

## 4° Σετ Ασκήσεων-Μοντέρνα Φυσική

- 1) Θεωρήσαμε ότι οι πίνακες Pauli μπορούν να γραφούν στην υπολογιστική βάση (computational basis),  $B = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ , ως  $\sigma_x = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$ ,  $\sigma_y = i(|1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|)$  και  $\sigma_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$ , ενώ βρήκαμε ότι τα διανύσματα  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$  είναι ιδιοδιανύσματα του  $\sigma_z$  με ιδιοτιμές  $+1$  και  $-1$  αντίστοιχα, δηλαδή  $\sigma_z|0\rangle = |0\rangle$  και  $\sigma_z|1\rangle = -|1\rangle$ . Θεωρώντας την εξίσωση ιδιοτιμών  $\sigma_i|0_i\rangle = |0_i\rangle$  και  $\sigma_i|1_i\rangle = -|1_i\rangle$  για τα ιδιοδιανύσματα  $|0_i\rangle$  και  $|1_i\rangle$  ( $i = x, y$ ) αντίστοιχα, να βρείτε πώς εκφράζονται τα ιδιοδιανύσματα αυτά σε σχέση με τα διανύσματα βάσης  $|0\rangle, |1\rangle$ . Στη συνέχεια απεικονίστε τα ιδιοδιανύσματα αυτά πάνω στη σφαίρα Bloch. Σχολιάστε το αποτέλεσμα σας.
- 2) Πραγματοποιήστε όλες τις απαραίτητες πράξεις ώστε να επιβεβαιώσετε την εξ. (305). Στη συνέχεια αποδείξτε ότι οι εξ. (299) και (304) είναι ισοδύναμες.
- 3) Α) Αποδείξτε ότι η πύλη Hadamard γράφεται ως  $H = e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_y}\sigma_z$ . Β) Στη συνέχεια, αποδείξτε ότι  $H\sigma_xH = \sigma_z$ ,  $H\sigma_yH = -\sigma_y$  και  $H\sigma_zH = \sigma_x$ .
- 4) Α) Αποδείξτε ότι  $\sqrt{NOT}\sqrt{NOT} = i\sqrt{NOT}$ . Β) Γράψτε τις κβαντικές πύλες  $R_x(a) = e^{-i\frac{1}{2}a\sigma_x}$  και  $R_y(a) = e^{-i\frac{1}{2}a\sigma_y}$  σε μορφή πίνακα, όπως κάναμε δηλαδή και για την κβαντική πύλη  $R_z(a)$  στην εξ. (313). Γ) Εφαρμόστε τις πύλες  $\sqrt{NOT}$ ,  $R_x(a)$  και  $R_y(a)$  στα διανύσματα βάσης  $|0\rangle$  και  $|1\rangle$  και δείτε πώς μετασχηματίζονται από τις πύλες αυτές. Όπου μπορείτε σχολιάστε το αποτέλεσμα.
- 5) Αποδείξτε ότι  $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\sigma})(\vec{\beta} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\mathbb{I} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{\alpha} \times \vec{\beta})$ , όπου  $\mathbb{I}$  ο μοναδιαίος πίνακας, καθώς και  $\vec{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$  και  $\vec{\beta} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)$  δύο τυχαία διανύσματα στο χώρο, ενώ  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  είναι το διάνυσμα Pauli.