το άτομό μας το ηλεκτρικό πεδίο είναι πρακτικά ομογενές, δηλαδή η τιμή του δεν εξαρτάται από τη χωρική μεταβλητή $\vec{r}$. Με άλλα λόγια, για την περίπτωση αυτή μπορούμε να γράψουμε

$$e^{\pm i\vec{k}\cdot\vec{r}} \simeq 1 \pm i\vec{k}\cdot\vec{r}$$

και τελικά να αντικαταστήσουμε το εκθετικό με τη μονάδα. Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση αυτή μπορούμε να γράψουμε το ηλεκτρικό πεδίο ως

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r},t) \simeq \hat{\vec{E}}(t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}}\,\hat{e}_x\left[\hat{a}\,e^{-i\omega t} - \hat{a}^+ e^{i\omega t}\right] \qquad (34)$$

Η προσέγγιση που κάναμε παραπάνω ονομάζεται διπολική προσέγγιση (dipole approximation) και θα πούμε περισσότερα για αυτή στη συνέχεια.

- Καταστάσεις Fock

Όπως κάναμε στο τέλος της προηγούμενης ενότητας, έτσι και εδώ, θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση όπου στο ηλεκτρικό πεδίο έχουμε μόνο μία συχνότητα ω [εξ. (34)]. Αν συμβολίσουμε με $|n\rangle$ την ιδιοκατάσταση της ενέργειας η οποία αντιστοιχεί στην ιδιοενέργεια E_n, μπορούμε να