# Φυσική και Τεχνολογία Υλικών και Διατάξεων Στερεάς Κατάστασης

**Δρ Χρήστος Τσάμης**

Ινστιτούτο Νανοεπιστήμης και Νανοτεχνολογίας

ΕΚΕΦΕ «Δημόκριτος»

c.tsamis@inn.demokritos.gr

Πάτρα, 2025

# 3. Εξισώσεις ημιαγωγών

# Εξισώσεις ημιαγωγών

## Εξίσωση του Poisson

$$\vec{\nabla}^2\psi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_S}$$

$$\frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2\psi(x,y,z)}{\partial^2 z} = -\frac{\rho(x,y,z)}{\varepsilon_S}$$

**Ποιά είναι η έκφραση για το ρ(x, y, z) σε ένα ημιαγωγό?**

# Εξισώσεις ημιαγωγών

## Εξίσωση του Poisson

$$\rho(\vec{\mathrm{r}}) = q \cdot \left[\overbrace{p(\vec{\mathrm{r}}) + N_D^{+}(\vec{\mathrm{r}})}^{\text{Θετικά φορτία}} - \overbrace{n(\vec{\mathrm{r}}) - N_A^{-}(\vec{\mathrm{r}})}^{\text{Αρνητικά φορτία}}\right]$$

Οπές
(ευκίνητα φορτία)

Θετικά ιονισμένα
άτομα δοτών
(ακίνητα φορτία)

Ηλεκτρόνια
(ευκίνητα φορτία)

Αρνητικά ιονισμένα
άτομα αποδεκτών
(ακίνητα φορτία)

# Εξισώσεις ημιαγωγών

## Εξίσωση του Poisson

Σε 1-διαστάση

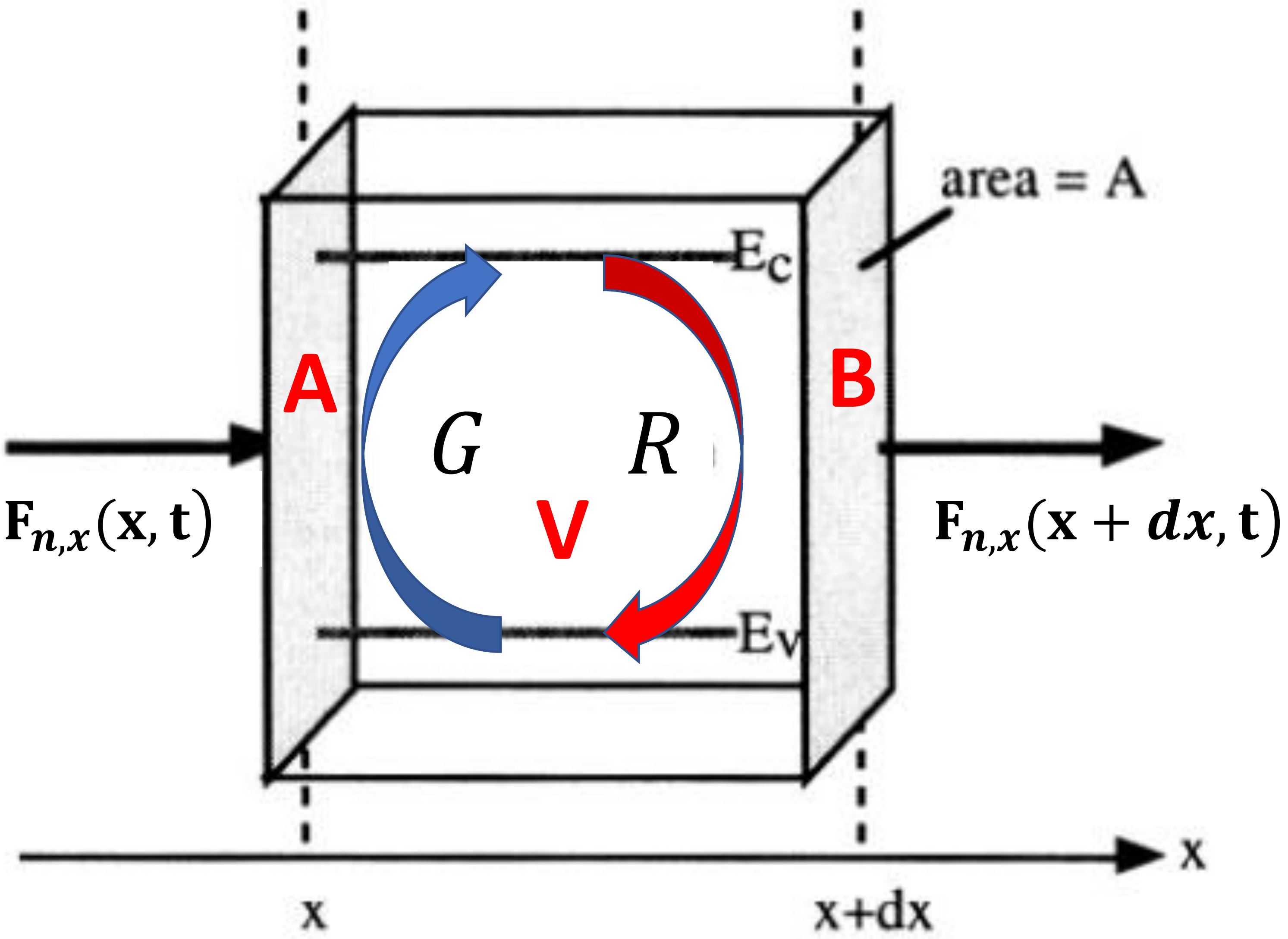
$$\frac{d^2\psi(x)}{d^2x} = -\frac{q}{\varepsilon_S} \cdot [p(x) + N_D^+(x) - n(x) - N_A^-(x)]$$

Σε 3-διαστάσεις

$$\vec{\nabla}^2\psi(\vec{r}) = -\frac{q}{\varepsilon_S}[p(\vec{r}) + N_D^+(\vec{r}) - n(\vec{r}) - N_A^-(\vec{r})]$$

## Εξισώσεις ημιαγωγών

### Εξισώσεις συνέχειας για τα ηλεκτρόνια




$\mathbf{F}_{n,x}(\mathbf{x},\mathbf{t})$

**F:** Ροή ηλεκτρονίων (ανα μονάδα επιφάνεια και ανά μονάδα χρόνου)

**G**: Ρυθμός γέννησης ηλεκτρονίων (ανά μονάδα όγκου και ανά μονάδα χρόνου)

$G=G_{ext}+G_{int}$

**R**: Ρυθμός επανασύνδεσης ηλεκτρονίων
(ανά μονάδα όγκου και ανά μονάδα χρόνου)

**Αλλά ο αριθμός των ηλεκτρονίων διατηρείται**

# Εξισώσεις ημιαγωγών

Σε ένα χρονικό διάστημα dt ο αριθμός των ηλεκτρονίων που βρίσκονται στο όγκο dV (=A dx) αλλάζει κατά dN, όπου

dN= (αριθμός των ηλεκτρονίων που εισέρχονται από την πλευρά A) $J_{n,x}(x,t)$ A dt

– (αριθμός των ηλεκτρονίων που εξέρχονται από την πλευρά B) $-J_{n,x}(x+dx,t)$ A dt

+ (αριθμός των ηλεκτρονίων που γεννιούνται μέσα στο όγκο dV) G dV dt= G (A dx) dt

dV= A dx

– (αριθμό των ηλεκτρονίων που επανασυνδέονται μέσα στο όγκο dV) -R dV dt= -R (A dx) dt

## Εξισώσεις ημιαγωγών

Οπότε $dN = F_{n,x}(x,t)\ A\ dt - F_{n,x}(x+dx,t)\ A\ dt + G\ (A\ dx)\ dt - R\ (A\ dx)\ dt$

Αλλά $dN = \frac{\partial n(x,t)}{\partial t}\ (A\ dx)\ dt$

$$\Rightarrow \frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial F_{n,x}(x,t)}{\partial x} + [G_n(x,t) - R_n(x,t)]$$

Αλλά $J_{n.x}(x,t) = F_{n,x}(x,t)*(\text{-}q)$

Ρεύμα Ροή ηλεκτρονίων

# Εξισώσεις ημιαγωγών

**Εξίσωση συνέχειας για τα ηλεκτρόνια**

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial J_{n,x}(x,t)}{\partial x} + \left[G_n(x,t) - R_n(x,t)\right]$$

# Εξισώσεις ημιαγωγών

**Εξίσωση συνέχειας για τα ηλεκτρόνια**

$$\frac{\partial \mathrm{n}(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial \mathrm{t}} = \frac{1}{\mathrm{q}} \cdot \frac{\partial \mathrm{J}_{n,x}(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial \mathrm{x}} + \left[\mathrm{G_n}(\mathrm{x},\mathrm{t}) - \mathrm{R_n}(\mathrm{x},\mathrm{t})\right]$$

**Εξίσωση συνέχειας για τις οπές**

$$\frac{\partial p(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial \mathrm{t}} = -\frac{1}{\mathrm{q}} \cdot \frac{\partial \mathrm{J}_{p,x}(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial \mathrm{x}} + \left[\mathrm{G_p}(\mathrm{x},\mathrm{t}) - \mathrm{R_p}(\mathrm{x},\mathrm{t})\right]$$

# Εξισώσεις μεταφοράς σε ημιαγωγούς (transport equations) – 1 διάσταση

**Drift-diffusion equations**

1. Εξίσωση ρεύματος ηλεκτρονίων

$$J_{n,x} = \mu_n \cdot n \cdot \frac{dE_{F_n}}{dx}$$

2. Εξίσωση ρεύματος οπών

$$J_{p,x} = \mu_p \cdot \mathrm{p} \cdot \frac{dE_{F_p}}{dx}$$

**Maxwell equations**

3.Εξίσωση του Poisson

$$\frac{d^2\psi(x)}{d^2x} = -\frac{q}{\varepsilon_S} \cdot [p(x) + N_D^+(x) - n(x) - N_A^-(x)]$$

**Continuity equations**

4. Εξίσωση συνέχειας για τα ηλεκτρόνια

$$\frac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial J_{n,x}(x,t)}{\partial x} + [G_n(x,t) - R_n(x,t)]$$

5. Εξίσωση συνέχειας για τις οπές

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{q} \cdot \frac{\partial J_{p,x}(x,t)}{\partial x} + [G_p(x,t) - R_p(x,t)]$$

# Drift-diffusion equations

**(1-διάσταση)**

## Εναλλακτική μορφή για τα ρεύματα

**Ρεύμα ηλεκτρονίων**: $$J_n = J_{n,x}^{drift} + \mathrm{J}_{n,x}^{dif} = q \cdot n \cdot \mu_n \cdot E_x + q \cdot \mathrm{D}_n \cdot \frac{\mathrm{d}n(\mathrm{x})}{\mathrm{dx}}$$

**Ρεύμα Οπών :** $$J_p = J_{p,x}^{drift} + \mathrm{J}_{p,x}^{dif} = q \cdot p \cdot \mu_p \cdot E_x - q \cdot \mathrm{D}_p \cdot \frac{\mathrm{d}p(\mathrm{x})}{\mathrm{dx}}$$

## Εξισώσεις μεταφοράς σε ημιαγωγούς (transport equation) – 3 διαστάσεις

**Drift-diffusion equations**

1. Εξίσωση ρεύματος ηλεκτρονίων

$$\vec{J}_n = \mu_n \cdot n \cdot \vec{\nabla} \mathrm{E}_{\mathrm{F}_n}$$

2. Εξίσωση ρεύματος οπών

$$\vec{J}_p = \mu_p \cdot \mathrm{p} \cdot \vec{\nabla} \mathrm{E}_{\mathrm{F}_p}$$

**Maxwell equations**

3.Εξίσωση του Poisson

$$\vec{\nabla}^2 \psi(\vec{\mathrm{r}}) = -\frac{q}{\varepsilon_S}\left[p(\vec{\mathrm{r}}) + N_D^+(\vec{\mathrm{r}}) - n(\vec{\mathrm{r}}) - N_A^-(\vec{\mathrm{r}})\right]$$

**Continuity equations**

4. Εξίσωση συνέχειας για τα ηλεκτρόνια

$$\frac{\partial \mathrm{n}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t})}{\partial \mathrm{t}} = \frac{1}{\mathrm{q}} \cdot \vec{\nabla} \vec{\mathrm{J}}_{\mathrm{n}}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t}) + \left[\mathrm{G_n}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t}) - \mathrm{R_n}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t})\right]$$

5. Εξίσωση συνέχειας για τις οπές

$$\frac{\partial p(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t})}{\partial \mathrm{t}} = -\frac{1}{\mathrm{q}} \cdot \vec{\nabla} \vec{\mathrm{J}}_{\mathrm{p}}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t}) + \left[\mathrm{G_p}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t}) - \mathrm{R_p}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t})\right]$$

# 4. Γέννηση και Επανασύνδεση φορέων

# Φορείς εκτός Θερμοδυναμικής Ισορροπίας

Τα περισσότερο σημαντικά φαινόμενα στις ημιαγωγικές διατάξεις προκαλούνται από μεταβολές των συγκεντρώσεων των φορέων (e ή h) από την θερμοδυναμική ισορροπία, τα οποία οφείλονται σε εσωτερικές (internal) ή εξωτερικές (external) δυνάμεις ή την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία.

Αυτές οι δυνάμεις μπορούν να οδηγήσουν τις συγκεντρώσεις των φορέων σε τιμές χαμηλότερες ή υψηλότερες από αυτές που θα καθοριστούν από την νόθευση του ημιαγωγού ή τις θερμικές διεγέρσεις. Σε αυτές τις περιπτώσεις λέμε ότι οι φορείς βρίσκονται σε περίσσεια (excess carrier concentration).

## ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙ: Γέννηση και Επανασύνδεση φορέων

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να γράψουμε για τα ηλεκτρόνια και τις οπές ότι

$$n(\vec{r}, t) = n_o(\vec{r}) + \Delta n(\vec{r}, t)$$

Ολική συγκέντρωση των ηλεκτρονίων (οπών)

Η συγκέντρωση που οφείλεται στην νόθευση ($N_D$-$N_A$) ή στις θερμικές διεγέρσεις (Θ.Ι)

Περίσσεια ηλεκτρονίων/οπών.

$$p(\vec{r}, t) = p_o(\vec{r}) + \Delta p(\vec{r}, t)$$

$$n \cdot p \neq n_i^2$$

## Έγχυση φορέων σε ένα ημιαγωγό (carrier injection)

Η διαδικασία εισαγωγής περίσσειας φορέων σε ένα ημιαγωγό ονομάζεται έγχυση φορέων (carrier injection)

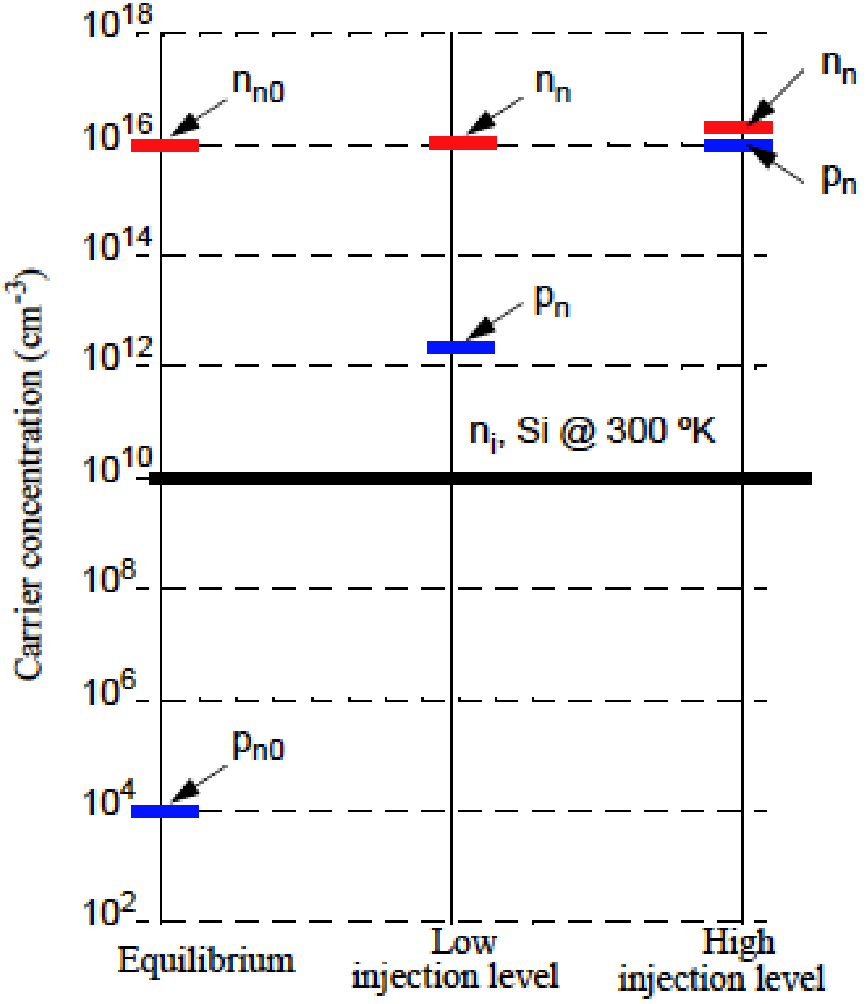
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
**Χαμηλή έγχυση φορέων (low level injection)**

$\Delta n = \Delta p << n + p$

**Υψηλή έγχυση φορέων (high-level injection)**

$\Delta n = \Delta p \approx n + p$

<u>Σε νοθευμένο ημιαγωγό</u>
Φορείς πλειονότητας (majority carriers)
Φορείς μειονότητας (minority carriers)



## ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΓΕΝΝΗΣΗΣ ΦΟΡΕΩΝ

**ΓΕΝΝΗΣΗ ΦΟΡΕΩΝ : Μηχανισμοί δημιουργία ηλεκτρονίων-οπών σε ένα ημιαγωγό**

**$G=G_{ext}+G_{int}$**

**$G_{int}$ :Ενδογενής (Intrinsic)**

Θερμική διέγερση

**$G_{ext}$ :Εξωγενής (Extrinsic)**

## ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΓΕΝΝΗΣΗΣ ΦΟΡΕΩΝ

**ΓΕΝΝΗΣΗ ΦΟΡΕΩΝ : Μηχανισμοί δημιουργία ηλεκτρονίων-οπών σε ένα ημιαγωγό**

**$G=G_{ext}+G_{int}$**

**$G_{int}$ :Ενδογενής (Intrinsic)** — Θερμική διέγερση

**$G_{ext}$ :Εξωγενής (Extrinsic)**

**Ιονισμός των ατόμων του ημιαγωγού (εκτός από τη θερμική διέγερση)**

Στη περίπτωση αυτή έχουμε μετάβαση ενός e- από τη ζώνη σθένους στη ζώνη αγωγιμότητας με ταυτόχρονη δημιουργία ενός ζεύγους ελεύθερων φορέων, ενός ηλεκτρονίου στη ζώνη αγωγιμότητας και μιας οπής στη ζώνη σθένους.

Η ενέργεια αυτή μπορεί να δοθεί με

α) Οπτική διέγερση με φωτόνια, όπου $E_{ph}>E_G$

β) Ακτινοβόληση με φορτισμένα σωματίδια μεγάλης ενέργειας, όπως $e^-$, $p^+$, a, ιόντα

γ) Μέσω ενός πολύ ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου (~$10^5$-$10^6$V/cm), ικανού να ιονίσει τα ουδέτερα άτομα. (Ιονισμός με φαινόμενο πεδίου)

**Ιονισμός των προσμίξεων**

## ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΕΠΑΝΑΣΥΝΔΕΣΗ ΦΟΡΕΩΝ

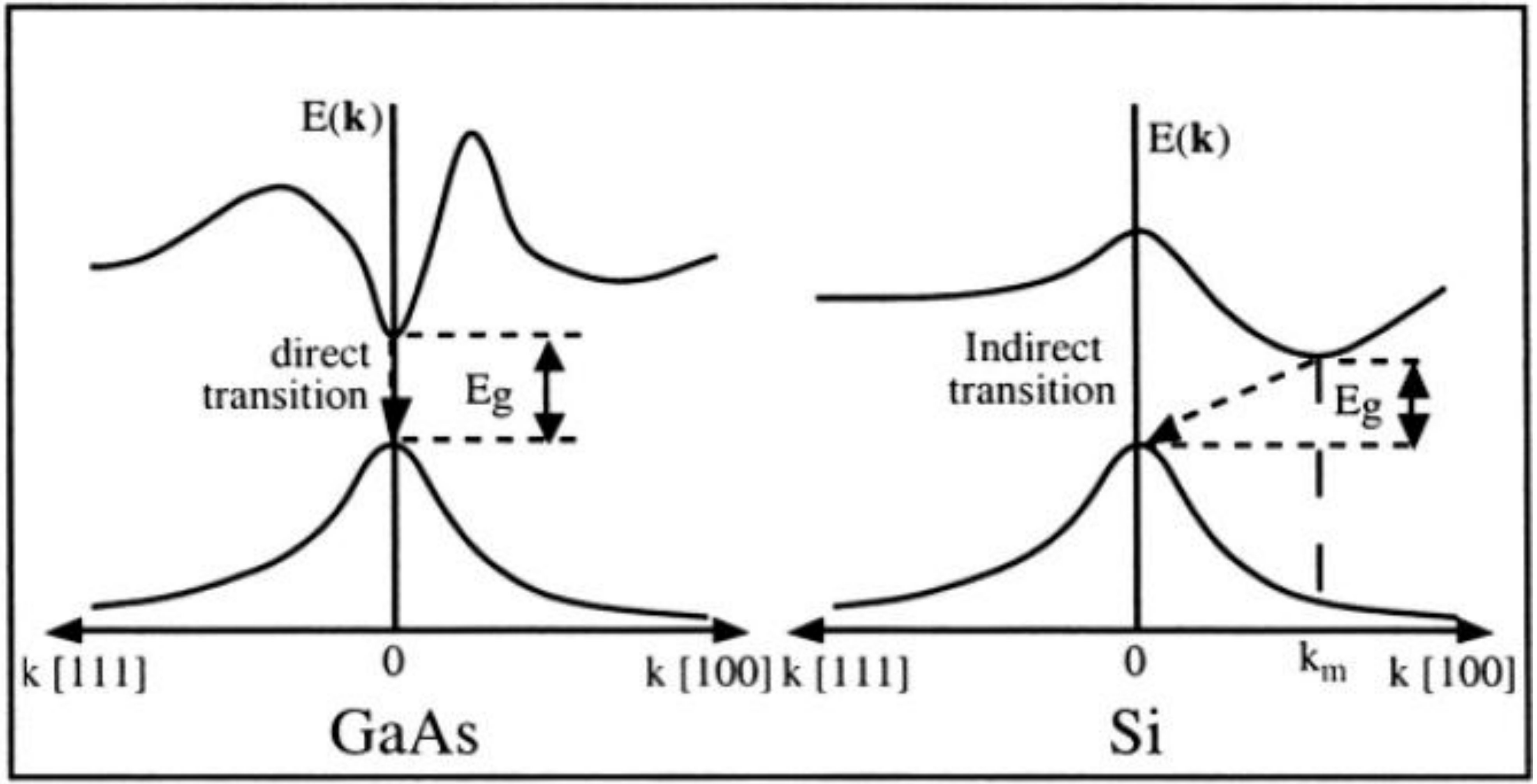
**ΕΠΑΝΑΣΥΝΔΕΣΗ ΦΟΡΕΩΝ : Μηχανισμοί «εκμηδένισης (annihilation)» ηλεκτρονίων-οπών σε ένα ημιαγωγό**

Είναι οι μηχανισμοί επαναφοράς του ημιαγωγού στην θερμοδυναμική ισορροπία.
Οι μηχανισμοί επανασύνδεσης που κυριαρχούν σε ένα ημιαγωγό εξαρτώνται από τις ιδιότητες του ημιαγωγού (πχ άμεσα ή έμμεσο ενεργειακό χάσμα), την ποιότητα της κρυσταλλικής δομής (πχ κρυσταλλικές ατέλειες), το επίπεδο νόθευσης (dopants) και τη συγκέντρωση ανεπιθύμητων προσμίξεων.

**Radiative recombination**: Η επανασύνδεση $e^-/h^+$ έχει σαν αποτέλεσμα την εκπομπή ενός φωτονίου

**Non-radiative recombination**: Η επανασύνδεση $e^-/h^+$ δεν έχει σαν αποτέλεσμα την εκπομπή ενός φωτονίου. Η ενέργεια που απελευθερώνεται μετατρέπεται σε θερμική ενέργεια του πλέγματος (φωνόνια)

## ΗΜΙΑΓΩΓΟΙ ΜΕ ΑΜΕΣΟ ΚΑΙ ΕΜΕΣΟ ΕΝΕΡΓΙΑΚΟ ΧΑΣΜΑ



## ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΕΠΑΝΑΣΥΝΔΕΣΗ ΦΟΡΕΩΝ

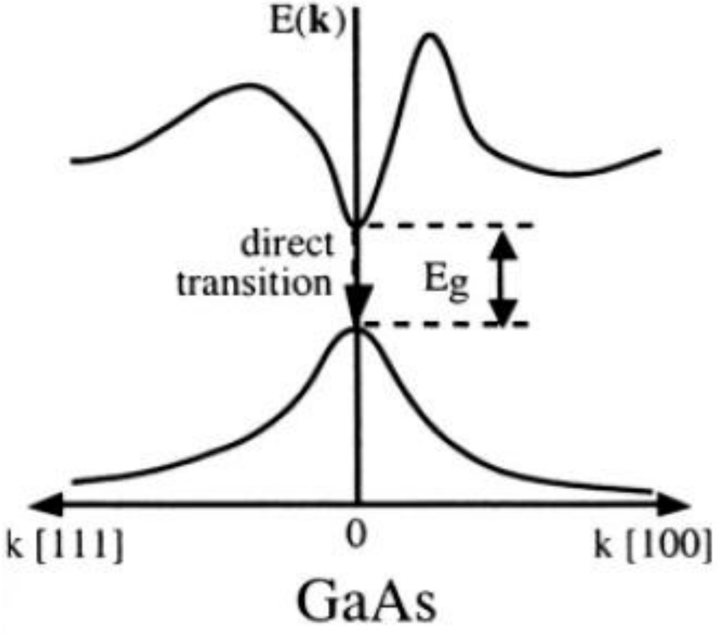
**I. Επανασύνδεση από ζώνη σε ζώνη (Band to Band Recombination)**

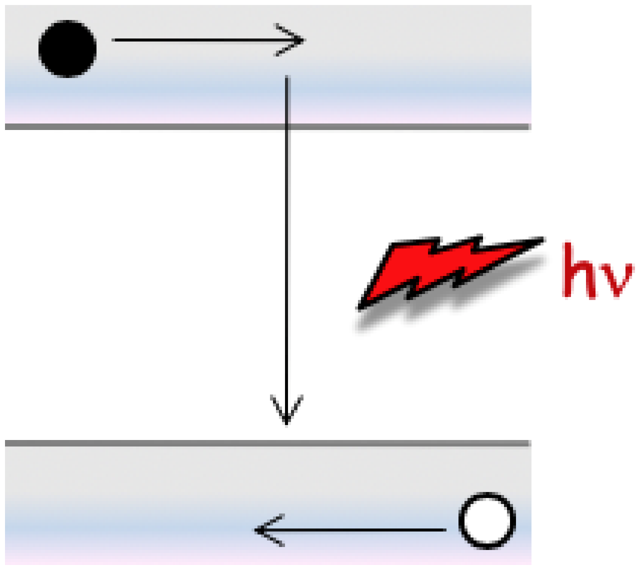
**II. Επανασύνδεση Auger (Auger Recombination)**

**III. Επανασύνδεση Shockley–Read–Hall (SRH) (Band-to-impurity recombination)**

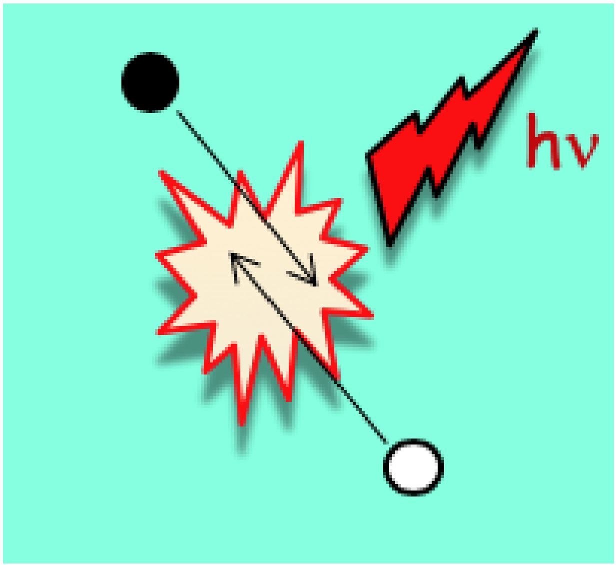
## I. Επανασύνδεση από ζώνη σε ζώνη (Band to Band Recombination)

Είναι ο βασικός τύπος επανασύνδεσης για ημιαγωγούς με άμεσο ενεργειακό χάσμα Eg, πχ GaAs. Ένα ηλεκτρόνιο της ζώνης αγωγιμότητας επανασυνδέεται με μία οπή της ζώνης σθένους με ταυτόχρονη εκπομπή ενός φωτονίου που έχει ενέργεια ίση με το ενεργειακό χάσμα.




Ενεργειακό διάγραμμα



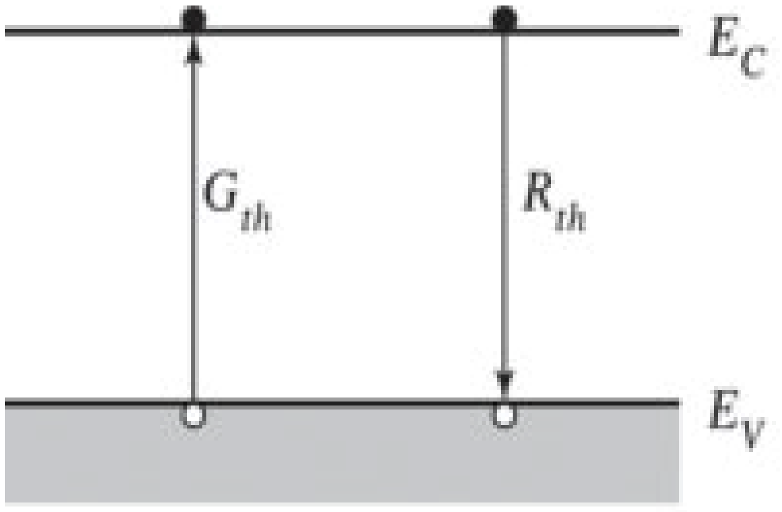

3D χώρος

## Ι. Επανασύνδεση από ζώνη σε ζώνη (Band to Band Recombination)

Αν θεωρήσουμε την συγκέντρωση των φορέων σε Θ.Ι, αυτή θα καθορίζεται από την ισορροπία ανάμεσα στο ρυθμό γέννησης $G_{th}$ ($cm^{-3}s^{-1}$), λόγω θερμικών διεγέρσεων και το ρυθμό επανασύνδεσης των φορέων R.

Ο ρυθμός γέννησης θα εξαρτάται από την θερμοκρασία και τα χαρακτηριστικά του υλικού.

$$\mathrm{G}_{th} = \mathrm{G}_{th}(\mathrm{T})$$




Ο ρυθμός επανασύνδεσης θα εξαρτάται και από τις συγκεντρώσεις των φορέων σε κάθε ζώνη

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}(T, n, p) = r(T) \cdot n \cdot p$$

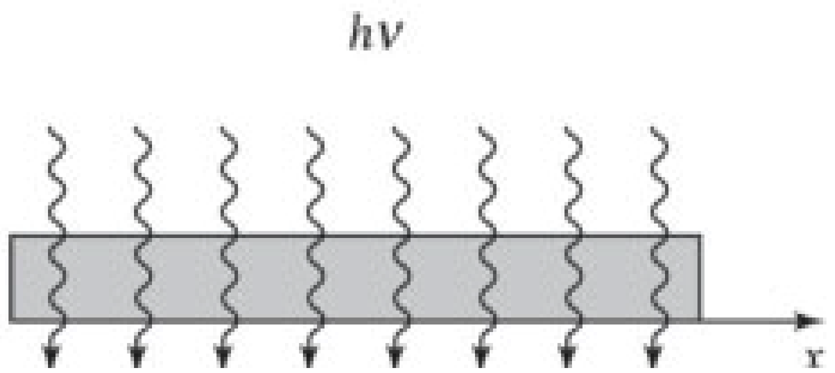
Στην Θ.Ι θα ισχύει ότι

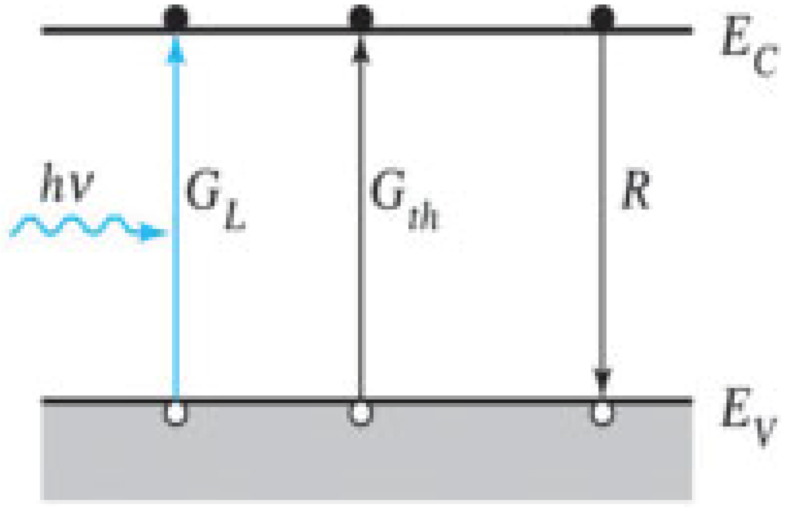
$$\mathrm{G}_{th} = \mathrm{R}_{th}(n_o, p_o, T) = r(T) \cdot n_o \cdot p_o = r(T) \cdot n_i^2$$

## I. Επανασύνδεση από ζώνη σε ζώνη (Band to Band Recombination)

Ας εξετάσουμε τι γίνεται σε περιπτώσεις **εκτός Θ.Ι**. Έστω ότι $\mathbf{G_L}$ είναι ο ρυθμός γέννησης φορέων που οφείλεται σε κάποιο εξωτερικό αίτιο, πχ ομοιόμορφη ακτινοβόληση του ημιαγωγού με αποτέλεσμα της γέννηση ζευγών e-h (Δn=Δp). Στη **μόνιμη κατάσταση** θα ισχύει ότι

$$G_L + \mathrm{G}_{th}(T) = \mathrm{R}(n,p,T)$$




$$n = \mathrm{n}_o + \Delta n \qquad\qquad p = \mathrm{p}_o + \Delta p$$

## I. Επανασύνδεση από ζώνη σε ζώνη (Band to Band Recombination)

Αν θεωρήσουμε ότι την χρονική στιγμή t=0 η εξωτερική διέγερση παύει να ισχύει, η κινητική των φορέων θα καθοριστεί από (εξίσωση συνέχειας)

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} = \frac{\partial p(t)}{\partial t} = -[\mathrm{R}(n,p,T) - \mathrm{G}_{th}(T)]$$

$$\mathrm{R} = r \cdot n \cdot p \qquad \mathrm{G}_{th} = r \cdot n_i^2$$

$$n = \mathrm{n}_o + \Delta n \qquad p = \mathrm{p}_o + \Delta p$$

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} = \frac{\partial p(t)}{\partial t} = -r \cdot [\mathrm{n}_o\, \Delta p + \mathrm{p}_o\, \Delta n + \Delta n \cdot \Delta p]$$

## I. Επανασύνδεση από ζώνη σε ζώνη (Band to Band Recombination)

Στη γενική περίπτωση η εξίσωση δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά. θα θεωρήσουμε ότι **Δn=Δp**

$$\frac{\partial \Delta p}{\partial t} = -r \cdot [n_o + p_o + \Delta p] \cdot \Delta p$$

Με χωρισμό μεταβλητών βρίσκω ότι $$\int_o^t \frac{\frac{\partial(\Delta p)}{\partial t} \cdot dt}{(n_o + p_o + \Delta p)\Delta p} = -r \int_o^t dt = -r \cdot t \Rightarrow$$

$$\frac{1}{n_o + p_o}\left[\ln \frac{\Delta p}{n_o + p_o + \Delta p}\right]_0^t = -r \cdot t$$

## I. Επανασύνδεση από ζώνη σε ζώνη (Band to Band Recombination)

Τελικά

$$\Delta p(t) = \Delta n(t) = \frac{(n_o + p_o)\,\Delta p(0)}{[n_o + p_o + \Delta p(0)]\exp[r \cdot (n_o + p_o) \cdot t] - \Delta p(0)}$$

## I. Επανασύνδεση από ζώνη σε ζώνη (Band to Band Recombination)

**<u>Περίπτωση Ι</u>** $\Delta p(0)=\Delta n(0) << n_o+p_o$ (**Low level injection**)

$$\Delta p(t) = \Delta n(t) = \frac{(n_o + p_o)\, \Delta p(0)}{[n_o + p_o + \Delta p(0)]\, \exp[r \cdot (n_o + p_o) \cdot t] - \Delta p(0)}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta p(t) = \Delta p(0) \cdot \exp[-r \cdot (n_o + p_o) \cdot t] = \Delta p(0) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_p}\right)$$

$\tau_p$ είναι ο χρόνος ζωής των φορέων σε περίσσεια (excess carrier lifetime)

$$\tau_p = \frac{1}{r \cdot (n_o + p_o)}$$

## I. Επανασύνδεση από ζώνη σε ζώνη (Band to Band Recombination)

Θυμάμαι την εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} = \frac{\partial p(t)}{\partial t} = -[\mathrm{R}(n,p,T) - \mathrm{G}_{th}(T)]$$

Ορίζω τον **καθαρό ρυθμό επανασύνδεσης** (net recombination rate) των φορέων σε περίσσεια

$$U \equiv \mathrm{R} - \mathrm{G_{th}}$$

$$\Delta\mathrm{p(t)} = \Delta\mathrm{p(0)} \cdot \exp\left(-\frac{\mathrm{t}}{\tau_\mathrm{p}}\right)$$

**(Low level injection)**

$$U = \frac{\Delta\mathrm{p(0)}}{\tau_\mathrm{p}} \cdot \exp\left(-\frac{\mathrm{t}}{\tau_\mathrm{p}}\right) = \frac{\Delta\mathrm{p(t)}}{\tau_\mathrm{p}} \Rightarrow \boxed{U = \frac{\mathrm{p(t)} - \mathrm{p(0)}}{\tau_\mathrm{p}}}$$

## I. Επανασύνδεση από ζώνη σε ζώνη (Band to Band Recombination)

**Περίπτωση ΙΙ** $\Delta p(0)=\Delta n(0) \gg n_o+p_o$ (**High level injection**)

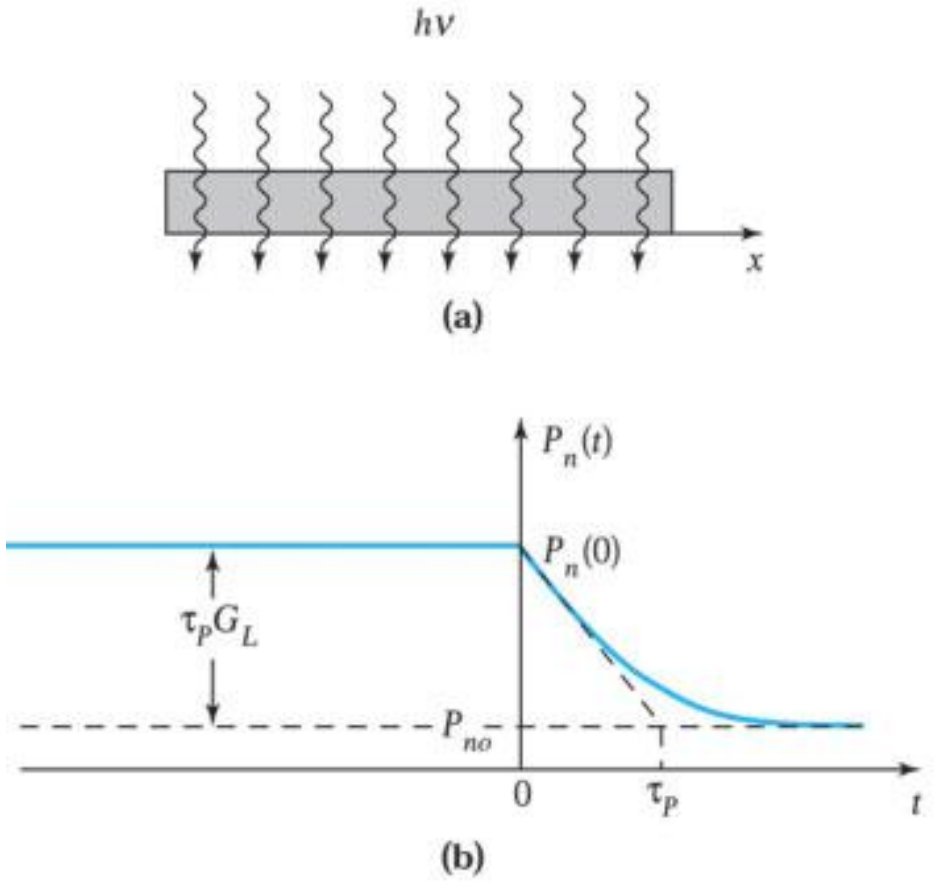
$$\int_o^t \frac{\frac{\partial(\Delta p)}{\partial t}\cdot dt}{(n_o+p_o+\Delta p)\Delta p} = -r\int_o^t dt = -r\cdot t$$

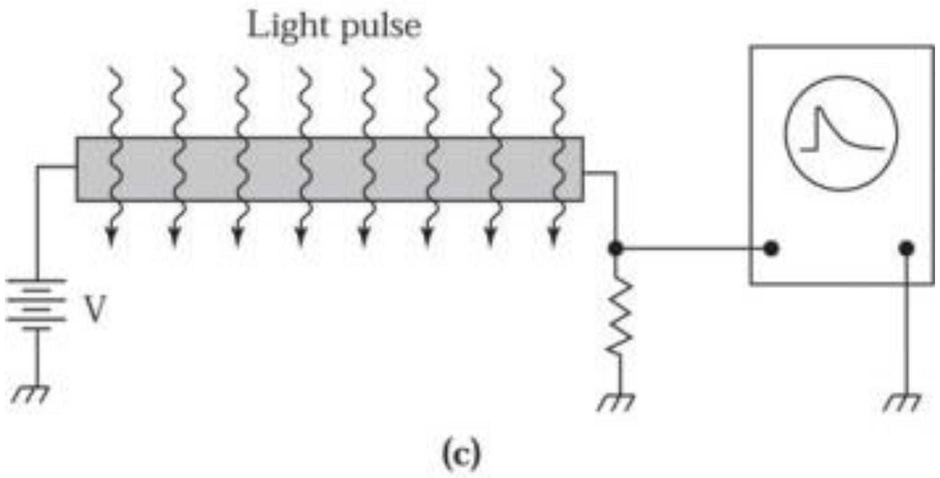
⬇

$$\Delta p(t) = \frac{\Delta p(0)}{1+r\cdot t\cdot \Delta p(0)}$$

Quadratic recombination. Hyperbolic decay of excess carriers

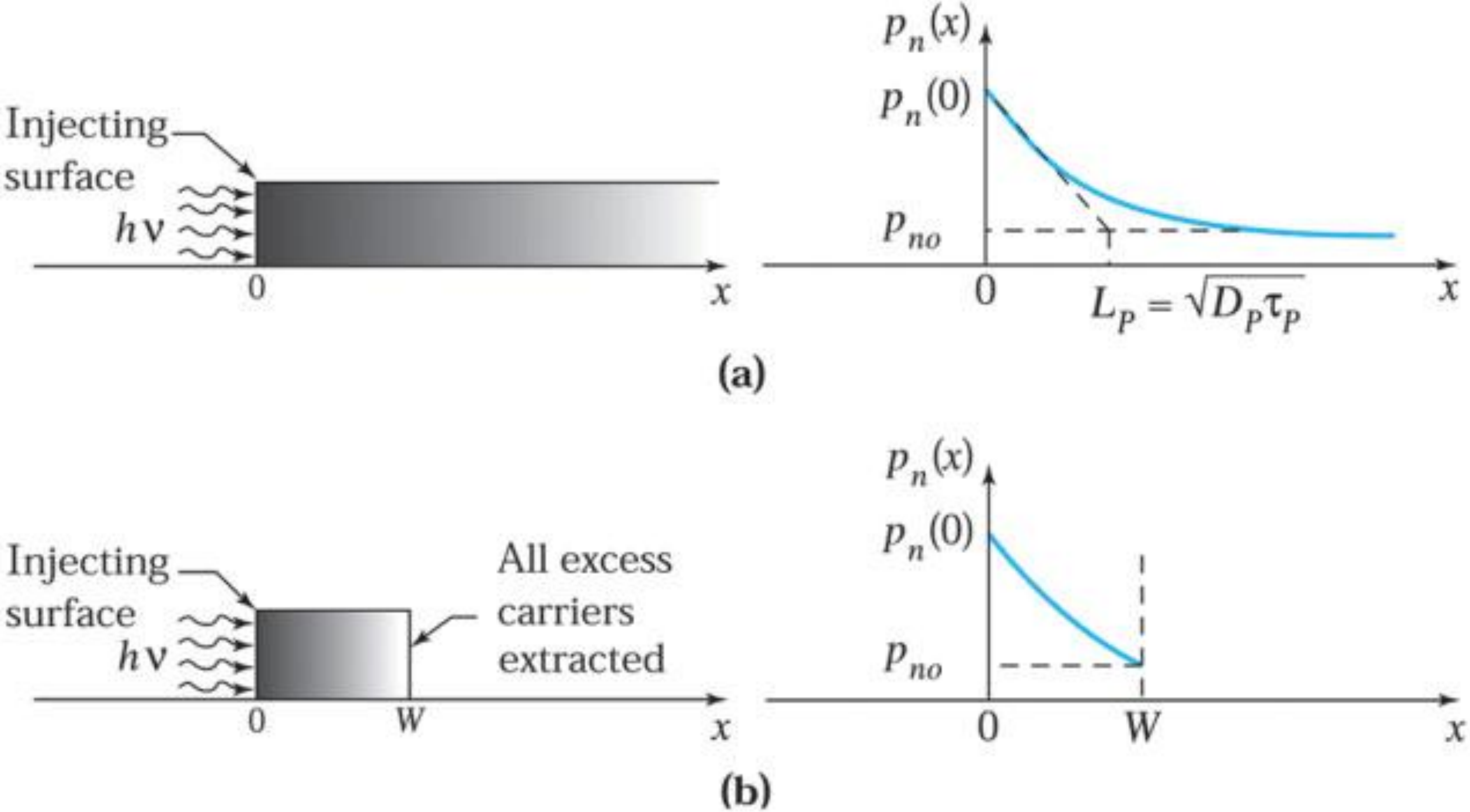
## Παράδειγμα ημιαγωγού τύπου n που φωτίζεται ομοιόμορφα




Decay of photoexcited carriers. (a) n-type sample under constant illumination. (b) Decay of minority carriers (holes) with time. (c) Schematic setup to measure minority carrier lifetime.

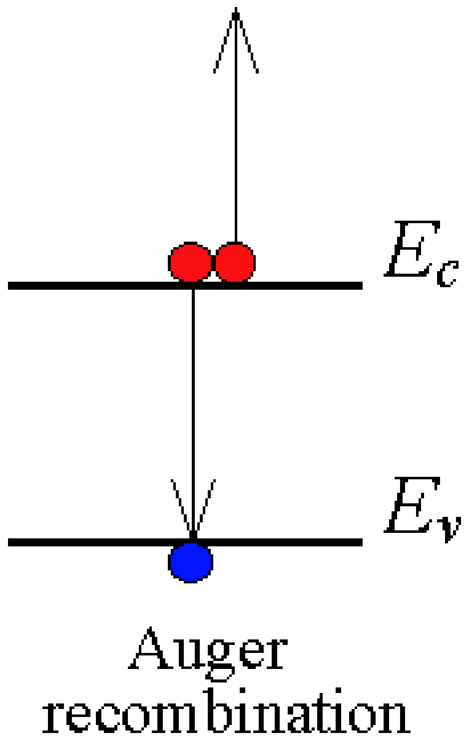
# Παράδειγμα ημιαγωγού τύπου n που φωτίζεται από τη μία πλευρά



## ΙΙ. Επανασύνδεση Auger (Auger Recombination)

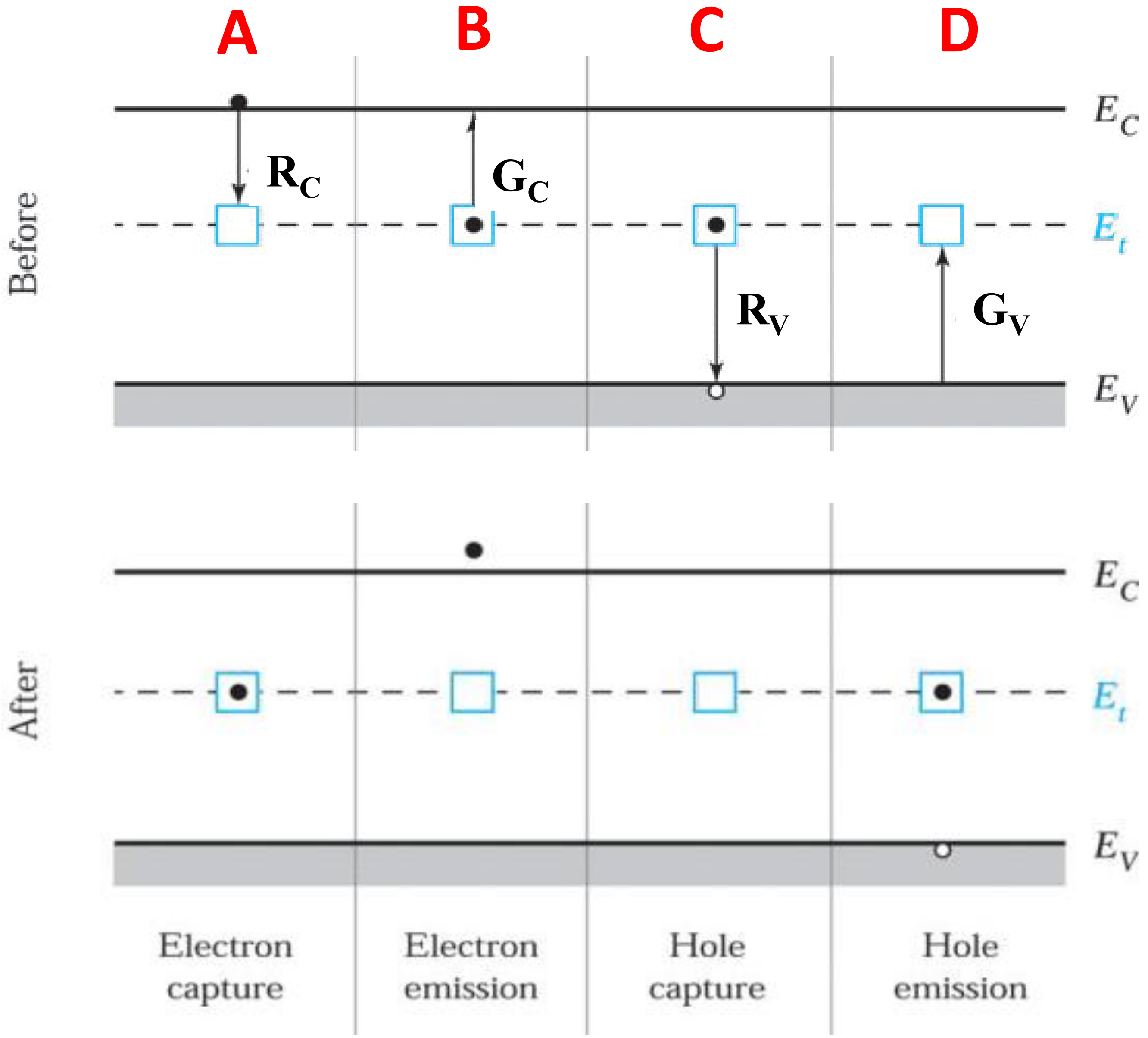
Για έντονα νοθευμένους (heavily doped) ημιαγωγούς με άμεσο ενεργειακό διάκενο ένας από τους πιο σημαντικούς μηχανισμούς επανασύνδεσης που δρα ανταγωνιστικά με το μηχανισμός επανασύνδεσης από ζώνη σε ζώνη είναι ο μηχανισμός Auger

Σε αυτή την περίπτωση η ενέργεια και η ορμή που απελευθερώνεται κατά την επανασύνδεση ηλεκτρονίου-οπής δίνεται σε ένα δεύτερο ηλεκτρόνιο ή οπή , το οποίο με τη σειρά του χάνει ενέργει με εκπομπή φωνονίων (δηλ λόγω συγκρούσεων με το κρυσταλλικό πλέγμα).




Η ανάλυση για το μηχανισμό Auger είναι ανάλογη με αυτή της επανασύνδεσης από ζώνη σε ζώνη.

## III. Επανασύνδεση Shockley–Read–Hall (SRH) (Band-to-impurity recombination)




Δείτε στο Παράρτημα I πως υπολογίζεται κάθε ρυθμός μετάβασης)

## III. Επανασύνδεση Shockley–Read–Hall (SRH) (Band-to-impurity recombination)

### Περίπτωση ημιαγωγού που ακτινοβολείται ομοιόμορφα

Έστω ημιαγωγός που ακτινοβολείται ομοιόμορφα με αποτέλεσμα να έχουμε ένα ρυθμό γέννησης ηλεκτρονίων-οπών $G_L$.

Στην μόνιμη κατάσταση ισχύει ότι **Principle of detailed balance**

Για τα ηλεκτρόνια
$$\frac{dn}{dt} = G_L - (\mathrm{R}_C - \mathrm{G}_C) = 0$$

$$G_L = \mathrm{R}_C - \mathrm{G}_C = \mathrm{R}_V - \mathrm{G}_V$$

Για τις οπές
$$\frac{dp}{dt} = G_L - (\mathrm{R}_V - \mathrm{G}_V) = 0$$

## III. Επανασύνδεση Shockley–Read–Hall (SRH) (Band-to-impurity recombination)

Σε θερμοδυναμική ισορροπία ισχύει ότι $R_C^{th} = G_C^{th}$ $R_V^{th} = G_V^{th}$

Σε μόνιμη κατάσταση εκτός θερμοδυναμικής ισορροπίας γενικά ισχύει $\mathrm{R_C^{th}} \neq \mathrm{G_C^{th}}$ $\mathrm{R_V^{th}} \neq \mathrm{G_V^{th}}$

Από τις εξισώσεις συνέχειας έχω

$$G_L = \mathrm{R}_C - \mathrm{G}_C = \mathrm{R}_V - \mathrm{G}_V$$

Ορίζω την ποσότητα U σαν τον καθαρό ρυθμός επανασύνδεσης (net recombination rate)

$$U \equiv \mathrm{R}_C - \mathrm{G}_C = \mathrm{R}_V - \mathrm{G}_V$$

## III. Επανασύνδεση Shockley–Read–Hall (SRH) (Band-to-impurity recombination)

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των $R_C$, $G_C$, $R_V$ και $G_V$ (Παράρτημα I) καταλήγω ότι

$$U = \frac{V_{th} \cdot \sigma_n \cdot \sigma_p \cdot N_T \left(n \cdot p - n_i^2\right)}{\sigma_p \left[p + n_i \cdot e^{\frac{E_i - E_T}{kT}}\right] + \sigma_n \left[n + n_i \cdot e^{\frac{E_T - E_i}{kT}}\right]}$$

“Δύναμη επαναφοράς» για την επανασύνδεση είναι η ποσότητα $\left(n \cdot p - n_i^2\right)$

## III. Επανασύνδεση Shockley–Read–Hall (SRH) (Band-to-impurity recombination)

Θεωρώ την περίπτωση που έχω **χαμηλή έγχυση φορέων (low level injection),**

Σε ημιαγωγό τύπου n θα ισχύει ότι $n_n >> p_n$

Επιπλέον θεωρώ ότι το κέντρο επανασύνδεσης βρίσκεται κοντά στην μέση του ενεργειακού χάσματος, οπότε ισχύει ότι

$$n_n \gg n_i \cdot e^{\frac{E_i - E_T}{kT}}$$

Ο **καθαρός ρυθμός επανασύνδεσης** θα δίνεται από

$$\left.\begin{aligned} U &\approx V_{th} \cdot \sigma_p \cdot N_T\,(p_n - p_{no}) \\ \tau_p &= \frac{1}{V_{th} \cdot \sigma_o \cdot N_T} \end{aligned}\right\}$$

**(Low level injection)**

$$\boxed{U = \frac{p(t) - p(0)}{\tau_p}}$$

## III. Επανασύνδεση Shockley–Read–Hall (SRH) (Band-to-impurity recombination)

Μέχρι τώρα έχουμε εξετάσει την περίπτωση που ισχύει έχουμε έγχυση φορέων στον ημιαγωγό $n \cdot p > n_i^2$

Τι ισχύει στην περίπτωση που $n \cdot p < n_i^2$

όταν δηλαδή φορείς έχουν αφαιρεθεί από το ημιαγωγό (αυτή η περίπτωση ισχύει πχ σε μία επαφή p-n που είναι ανάστροφα πολωμένη (θα το δείτε στα επόμενα μαθήματα)

Οι διαδικασίες γέννησης-επανασύνδεσης τείνουν να επαναφέρουν τον ημιαγωγό στην θερμοδυναμική ισορροπία σε κάθε περίπτωση.

Στη περίπτωση αυτή θα πρέπει να έχουμε γέννηση φορέων μέσω των κέντρων επανασύνδεσης.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ
## (Ενότητες Ι-ΙΙ)

*Physics of Semiconductor Devices*, J. P. Colinge and C. A. Colinge, Kluwer Academic Publishers (2002)

*Semiconductor Devices : Physics and Technology*, S. M. Sze, John Wiley & Sons (1985)

*Semiconductor Devices : Physics and Technology*, S. M. Sze and M. K. Lee, John Wiley & Sons (2012)

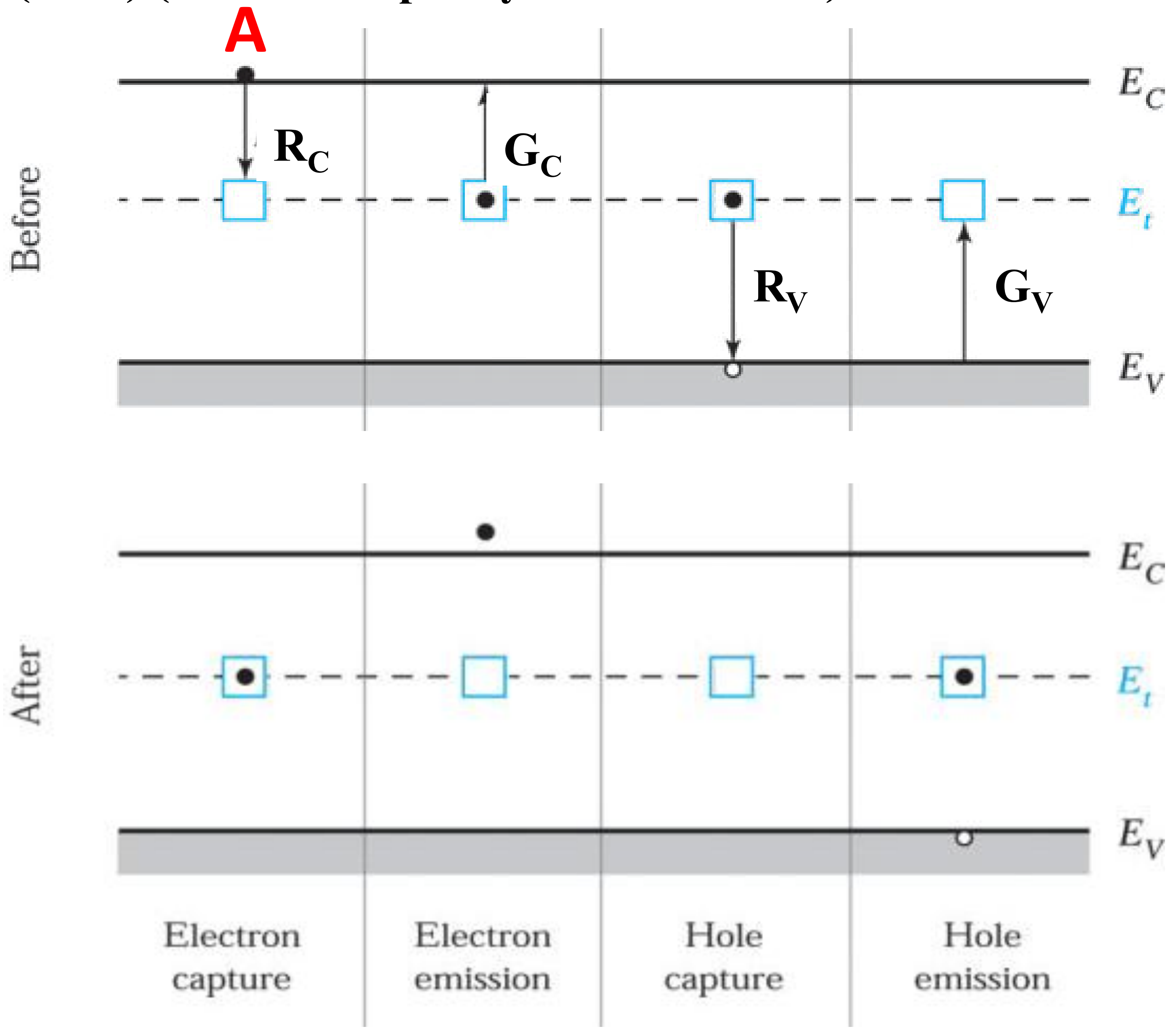
*Physics of Semiconductor Devices*, S. M. Sze, John Wiley & Sons (1981)

*Physical Properties of Semiconductors*, C. M. Wolfe, N. Holonyak, Jr. and G. E. Stillman, Prentice-Hall International, Inc (1989)

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

## III. Επανασύνδεση Shockley–Read–Hall (SRH) (Band-to-impurity recombination)

Η επανασύνδεση γίνεται μέσω μία ενεργειακής στάθμης που βρίσκεται στο ενεργειακό χάσμα.




Ας υποθέσουμε ότι το κέντρο επανασύνδεσης έχει μία ενεργειακή στάθμη η οποία είναι ουδέτερα φορτισμένη όταν δεν είναι κατειλημμένη από ηλεκτρόνιο και αρνητικά φορτισμένη όταν είναι κατειλημμένη από ηλεκτρόνιο.

## III. Επανασύνδεση Shockley–Read–Hall (SRH) (Band-to-impurity recombination)

**Διαδικασία Α**: Παγίδευση ηλεκτρονίου: Ένα ηλεκτρόνιο από τη ζώνης αγωγιμότητας παγιδεύεται στο κέντρο επανασύνδεσης

Έστω $N_T$ η πυκνότητα των ενεργειακών κέντρων και $E_T$ η ενεργειακή στάθμη που εισάγει στο ενεργειακό χάσμα του ημιαγωγού. Επειδή η ενεργειακή στάθμη του κέντρου επανασύνδεσης μπορεί να δεχτεί ένα μόνο ηλεκτρόνιο, ένα κέντρο επανασύνδεσης που έχει παγιδεύσει ένα ηλεκτρόνιο δεν μπορεί να παγιδεύσει άλλο.

$$R_{\mathrm{C}} \sim \mathrm{n} \cdot N_{T,unocc}$$

$R_C$: ο ρυθμός παγίδευσης των ηλεκτρονίων ($cm^{-3}s^{-1}$)

n: η συγκέντρωση των ηλεκτρονίων στη ζώνη αγωγιμότητας

$N_{T,unocc}$ : ο αριθμός των κέντρων επανασύνδεσης που δεν είναι κατειλημμένα από ηλεκτρόνια

## III. Επανασύνδεση Shockley–Read–Hall (SRH) (Band-to-impurity recombination)

Αλλά η πιθανότητα κατάληψης ενός κέντρου επανασύνδεσης από ηλεκτρόνιο θα δίνεται από τη στατιστική Fermi-Dirac

$$\mathrm{F}(\mathrm{E_T}) = \frac{1}{1 + e^{\frac{\mathrm{E_T} - \mathrm{E_i}}{kT}}}$$

Οπότε, ο αριθμός των κέντρων επανασύνδεσης που δεν είναι κατειλημμένα από ηλεκτρόνια θα δίνεται από τη σχέση

$$N_{T,unocc} = N_T[1 - \mathrm{F}(\mathrm{E_T})]$$

Με αντικατάσταση έχω ότι

$$R_\mathrm{C} \sim \mathrm{n} \cdot N_T[1 - \mathrm{F}(\mathrm{E_T})]$$

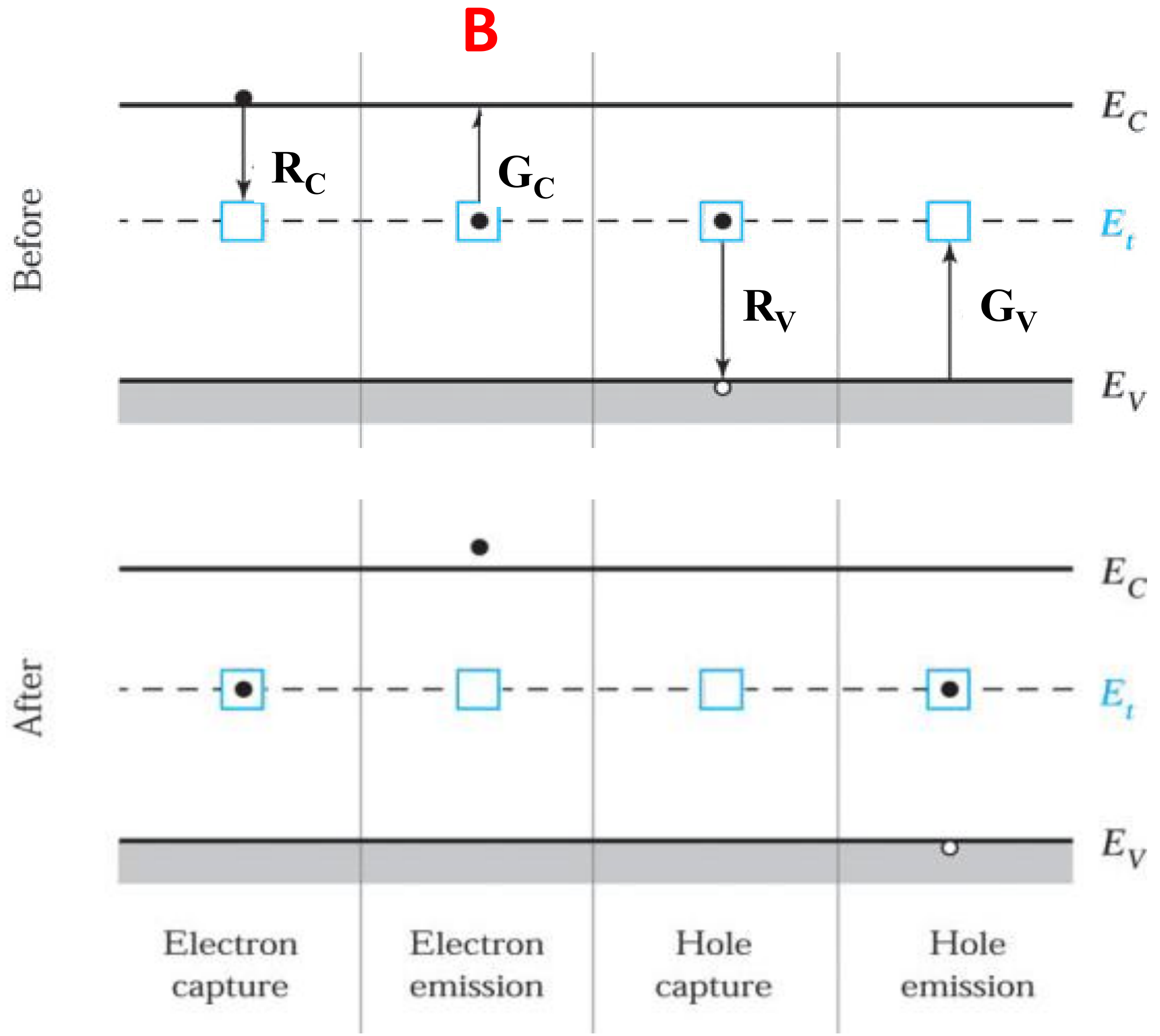
Τελικά

$$R_\mathrm{C} = V_{th} \cdot \sigma_n \cdot \mathrm{n} \cdot N_T[1 - \mathrm{F}(\mathrm{E_T})]$$

$v_{th}$ (cm/s): η θερμική ταχύτητα των ηλεκτρονίων

$\sigma_n$ ($cm^2$): η ενεργός διατομή παγίδευσης (capture cross section)

## III. Επανασύνδεση Shockley–Read–Hall (SRH) (Band-to-impurity recombination)



## ΙΙΙ. Επανασύνδεση Shockley–Read–Hall (SRH) (Band-to-impurity recombination)

**Διαδικασία Β**: Εκπομπή ηλεκτρονίου: Ένα ηλεκτρόνιο από το κέντρο επανασύνδεσης εκπέμπεται στη ζώνη αγωγιμότητα

Είναι το αντίστροφο της παγίδευσης του ηλεκτρονίου.
Στην περίπτωση αυτή ισχύει

$$G_{\mathrm{C}} = \mathrm{e_n} \cdot \mathrm{N_{T,occ}} = \mathrm{e_n} \cdot \mathrm{F(E_T)} \cdot \mathrm{N_T}$$

$e_n$: πιθανότητα εκπομπής

$N_{T,occ}$ : ο αριθμός των κέντρων επανασύνδεσης που είναι κατειλημμένα από ηλεκτρόνια

## III. Επανασύνδεση Shockley–Read–Hall (SRH) (Band-to-impurity recombination)

Σε συνθήκες θερμοδυναμικής ισορροπίας θα ισχύει ότι $\mathrm{R_C} = \mathrm{G_C}$

$$V_{th} \cdot \sigma_n \cdot \mathrm{n} \cdot N_T[1 - \mathrm{F(E_T)}] = \mathrm{e_n} \cdot \mathrm{F(E_T)} \cdot \mathrm{N_T}$$

$$\mathrm{e_n} = V_{th} \cdot \sigma_n \cdot \mathrm{n} \cdot \frac{[1 - \mathrm{F(E_T)}]}{\mathrm{F(E_T)}}$$

Αλλά στην Θ.Ι ισχύει ότι

$$n = n_i \cdot e^{\frac{E_F - E_i}{kT}}$$

Ισχύει ότι

$$\frac{1 - \mathrm{F(E_T)}}{\mathrm{F(E_T)}} = e^{\frac{E_T - E_F}{kT}}$$

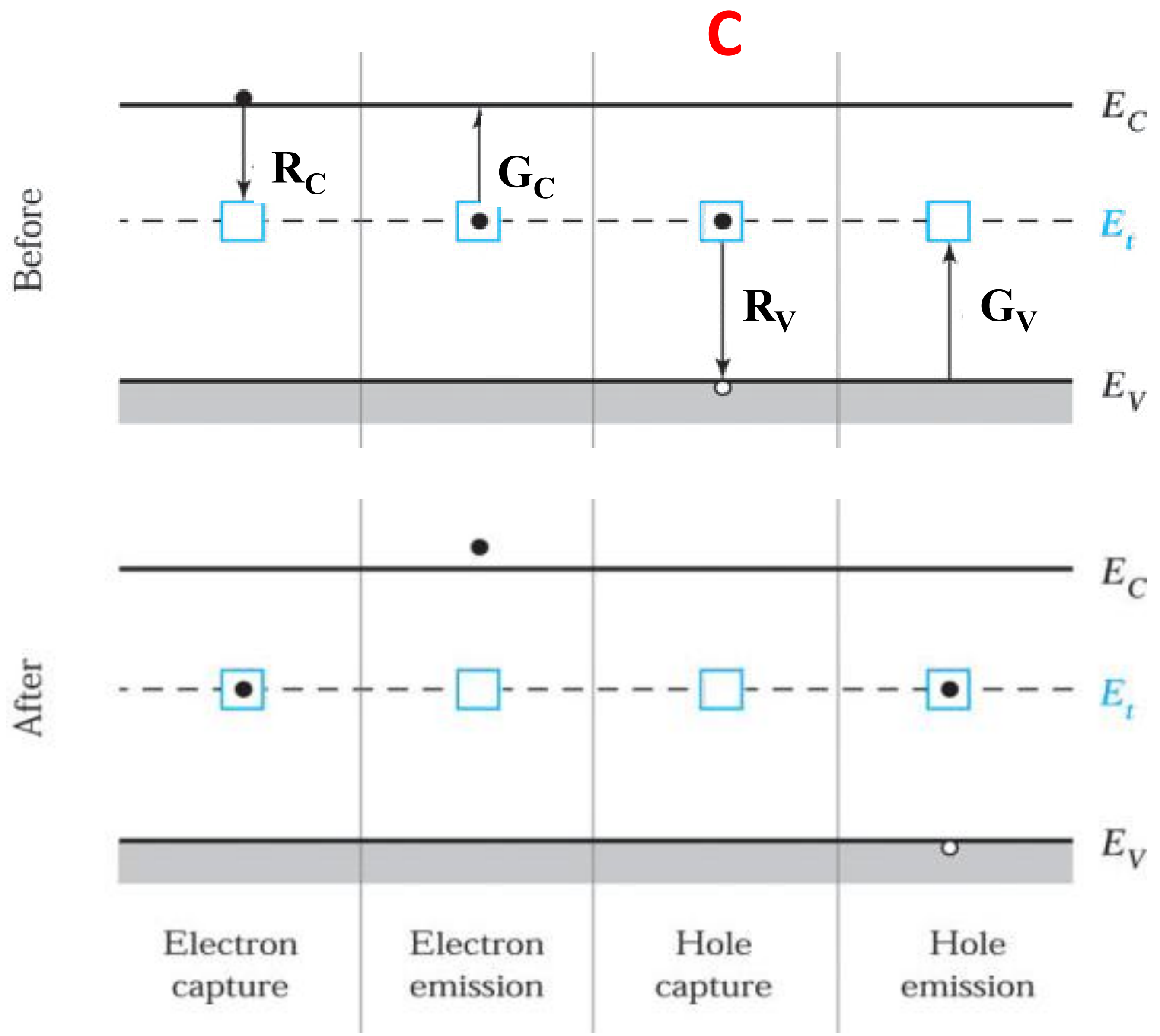
## III. Επανασύνδεση Shockley–Read–Hall (SRH) (Band-to-impurity recombination)

Τελικά

$$\mathrm{e_n} = V_{th} \cdot \sigma_n \cdot n_i \cdot e^{\frac{E_T - E_i}{kT}}$$

Παρατηρούμε ότι όσο πιο κοντά είναι η ενεργειακή στάθμη στην ζώνη αγωγιμότητας τόσο πιο μεγάλη είναι η πιθανότητα εκπομπής του ηλεκτρονίου.

## III. Επανασύνδεση Shockley–Read–Hall (SRH) (Band-to-impurity recombination)



## III. Επανασύνδεση Shockley–Read–Hall (SRH) (Band-to-impurity recombination)

**Διαδικασία C**: Παγίδευση οπής: Μία οπή από τη ζώνης σθενους παγιδεύεται στο κέντρο επανασύνδεσης (Ισοδύναμα ένα ηλεκτρόνιο από το κέντρο επανασύνδεσης εκπέμπεται στη ζώνη σθένους)

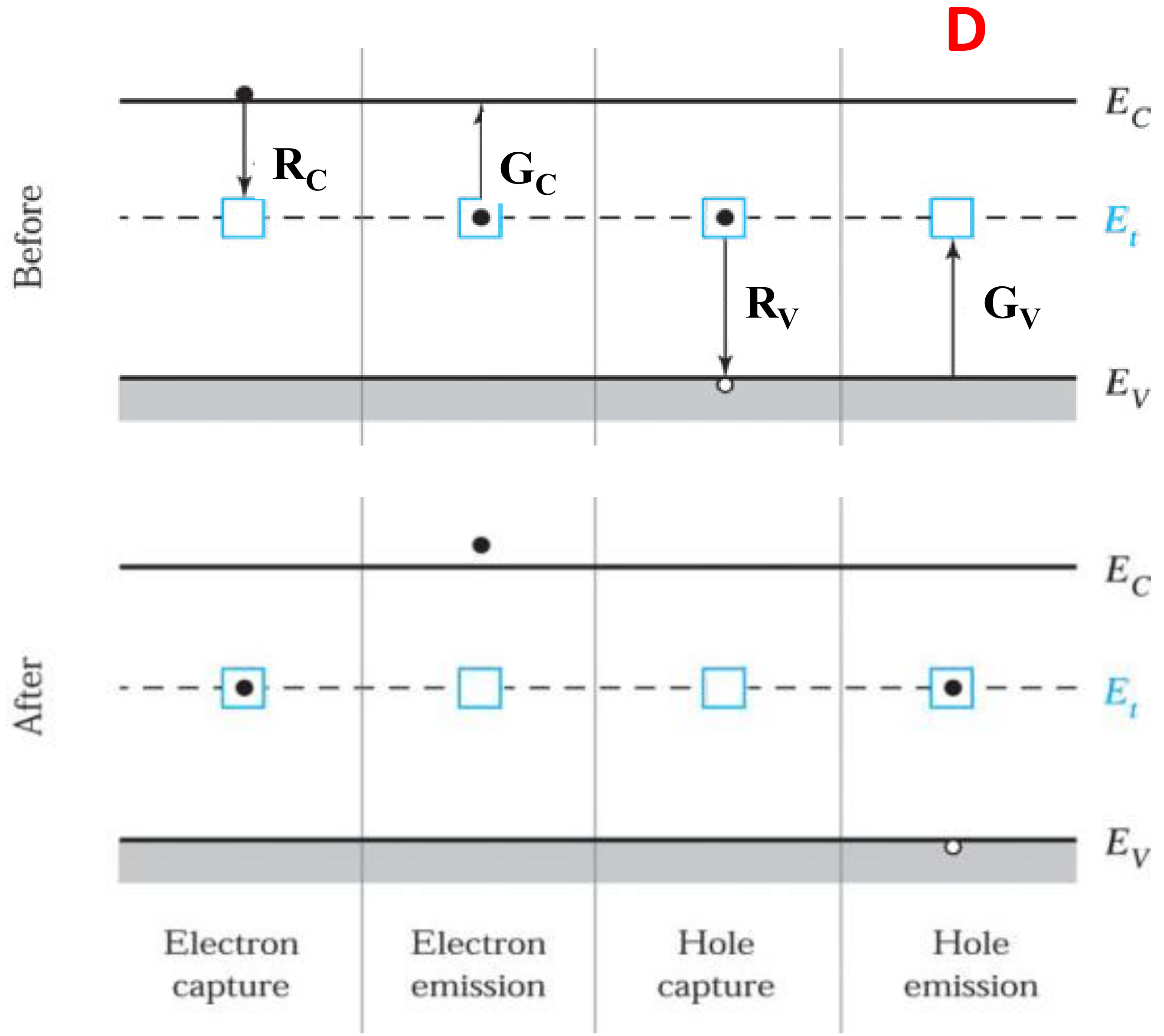
Ισχύει ότι $R_V \sim \mathrm{p} \cdot N_{T,occ}$

$R_V$: ο ρυθμός παγίδευσης των ηλεκτρονίων ($cm^{-3}s^{-1}$)
p: η συγκέντρωση των οπών στη ζώνη σθένους
$N_{T,occ}$ : ο αριθμός των κέντρων επανασύνδεσης που είναι κατειλημμένα από ηλεκτρόνια

Αντίστοιχα με τα ηλεκτρόνια, έχω ότι $R_V = V_{th} \cdot \sigma_p \cdot \mathrm{p} \cdot N_T \cdot \mathrm{F}(\mathrm{E_T})$

$v_{th}$ (cm/s): η θερμική ταχύτητα των ηλεκτρονίων
$\sigma_p$ ($cm^2$): η ενεργός διατομή παγίδευσης (capture cross section)

## III. Επανασύνδεση Shockley–Read–Hall (SRH) (Band-to-impurity recombination)



## III. Επανασύνδεση Shockley–Read–Hall (SRH) (Band-to-impurity recombination)

**Διαδικασία D**: Εκπομπή οπής: Μία οπή από το κέντρο επανασύνδεσης εκπέμπεται στη ζώνη σθένους (Ισοδύναμα ένα ηλεκτρόνιο από τη ζώνη σθένους μεταβαίνει στο κέντρο επανασύνδεσης)

Στην περίπτωση αυτή ισχύει $G_V = \mathrm{e_p} \cdot \mathrm{N}_{\mathrm{T},unocc} = \mathrm{e_p} \cdot \mathrm{N_T}[1 - \mathrm{F}(\mathrm{E_T})]$

$e_p$: πιθανότητα εκπομπής
$N_{T,occ}$ : ο αριθμός των κέντρων επανασύνδεσης που είναι κατειλημμένα από ηλεκτρόνια

Σε συνθήκες θερμοδυναμικής ισορροπίας θα ισχύει ότι $\mathrm{R_V} = \mathrm{G_V}$

Οπότε η πιθανότητα εκπομπής ep δίνεται από τη σχέση $\mathrm{e}_p = V_{th} \cdot \sigma_p \cdot n_i \cdot e^{\frac{E_i - E_T}{kT}}$

## III. Επανασύνδεση Shockley–Read–Hall (SRH) (Band-to-impurity recombination)

| Στατιστική | Ηλεκτρόνια | Οπές |
|---|---|---|
| Εκπομπή | $G_{\mathrm{C}} = \mathrm{e_n} \cdot \mathrm{F(E_T)} \cdot \mathrm{N_T}$ | $G_V = \mathrm{e_p} \cdot \mathrm{N_T}[1 - \mathrm{F(E_T)}]$ |
| Παγίδευση | $R_{\mathrm{C}} = V_{th} \cdot \sigma_n \cdot \mathrm{n} \cdot N_T[1 - \mathrm{F(E_T)}]$ | $R_V = V_{th} \cdot \sigma_p \cdot \mathrm{p} \cdot N_T \cdot \mathrm{F(E_T)}$ |

## IV. Επανασύνδεση στην επιφάνεια

$$U_S = \frac{V_{th} \cdot \sigma_n \cdot \sigma_p \cdot N_{st} \left(p_s \cdot n_s - n_i^2\right)}{\sigma_p \left[p_s + n_i \cdot e^{\frac{E_i - E_T}{kT}}\right] + \sigma_n \left[n_s + n_i \cdot e^{\frac{E_T - E_i}{kT}}\right]}$$

$n_s$: συγκέντρωση ηλεκτρονίων στην επιφάνεια

$p_s$: συγκέντρωση οπών στην επιφάνεια

$N_{st}$: πυκνότητα κέντρων επανασύνδεσης στην επιφάνεια (ανά μονάδα επιφάνειας)

## IV. Επανασύνδεση στην επιφάνεια

Για συνθήκες **χαμηλής έγχυσης φορέων** και θεωρώντας ότι $n_s >> p_s$ (ημιαγωγό τύπου n) και $n_S \gg n_i \cdot e^{\frac{E_i - E_T}{kT}}$

Η εξίσωση απλοποιείται στην μορφή $U_S \approx V_{th} \cdot \sigma_p \cdot N_{st} \, (p_s - p_{no})$

$S_{lr} = V_{th} \cdot \sigma_p \cdot N_{st}$ έχει διαστάσεις $cm^2/s$ και ονομάζεται επιφανειακή ταχύτητα επανασύνδεσης χαμηλής έγχυσης (low-injection surface recombination velocity)