

Φυσική και Τεχνολογία Υλικών και Διατάξεων Στερεάς Κατάστασης

Δρ Χρήστος Τσάμης

Ινστιτούτο Νανοεπιστήμης και Νανοτεχνολογίας

ΕΚΕΦΕ «Δημόκριτος»

c.tsamis@inn.demokritos.gr

Πάτρα, 2026

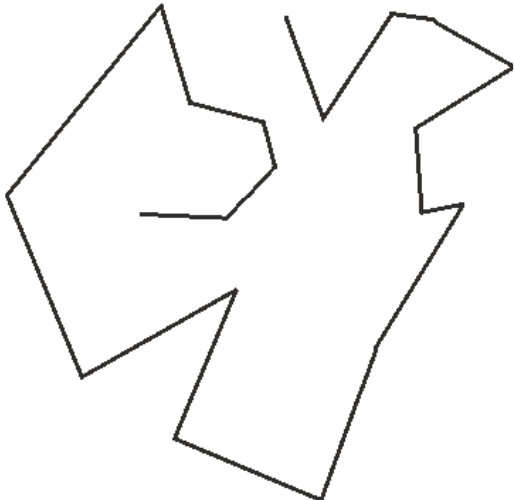
2. Φαινόμενα μεταφοράς στους ημιαγωγούς

Κίνηση φορέων σε ένα ημιαγωγό

Αν θεωρήσουμε ένα κρυσταλλικό πλέγμα σε θερμοκρασία T , από την θερμοδυναμική γνωρίζουμε ότι ένας φορέας θα έχει κατά μέσο όρο θερμική ενέργεια ίση με $3kT/2$. Αυτό σημαίνει ότι ένας φορέας θα κινείται με μια μέση ταχύτητα V_{th} η οποία θα δίνεται από την σχέση

$$\frac{1}{2} m_e^{eff} V_{th}^2 = \frac{3}{2} kT$$

Random Brownian motion



Για το πυρίτιο σε θερμοκρασία περιβάλλοντος μπορούμε να υπολογίσουμε ότι $U_{th} = 10^7 \text{ cm s}^{-1}$

Σκέδαση φορέων

Σε ένα τέλειο κρυσταλλικό πλέγμα, σε θερμοκρασία $T=0^{\circ}\text{K}$ (όπου μπορώ να αγνοήσω τις ταλαντώσεις του πλέγματος), η κίνηση των φορέων θα γίνεται χωρίς καμία “δυσκολία”. Είναι οι αποκλίσεις από την τέλεια περιοδικότητα του κρύσταλλου, που διαταράσσουν την κίνηση των φορέων και σκεδάσουν τους φορείς.

Μπορούμε να διακρίνουμε τα παρακάτω είδη σκέδασης

A. Σκεδάσεις με το πλέγμα (Lattice Scattering)

Οφείλεται στις σκεδάσεις που υφίστανται οι φορείς εξαιτίας των ταλαντώσεων του κρυσταλλικού πλέγματος. Οι θερμικές ταλαντώσεις μπορούν να θεωρηθούν στα πλαίσια της κβαντομηχανικής σαν διακριτά σωμάτια τα φωνόνια (phonons) και μπορούμε να θεωρήσουμε τις σκεδάσεις με το πλέγμα σαν συγκρούσεις μεταξύ των φορέων και των φωνονίων, για αυτό το είδος των σκεδάσεων ονομάζεται και phonon scattering. Το Lattice scattering αυξάνει με τη θερμοκρασία καθώς αυξάνουν οι ταλαντώσεις του πλέγματος. Είναι ο **κυρίαρχος μηχανισμός σε θερμοκρασία δωματίου.**

Σκέδαση σε προσμίξεις (Impurity Scattering)

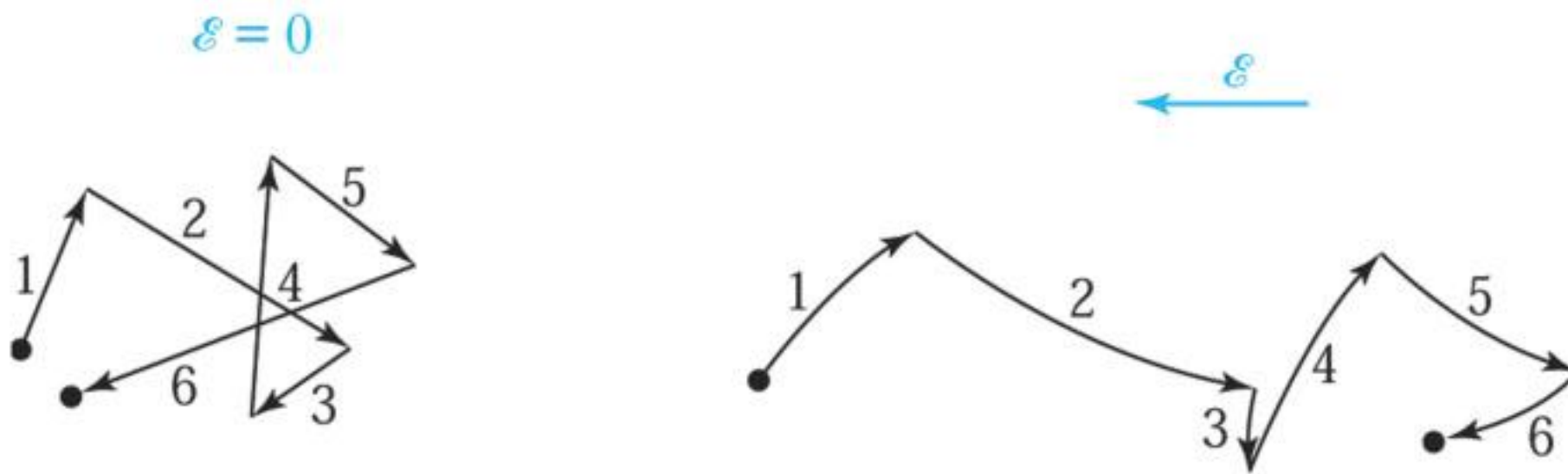
- Συγκρούσεις με τις **ιονισμένες προσμίξεις** λόγω αλληλεπίδρασης Coulomb. Το φαινόμενο εξαρτάται από την θερμοκρασία (ελαττώνεται όσο αυξάνει η θερμοκρασία) και από τη συγκέντρωση των προσμίξεων.
- Συγκρούσεις με τα **ουδέτερα άτομα των προσμίξεων** όταν η συγκέντρωση των προσμίξεων είναι αρκετά υψηλή. Η σκέδαση λαμβάνει χώρα καθώς ο φορέας αλληλοεπιδρά ξεχωριστά με το πυρήνα και τα ηλεκτρόνια.

Σκέδαση μεταξύ φορέων (Carrier-carrier Scattering)

Σκεδάσεις μεταξύ φορέων (e-e, p-p, e-p), όταν η συγκέντρωση των φορέων είναι μεγάλη

Ρεύμα Ολίσθησης

Υπό την επίδραση ενός εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου τα ηλεκτρόνια και οι οπές αποκτούν μία σταθερή ταχύτητα (Σε αντίθεση με τους ελεύθερους φορείς οι οποίοι αποκτούν σταθερή επιτάχυνση. Αυτή η διαφορά οφείλεται στις σκεδάσεις που υφίστανται οι φορείς του κρυστάλλου από τα διάφορα κέντρα σκεδάσεις, όπως έχουμε ήδη αναφέρει)

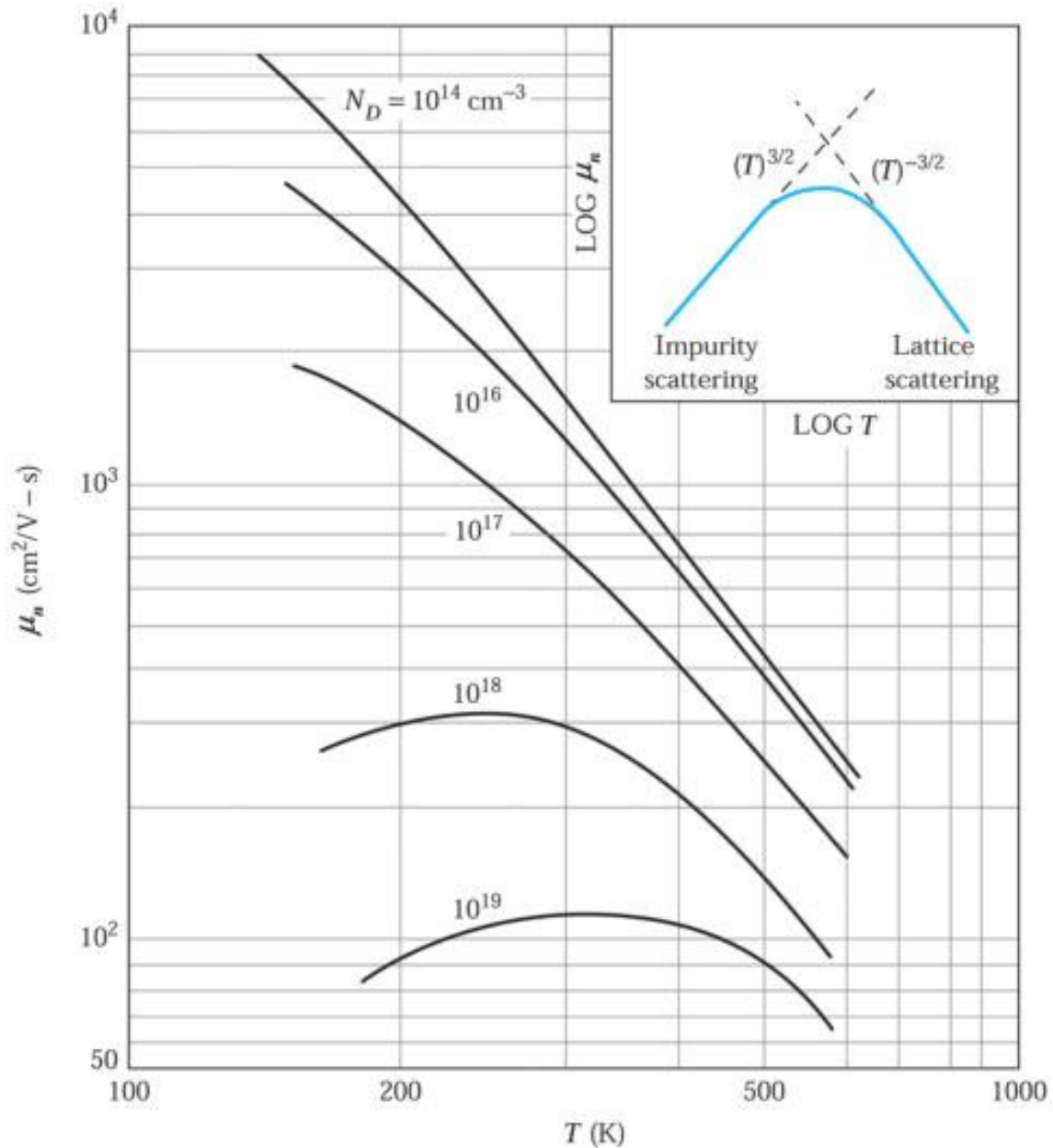


Θεωρούμε ότι η ορμή που αποκτάει το ηλεκτρόνιο ανάμεσα σε δύο διαδοχικές συγκρούσεις ισούται με την ώθηση της δύναμης το αντίστοιχο χρονικό διάστημα

$$m_n \vec{V}_n^{drift} = -q \vec{E} \tau_c \quad \longrightarrow \quad \vec{V}_n^{drift} = - \left[\frac{q \tau_c}{m_n} \right] \vec{E} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{V}_n^{drift} = -\mu_n \vec{E}}$$

μ_n : ευκινησία (mobility), $\text{cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$

Η ευκινησία εξαρτάται από το είδος των σκεδάσεων που υπόκειται το ηλεκτρόνιο

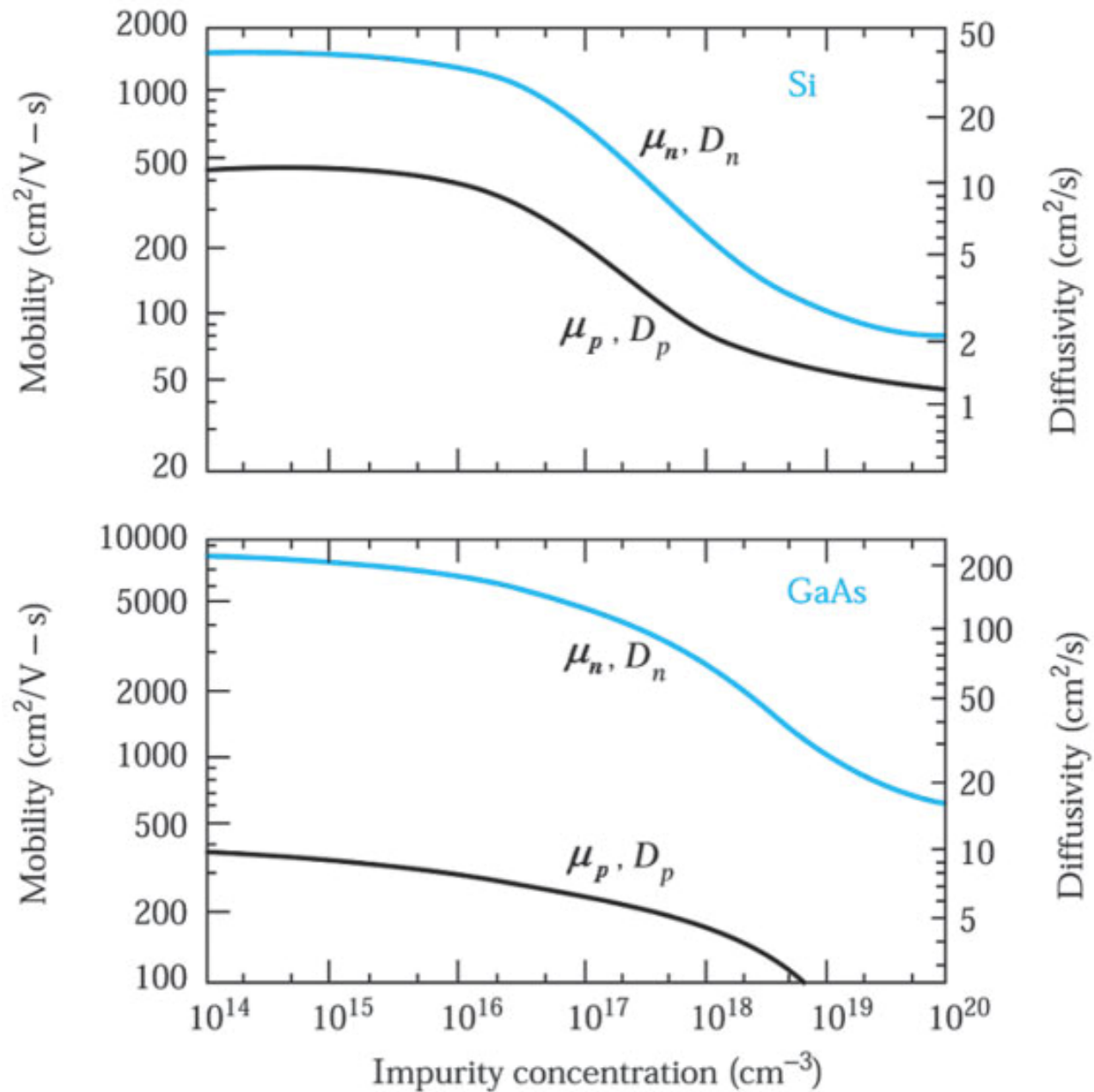


Lattice scattering $\mu_n \sim T^{-\frac{3}{2}}$

Impurity scattering $\mu_n \sim \frac{T^{\frac{3}{2}}}{N}$

Matthiessen's rule

$$\frac{1}{\mu_n} = \frac{1}{\mu_{n,lat}} + \frac{1}{\mu_{n,imp}} + \dots$$



Ευκινησία και διαχυτότητα του πυριτίου και του GaAs στους 300°K σαν συνάρτηση της συγκέντρωσης των προσμίξεων

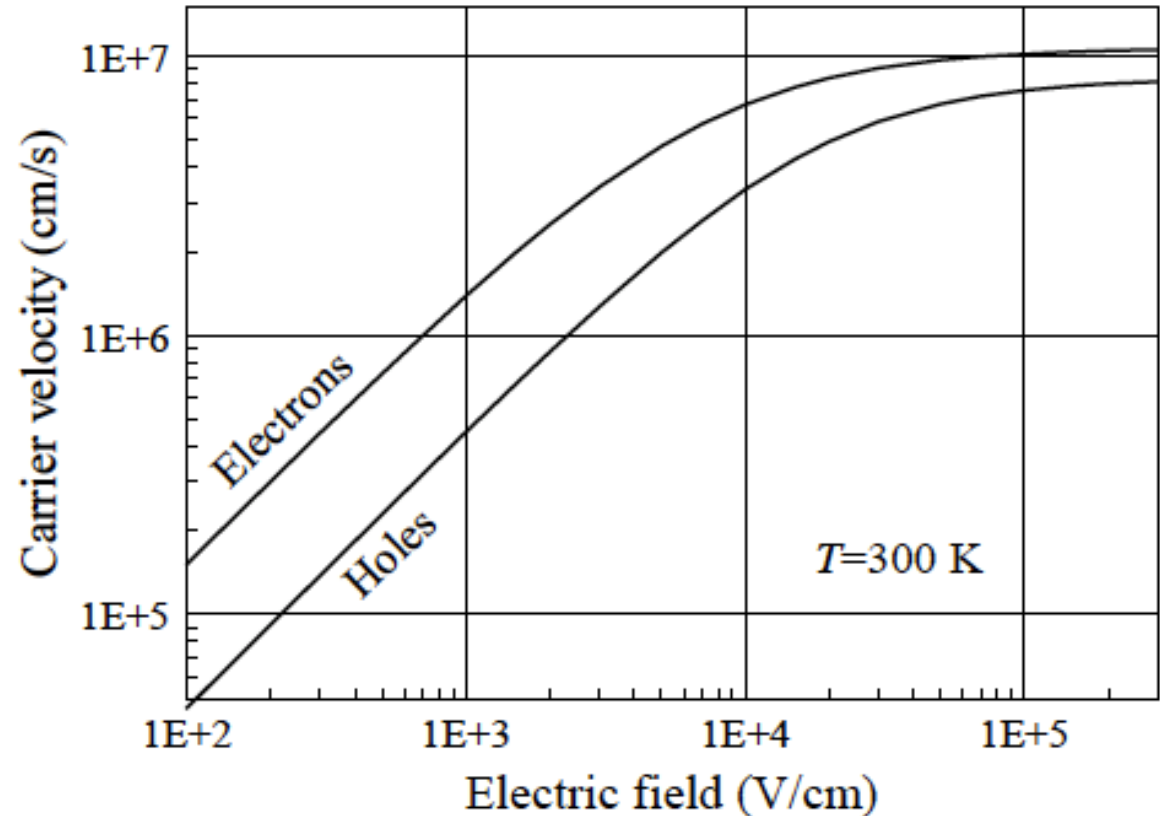
Για μικρές τιμές του ηλεκτρικού πεδίου θα ισχύει η γραμμική σχέση

Ηλεκτρόνια

$$v_{n,x}^{\text{drift}} = -\mu_n \cdot E_x$$

Οπές

$$v_{p,x}^{\text{drift}} = \mu_p \cdot E_x$$



$$v_{sat} \approx 10^7 \text{ cm/s}$$

Αλλά η προσανατολισμένη κίνηση φορέων ισοδυναμεί με ένα ηλεκτρικό ρεύμα

$$J_{n,x}^{\text{drift}} = (-q) \cdot n \cdot V_{n,x}^{\text{drift}} = (-q) \cdot n \cdot (-\mu_n \cdot E_x)$$

$$J_{p,x}^{\text{drift}} = q \cdot p \cdot V_{p,x}^{\text{drift}} = q \cdot p \cdot \mu_p \cdot E_x$$

Ρεύμα ολίσθησης για τα ηλεκτρόνια

$$J_{n,x}^{\text{drift}} = q \cdot n \cdot \mu_n \cdot E_x$$

Ρεύμα ολίσθησης για τις οπές

$$J_{p,x}^{\text{drift}} = q \cdot p \cdot \mu_p \cdot E_x$$

$$\vec{J}_n^{\text{drift}} = q \cdot n \cdot \mu_n \cdot \vec{E}$$

$$\vec{J}_p^{\text{drift}} = q \cdot p \cdot \mu_p \cdot \vec{E}$$

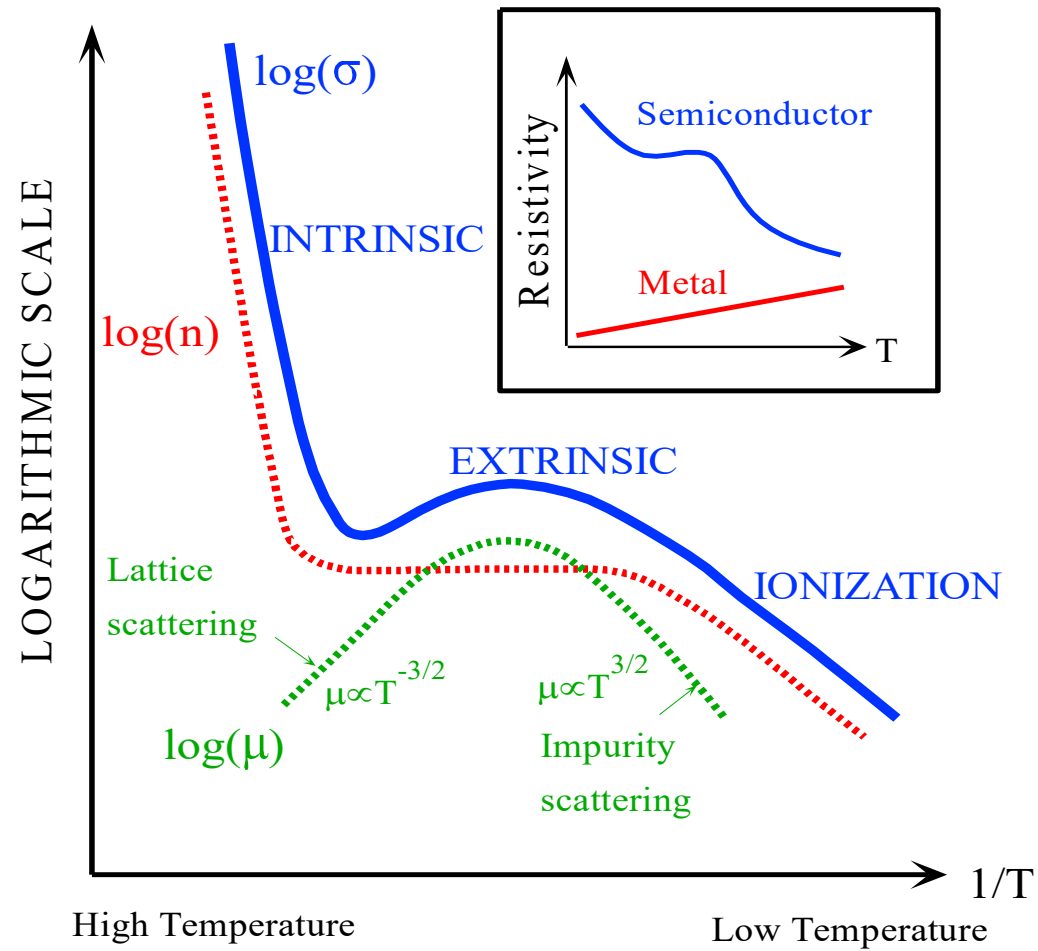
Τα ρεύματα ολίσθησης ηλεκτρονίων και οπών είναι στην ίδια κατεύθυνση.

Οπότε το ολικό ρεύμα ολίσθησης στον ημιαγωγό θα δίνεται από

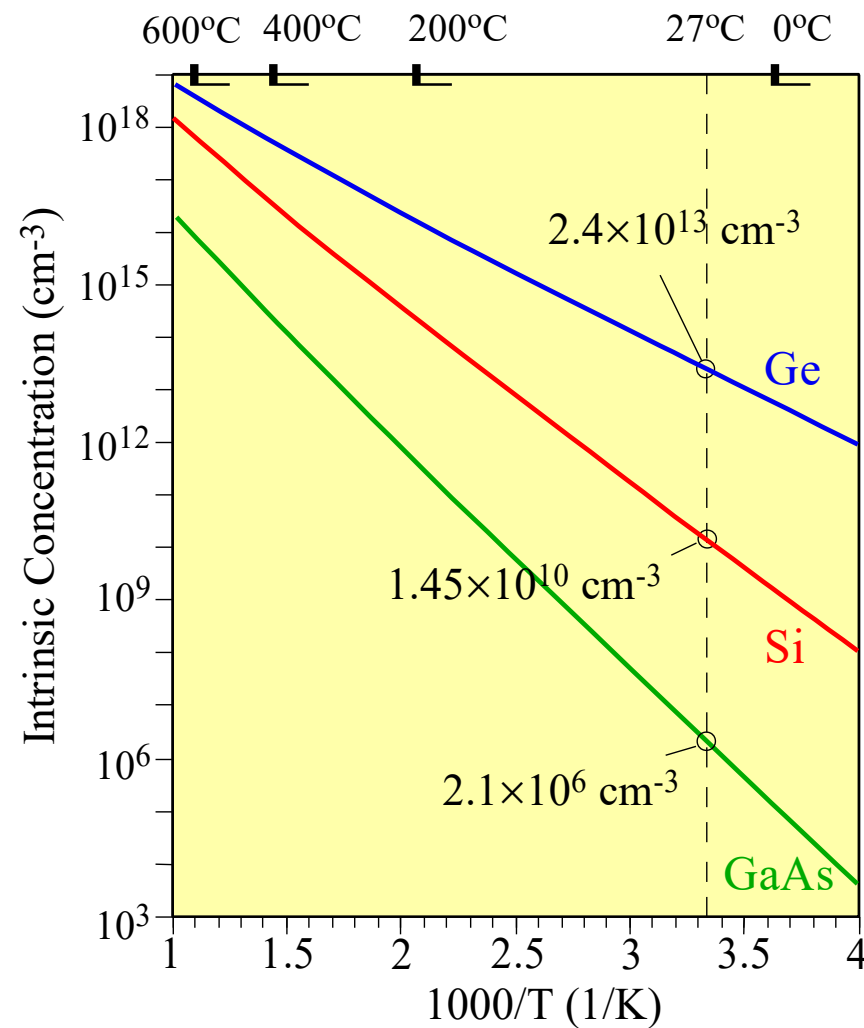
$$\vec{j}^{\text{drift}} = \vec{j}_n^{\text{drift}} + \vec{j}_p^{\text{drift}} = (q n \mu_n + q p \mu_p) \vec{E} = \sigma \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$$

$$\sigma = q(n \mu_n + p \mu_p) \quad \rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q(n \mu_n + p \mu_p)}$$

όπου σ είναι η αγωγιμότητα (conductivity) και ρ είναι η ειδική αντίσταση (resistivity)

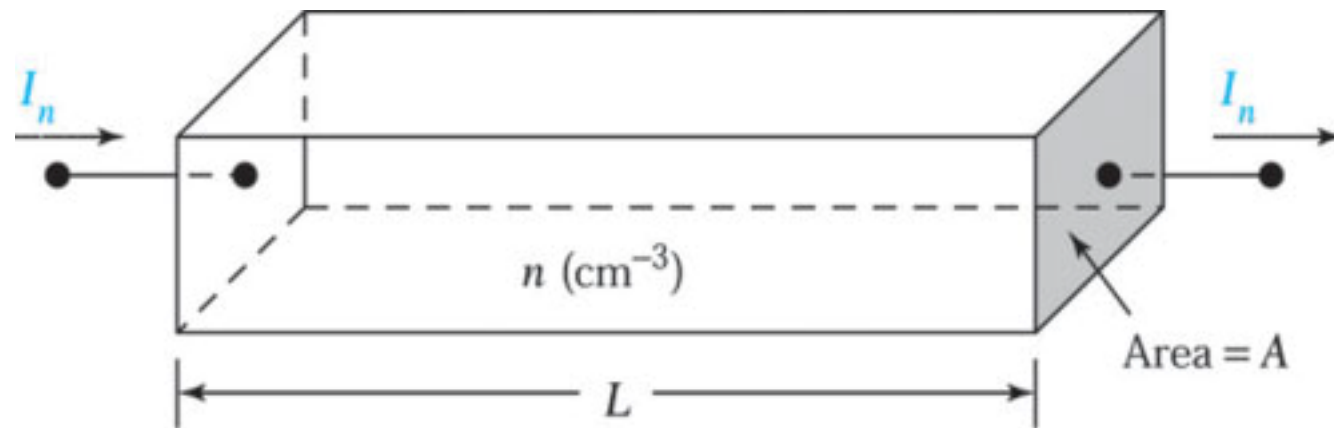


Temperature dependence of electrical conductivity for a doped (*n*-type) semiconductor.



The temperature dependence of the intrinsic concentration.

Current conduction in a uniformly doped semiconductor bar with length L and cross-sectional area A .



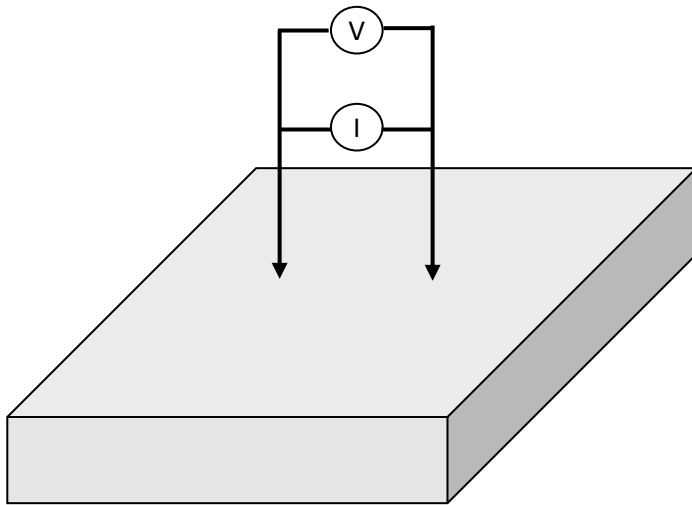
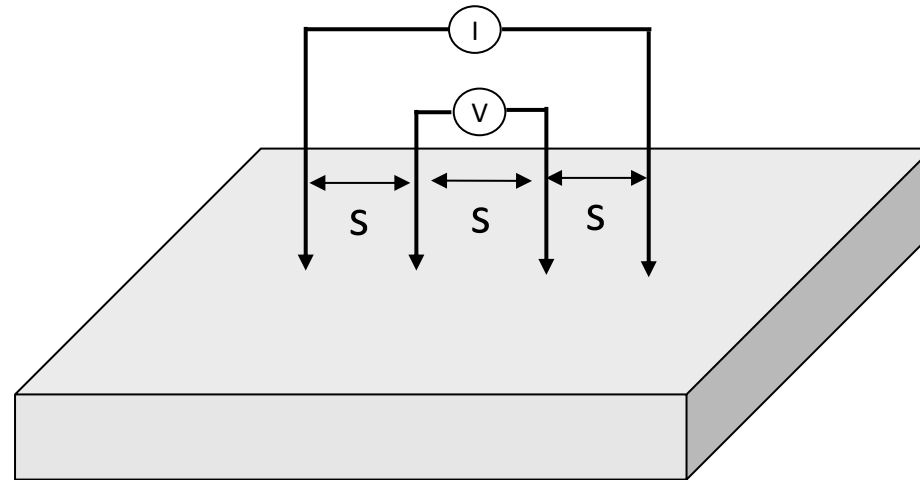
ρ = resistivity
 R = resistance

$$R = \frac{\rho l}{A}$$

For n-type Si:

$$\rho = \frac{1}{q\mu_n N_D}$$

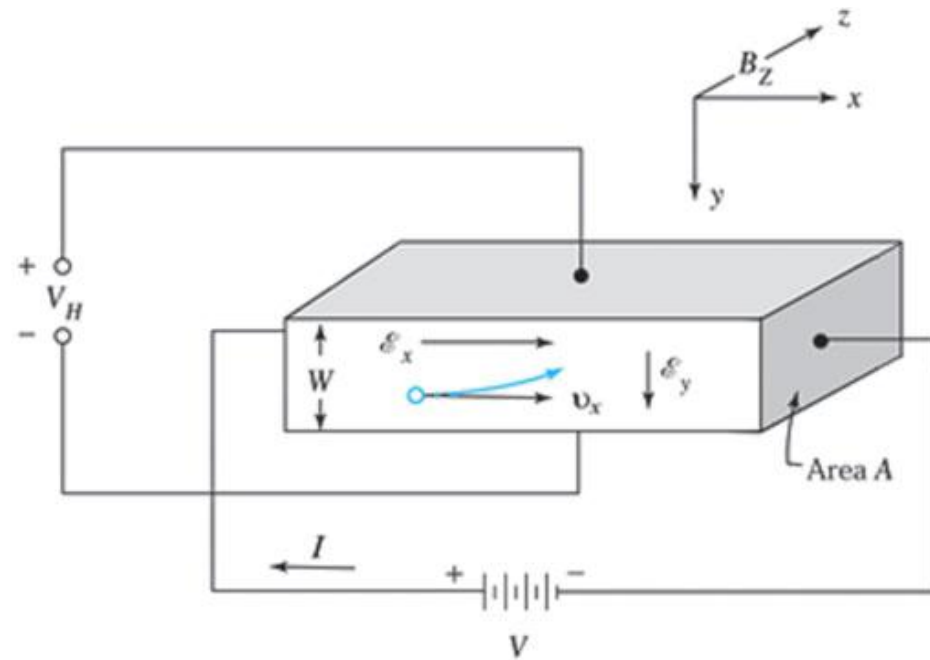
Μέτρηση ειδικής αντίστασης

2-point probe4-point probe

$$V_{meas} = 2iR_C + (I + i)R_{Si} \approx 2iR_C + IR_{Si} \approx IR_{Si}$$

4-point probe gets rid of the contact resistance.

Μετρήσεις Hall

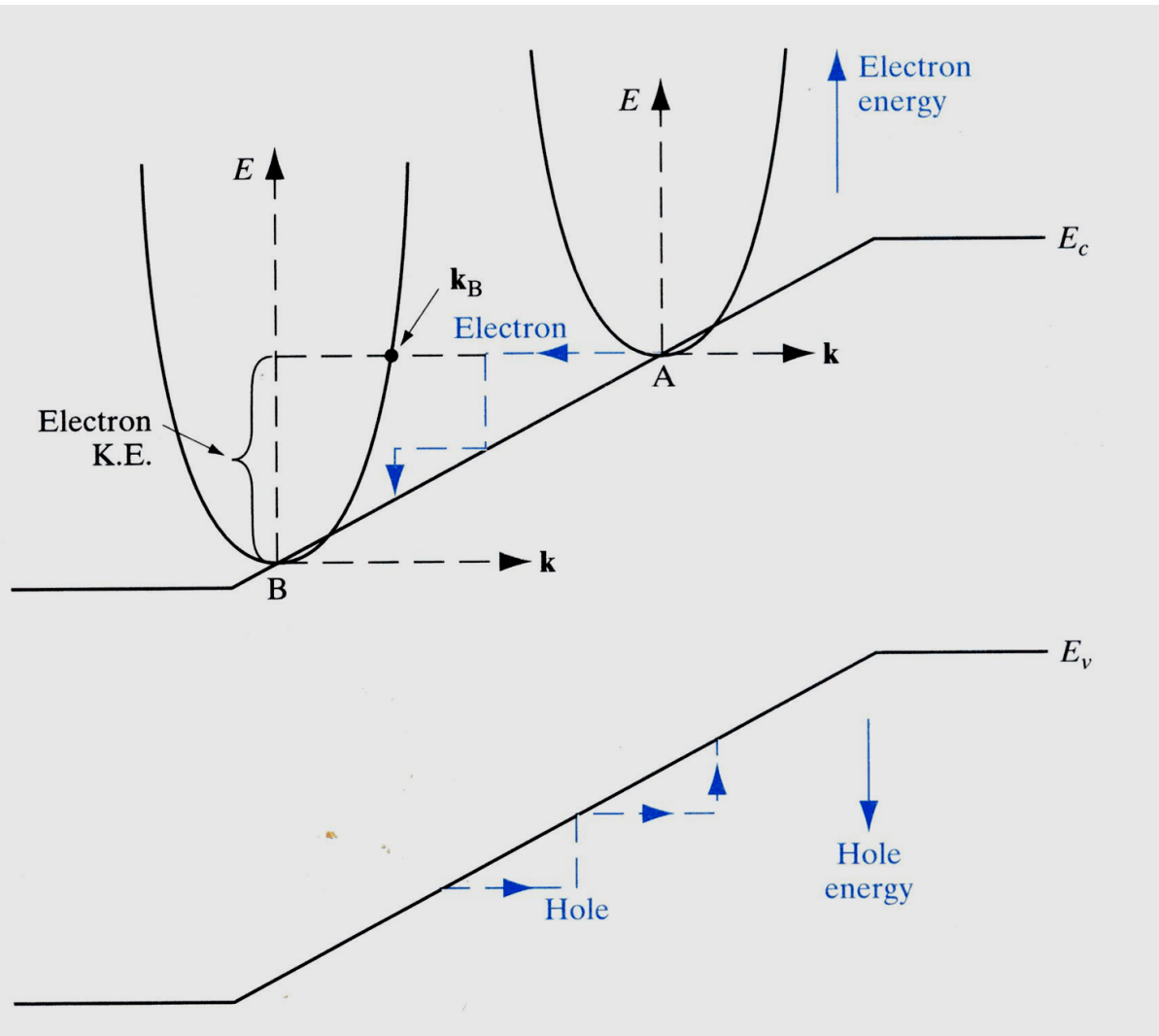


$$R_H = \frac{V_H w}{BI} \longrightarrow \begin{cases} R_H = -\frac{1}{qn} & n \gg p \\ R_H = \frac{1}{qp} & p \gg n \end{cases}$$

Ευκλινησία:

$$\rho = \frac{V_A}{I} \frac{wd}{\ell} \quad \mu_H \equiv \frac{|R_H|}{\rho} \approx \mu_{drift}$$

Ενεργειακό διάγραμμα παρουσία ηλεκτρικού πεδίου



- (E, k) band diagram vs (E, x) simplified band diagram
- Total energy is the sum of potential energy and kinetic energy
- Band edges E_c and E_v correspond to electron potential energy
- Energies higher in the band correspond to additional kinetic energy of the electron
- Electron and hole lose kinetic energy to heat by scattering

Ποια είναι η κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου

Αριστερά ← ή Δεξιά →

Όταν εφαρμόζεται ένα ηλεκτρικό πεδίο E σε ένα ημιαγωγό, σε κάθε ηλεκτρόνιο θα ασκείται μία δύναμη $-qE$ εξαιτίας του ηλεκτρικού πεδίου. Η δύναμη αυτή θα ισούται **με την αρνητική βαθμίδα της δυναμικής ενέργειας**.

Το ελάχιστο της ζώνης αγωγιμότητας αντιστοιχεί στην **δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου**

$$-q E_x(x) = -\frac{dE_c(x)}{dx}$$

Αλλά $E_c // E_v$ παντού μέσα στον ημιαγωγό

$$\frac{dE_c(x)}{dx} = \frac{dE_i(x)}{dx}$$

$$E_x(x) = \frac{1}{q} \cdot \frac{dE_i(x)}{dx}$$

Να μη γίνεται σύγχυση ανάμεσα στο E (E_x, E_y, E_z) για το ηλεκτρικό πεδίο και E_c, E_v, E_f, E_i για τις ενεργειακές ζώνες.

$$E_x(x) = \frac{1}{q} \cdot \frac{dE_i(x)}{dx}$$

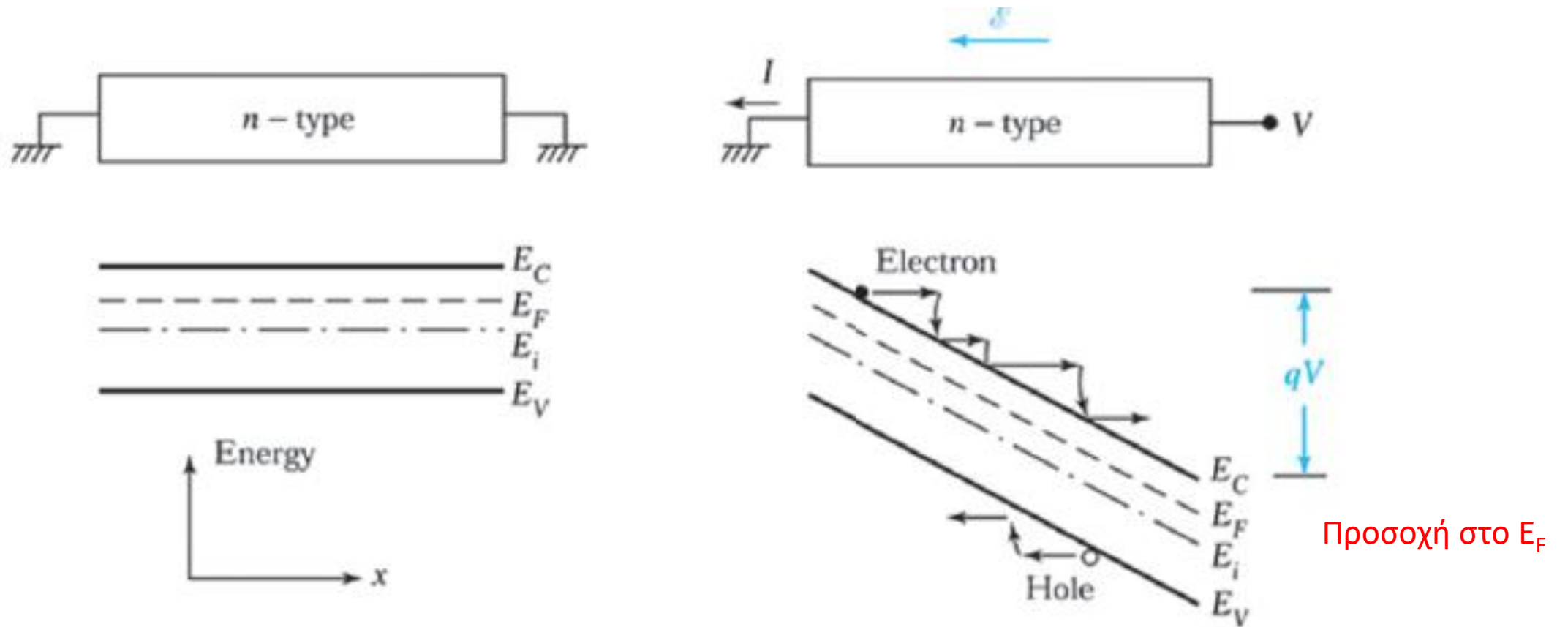
Αλλά το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να εκφραστεί σαν τη βαθμίδα ενός δυναμικού $\psi(x)$

$$E_x(x) \equiv -\frac{d\psi(x)}{dx}$$

Ηλεκτροστατικό Δυναμικό

$$\psi_i(x) = -\frac{E_i(x)}{q}$$

Να μη γίνεται σύγχυση ανάμεσα στο E (ή E_x, E_y, E_z) για το ηλεκτρικό πεδίο και E_C, E_V, E_F, E_i για τις ενεργειακές ζώνες.



Conduction process in an n-type semiconductor (a) at thermal equilibrium and (b) under a biasing condition.

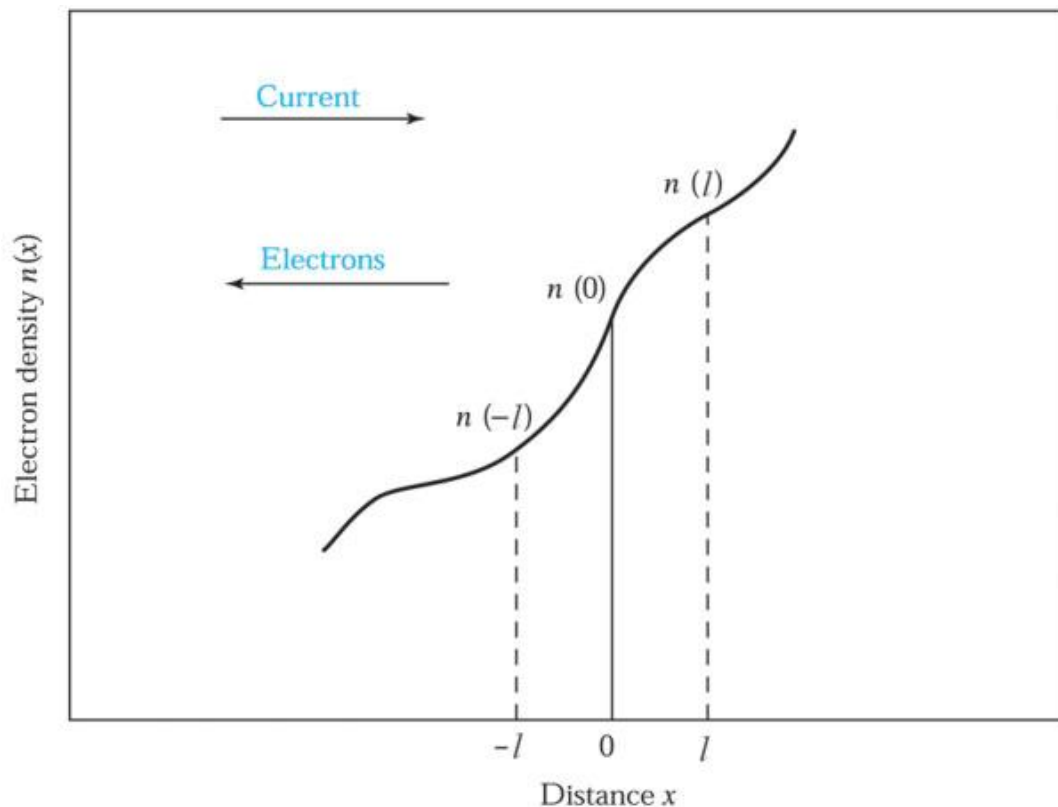
Το σχήμα είναι από βιβλίο και είναι **λάθος**. Η έννοια της **στάθμης Fermi δεν έχει νόημα εκτός Θ.Ι.** Όπως θα δούμε στη συνέχεια σε αυτές τις περιπτώσεις ορίζουμε για ευκολία τις ψευδοστάθμες Fermi.

Ρεύματα ολίσθησης σε ένα ημιαγωγό

	1-διάσταση	3-διαστάσεις
Ηλεκτρόνια	$J_{n,x}^{\text{drift}} = q \cdot n \cdot \mu_n \cdot E_x$	$\vec{J}_n^{\text{drift}} = q \cdot n \cdot \mu_n \cdot \vec{E}$
Οπές	$J_{p,x}^{\text{drift}} = q \cdot p \cdot \mu_p \cdot E_x$	$\vec{J}_p^{\text{drift}} = q \cdot p \cdot \mu_p \cdot \vec{E}$

Ρεύμα Διάχυσης

Αν θεωρήσω ότι υπάρχει μια μεταβολή στην συγκέντρωση $N(x)$ κάποιου είδους σωματιδίων, θα υπάρχει ροή σωματιδίων προς τη κατεύθυνση που ελαττώνεται η συγκέντρωση και θα ισχύει ότι



$$\vec{\Phi} = -D \vec{\nabla} N(\vec{r}) \quad (\text{Νόμος του Fick})$$

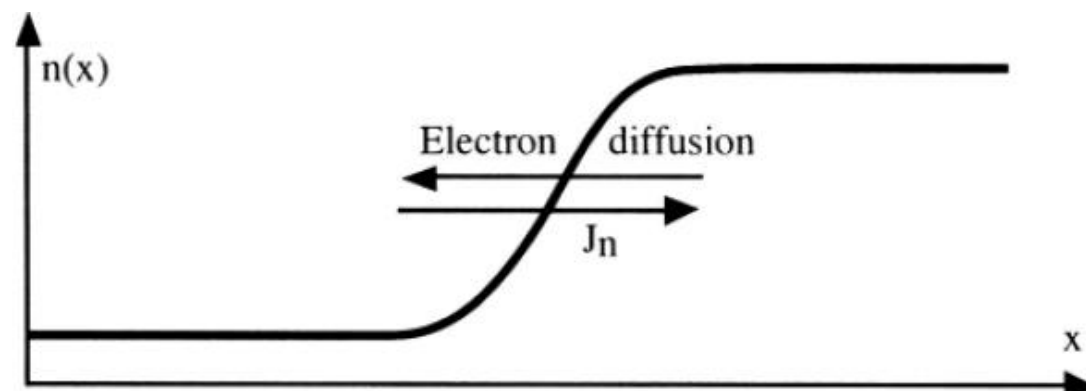
όπου D είναι η διαχυτότητα (diffusivity)

Αλλά, η ροή φορτισμένων σωματιδίων
ισοδυναμεί με ένα ρεύμα

1. Αν τα φορτισμένα σωματίδια είναι ηλεκτρόνια

$$\Phi_{n,x} = -D_n \cdot \frac{dn(x)}{dx}$$

$$J_{n,x} = (-q) \cdot \Phi_{n,x} = (-q) \cdot \left(-D_n \cdot \frac{dn(x)}{dx}\right)$$



Ρεύμα διάχυσης ηλεκτρονίων

Σε μία διάσταση

$$J_{n,x}^{dif} = q \cdot D_n \cdot \frac{dn(x)}{dx}$$

Σε τρεις διαστάσεις

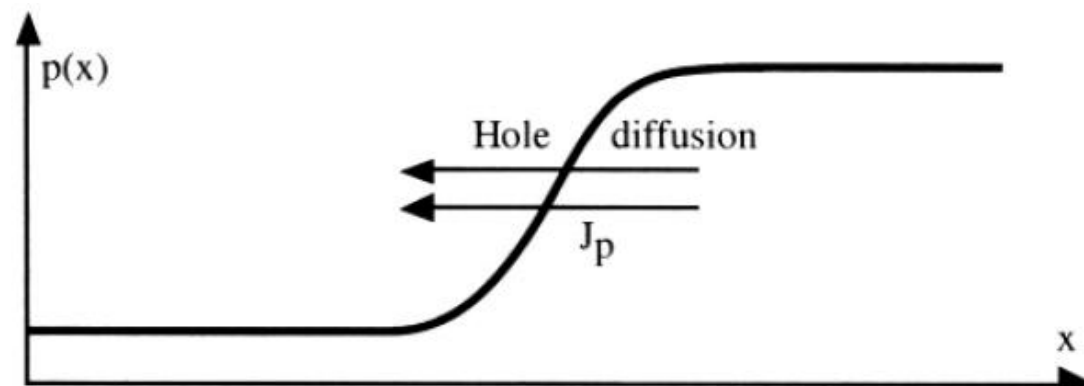
$$\vec{J}_n^{dif} = q \cdot D_n \cdot \vec{\nabla}n(x)$$

$D_n = 38 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ για ελαφρά νοθευμένο πυρίτιο στους 300° K

2. Αν τα φορτισμένα σωματίδια είναι οπές

$$\Phi_{p,x} = -D_p \cdot \frac{dp(x)}{dx}$$

$$J_{p,x} = q \cdot \Phi_{p,x} = q \cdot \left(-D_p \cdot \frac{dp(x)}{dx}\right)$$



Ρεύμα διάχυσης ηλεκτρονίων

Σε μία διάσταση

$$J_{p,x}^{dif} = -q \cdot D_p \cdot \frac{dp(x)}{dx}$$

Σε τρεις διαστάσεις

$$\vec{J}_p^{dif} = -q \cdot D_p \cdot \vec{\nabla} p(x)$$

$D_p = 13 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ για ελαφρά νοθευμένο πυρίτιο στους 300° K

Ρεύματα διάχυσης σε ένα ημιαγωγό

	1-διάσταση	3-διαστάσεις
Ηλεκτρόνια	$J_{n,x}^{dif} = q \cdot D_n \cdot \frac{dn(x)}{dx}$	$\vec{J}_n^{dif} = q \cdot D_n \cdot \vec{\nabla}n(x)$
Οπές	$J_{p,x}^{dif} = -q \cdot D_p \cdot \frac{dp(x)}{dx}$	$\vec{J}_p^{dif} = -q \cdot D_p \cdot \vec{\nabla}p(x)$

Ρεύματα σε ένα ημιαγωγό

Ρεύματα ολίσθησης σε ένα ημιαγωγό

	1-διάσταση	3-διαστάσεις
Ηλεκτρόνια	$J_{n,x}^{drift} = q \cdot n \cdot \mu_n \cdot E_x$	$\vec{J}_n^{drift} = q \cdot n \cdot \mu_n \cdot \vec{E}$
Οπές	$J_{p,x}^{drift} = q \cdot p \cdot \mu_p \cdot E_x$	$\vec{J}_p^{drift} = q \cdot p \cdot \mu_p \cdot \vec{E}$

Ρεύματα διάχυσης σε ένα ημιαγωγό

	1-διάσταση	3-διαστάσεις
Ηλεκτρόνια	$J_{n,x}^{dif} = q \cdot D_n \cdot \frac{dn(x)}{dx}$	$\vec{J}_n^{dif} = q \cdot D_n \cdot \vec{\nabla}n(x)$
Οπές	$J_{p,x}^{dif} = -q \cdot D_p \cdot \frac{dp(x)}{dx}$	$\vec{J}_p^{dif} = -q \cdot D_p \cdot \vec{\nabla}p(x)$

ΟΛΙΚΟ ΡΕΥΜΑ ΣΕ ΕΝΑ ΗΜΙΑΓΩΓΟ(1-διάσταση)

Ρεύμα ηλεκτρονίων:

$$J_n = J_{n,x}^{drift} + J_{n,x}^{dif} = q \cdot n \cdot \mu_n \cdot E_x + q \cdot D_n \cdot \frac{dn(x)}{dx}$$

Ρεύμα Οπών :

$$J_p = J_{p,x}^{drift} + J_{p,x}^{dif} = q \cdot p \cdot \mu_p \cdot E_x - q \cdot D_p \cdot \frac{dp(x)}{dx}$$

Σε θερμοδυναμική ισορροπία ισχύει ότι : $J_n = J_{n,x}^{drift} + J_{n,x}^{dif} = 0$

$$q \cdot n \cdot \mu_n \cdot E_x + q \cdot D_n \cdot \frac{dn(x)}{dx} = 0$$

$$n(x) = n_i \exp\left(\frac{E_F - E_i(x)}{kT}\right)$$

Αλλά

$$E_x = \frac{1}{q} \cdot \frac{dE_i}{dx}$$

$$\frac{dn(x)}{dx} = -\frac{n_i}{kT} \exp\left(\frac{E_F - E_i(x)}{kT}\right) \frac{dE_i(x)}{dx}$$

$$q \cdot n \cdot \mu_n \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{dE_i}{dx} + q \cdot D_n \cdot \left(-\frac{n}{kT} \frac{dE_i(x)}{dx}\right) = 0$$

$$\frac{dn(x)}{dx} = -\frac{n(x)}{kT} \frac{dE_i(x)}{dx}$$

$$\mu_n - q \cdot \frac{D_n}{kT} = 0$$

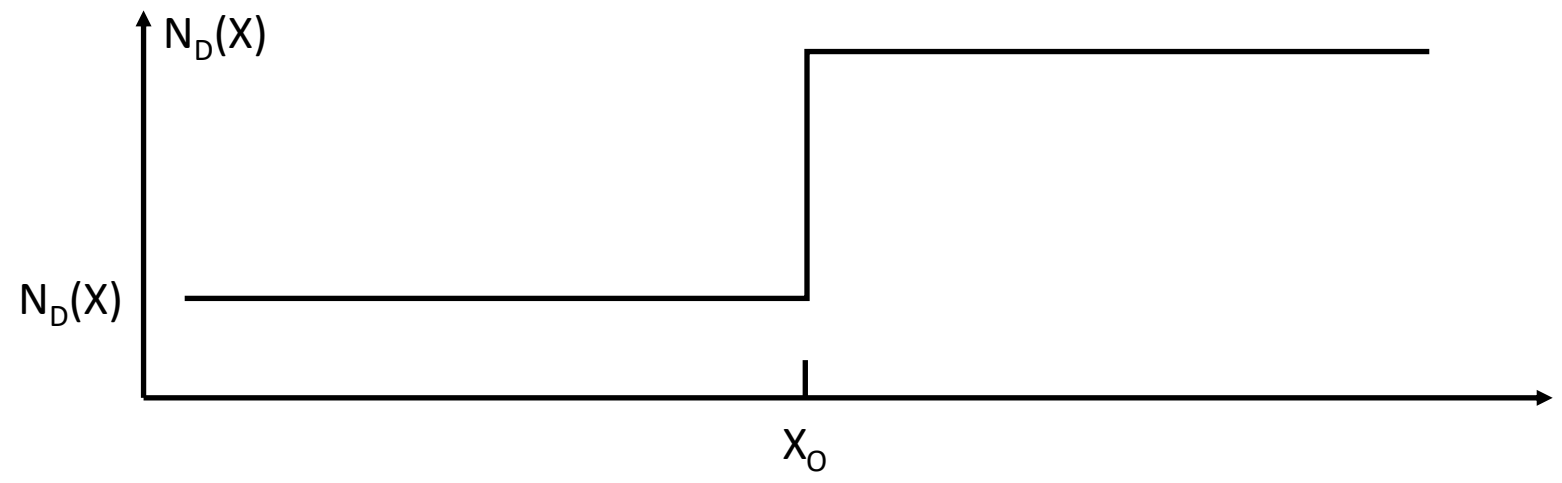
Σχέσεις Einstein

$$\frac{D_n}{\mu_n} = \frac{kT}{q}$$

$$\frac{D_p}{\mu_p} = \frac{kT}{q}$$

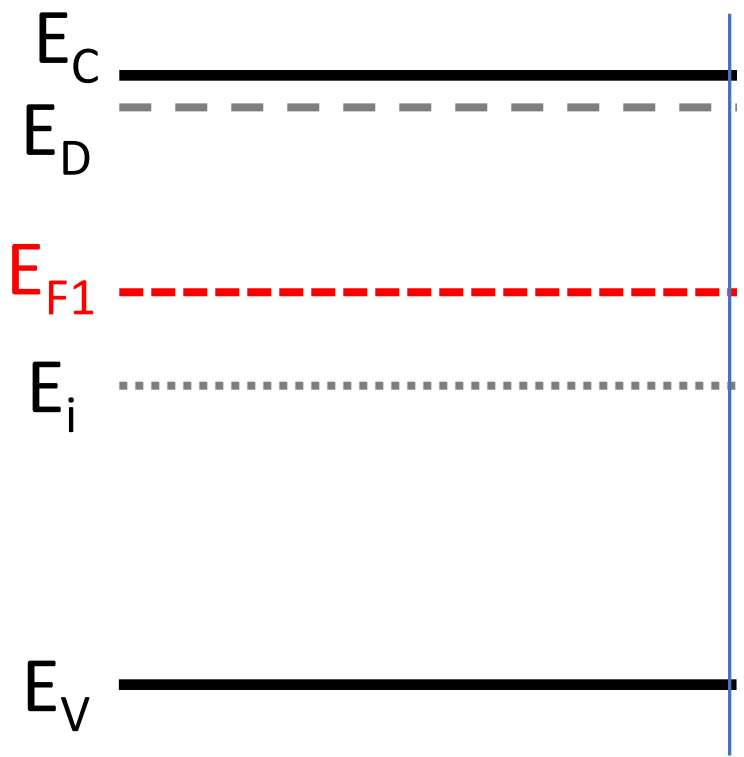
Επαφή μεταξύ δύο διαφορετικών ημιαγωγών

Συγκέντρωση ατόμων δοτών σαν συνάρτηση της θέσης

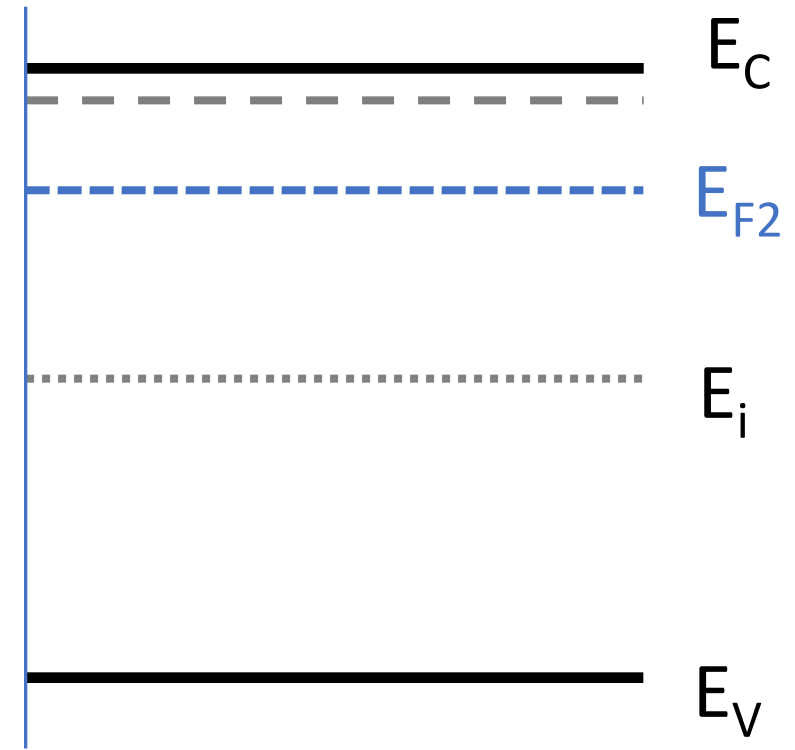


Ημιαγωγός ΤΥΠΟΥ n

N_{D1}



Ημιαγωγός τύπου n
 N_{D2}



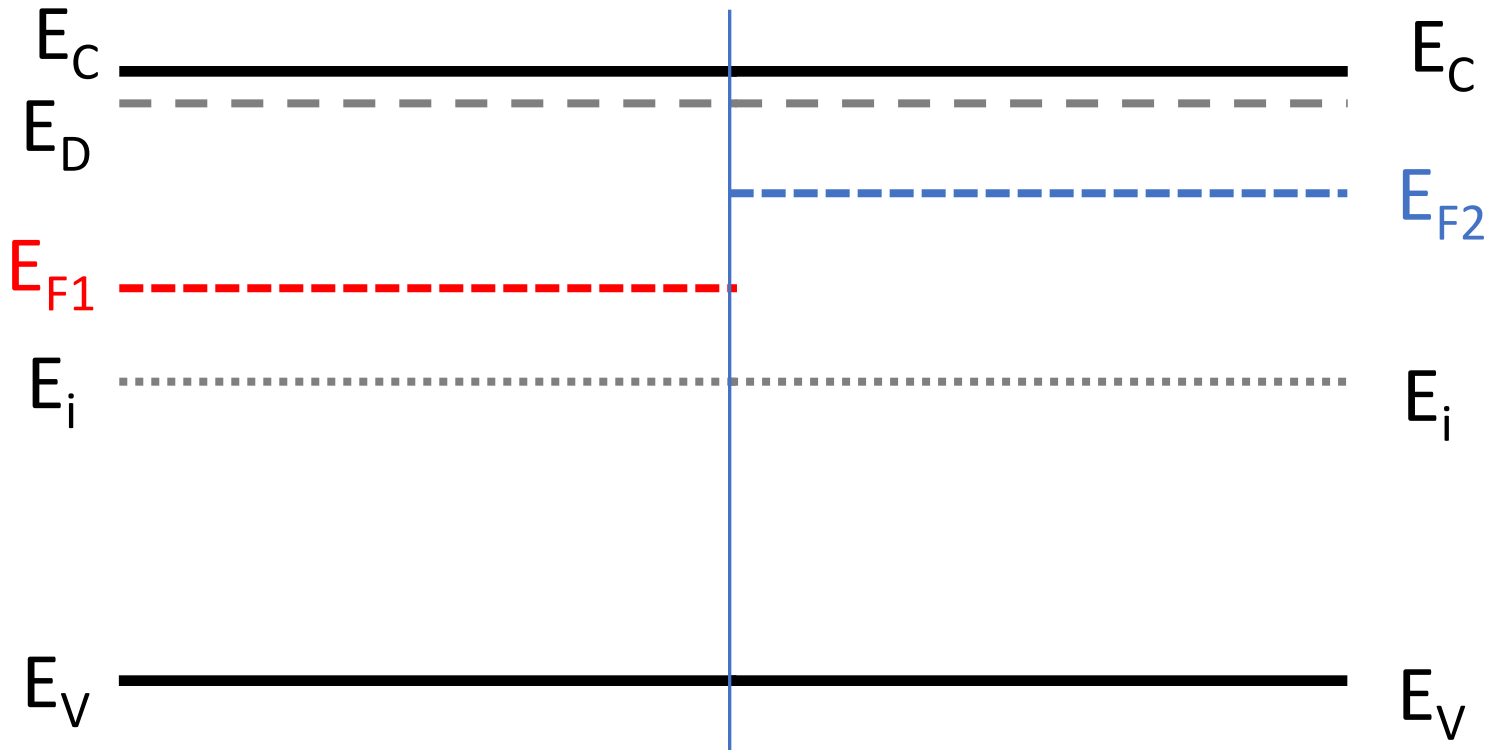
Ημιαγωγός τύπου n

Ημιαγωγός τύπου n

N_{D1}

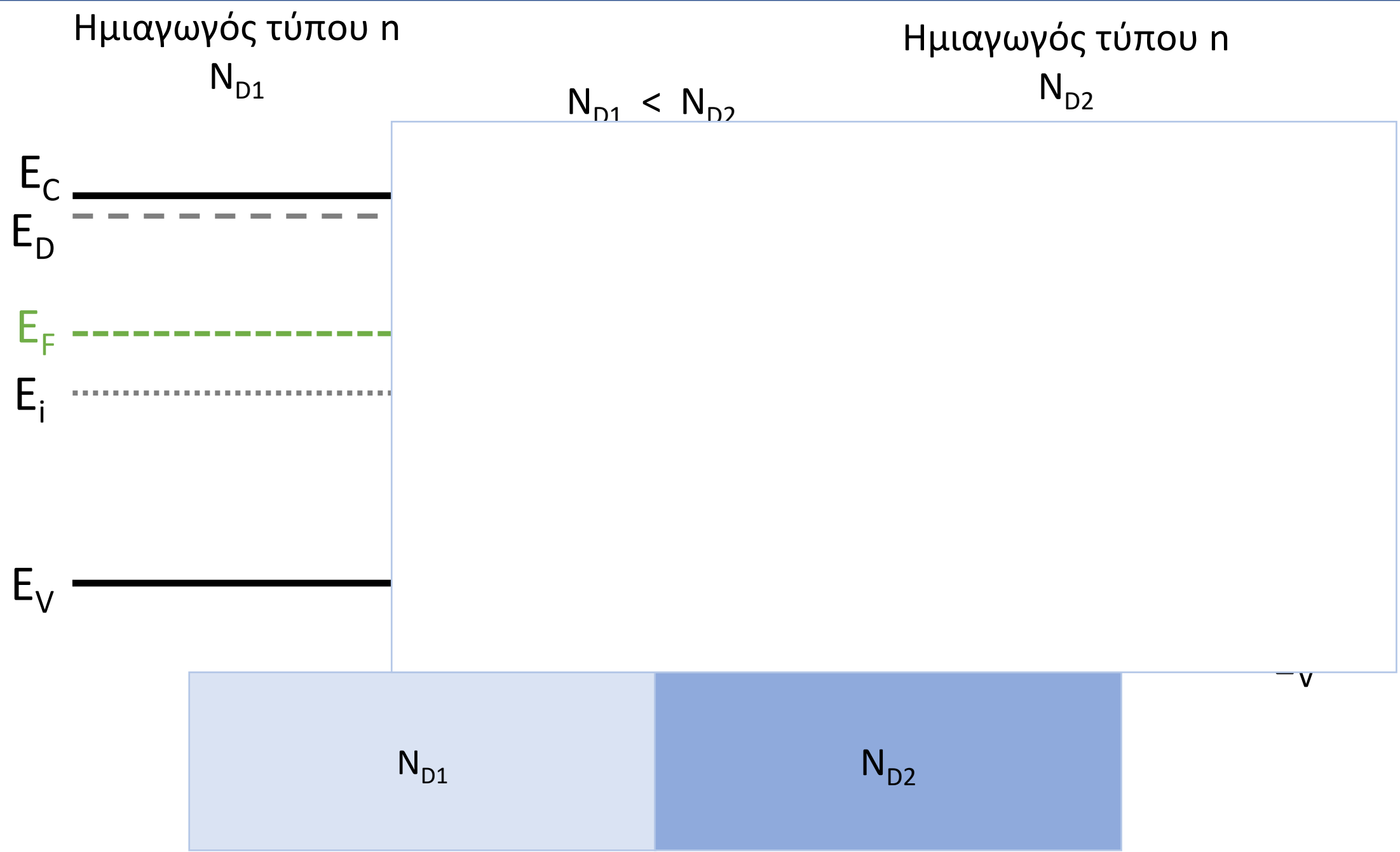
$N_{D1} < N_{D2}$

N_{D2}



Σε ένα σύστημα ηλεκτρονίων σε Θερμοδυναμική ισορροπία υπάρχει μία στάθμη Fermi

Πως είναι το ενεργειακό διάγραμμα όταν επέλθει Θ.Ι.?



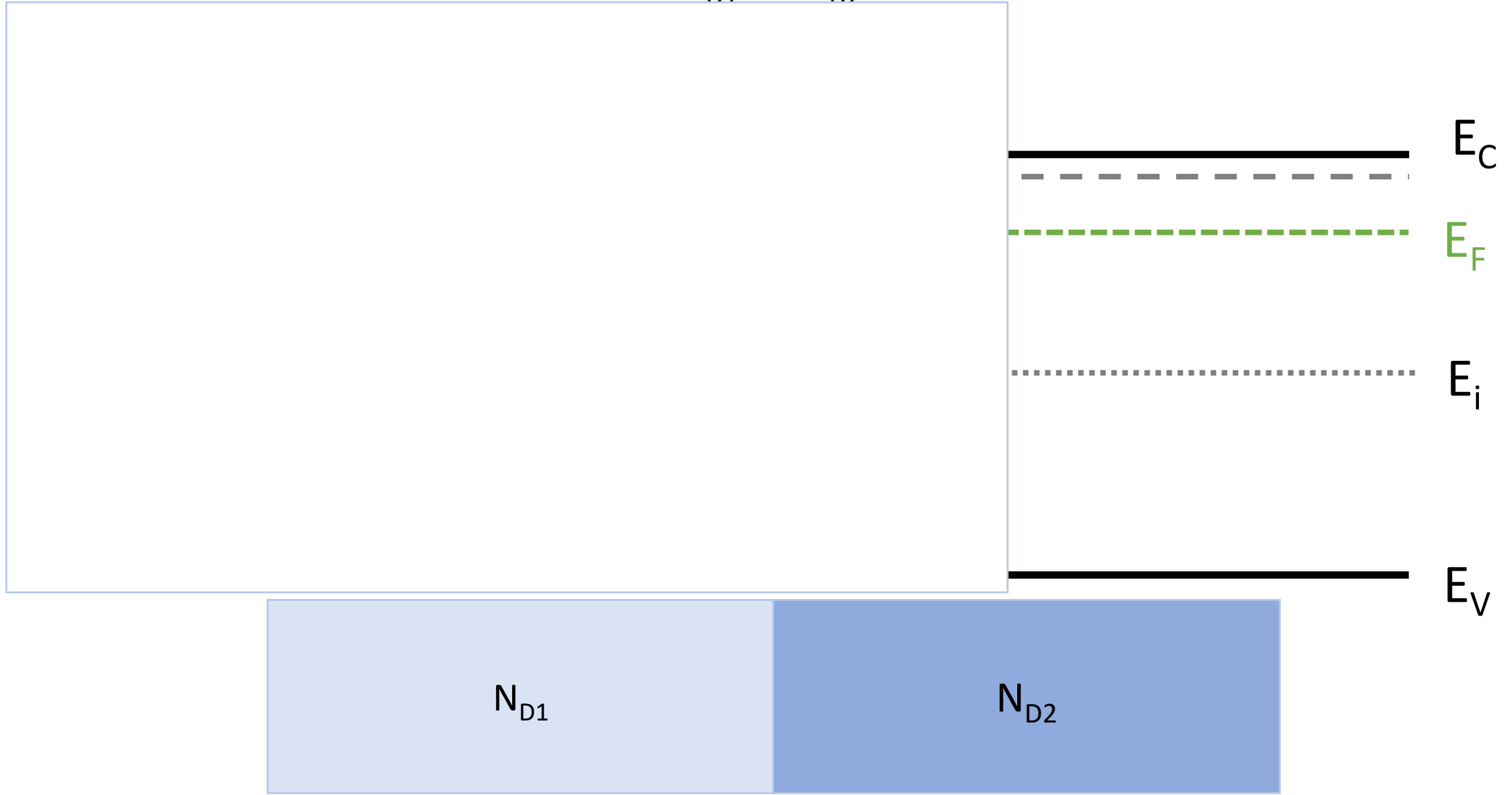
Ημιαγωγός τύπου n

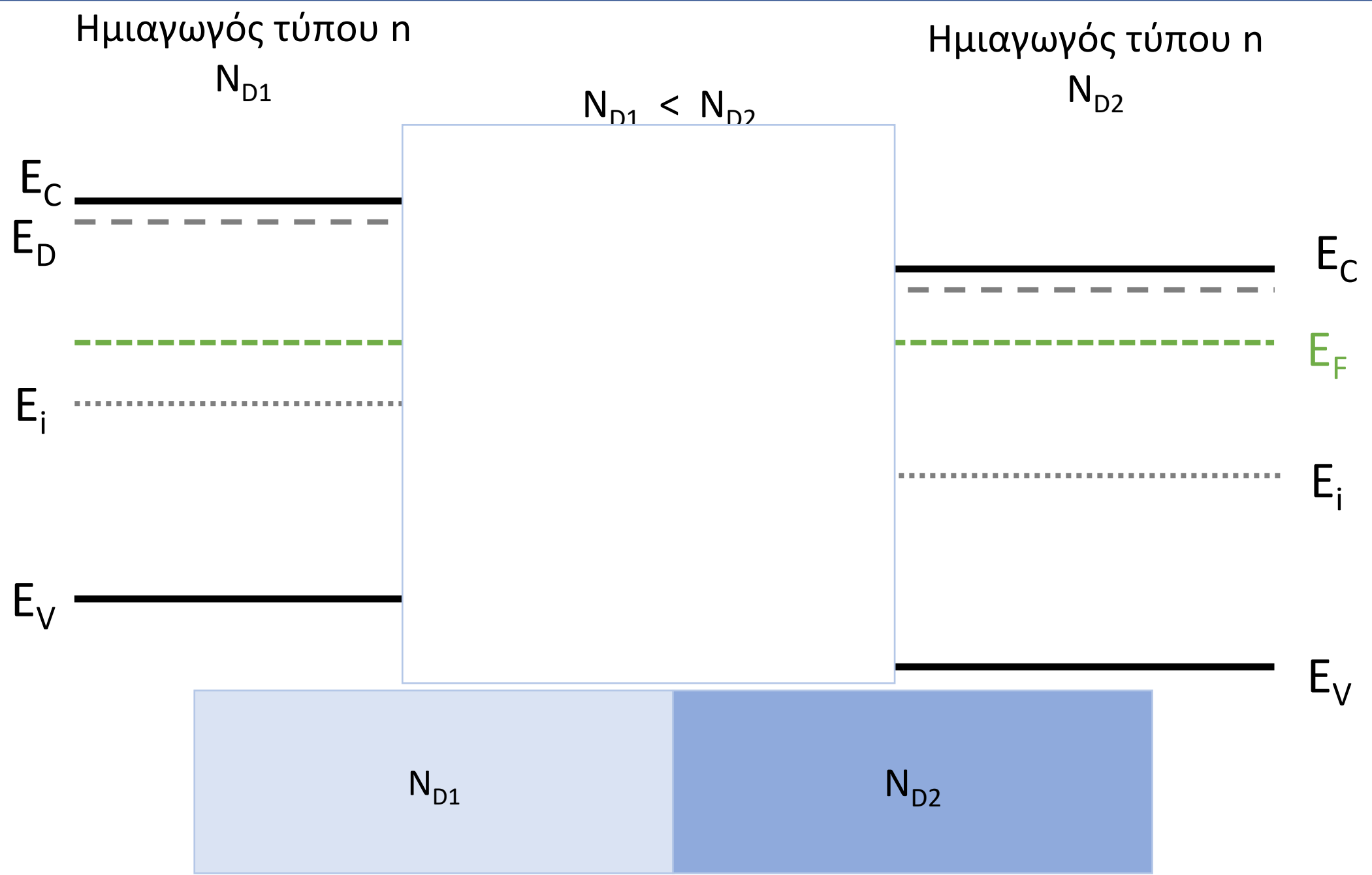
N_{D1}

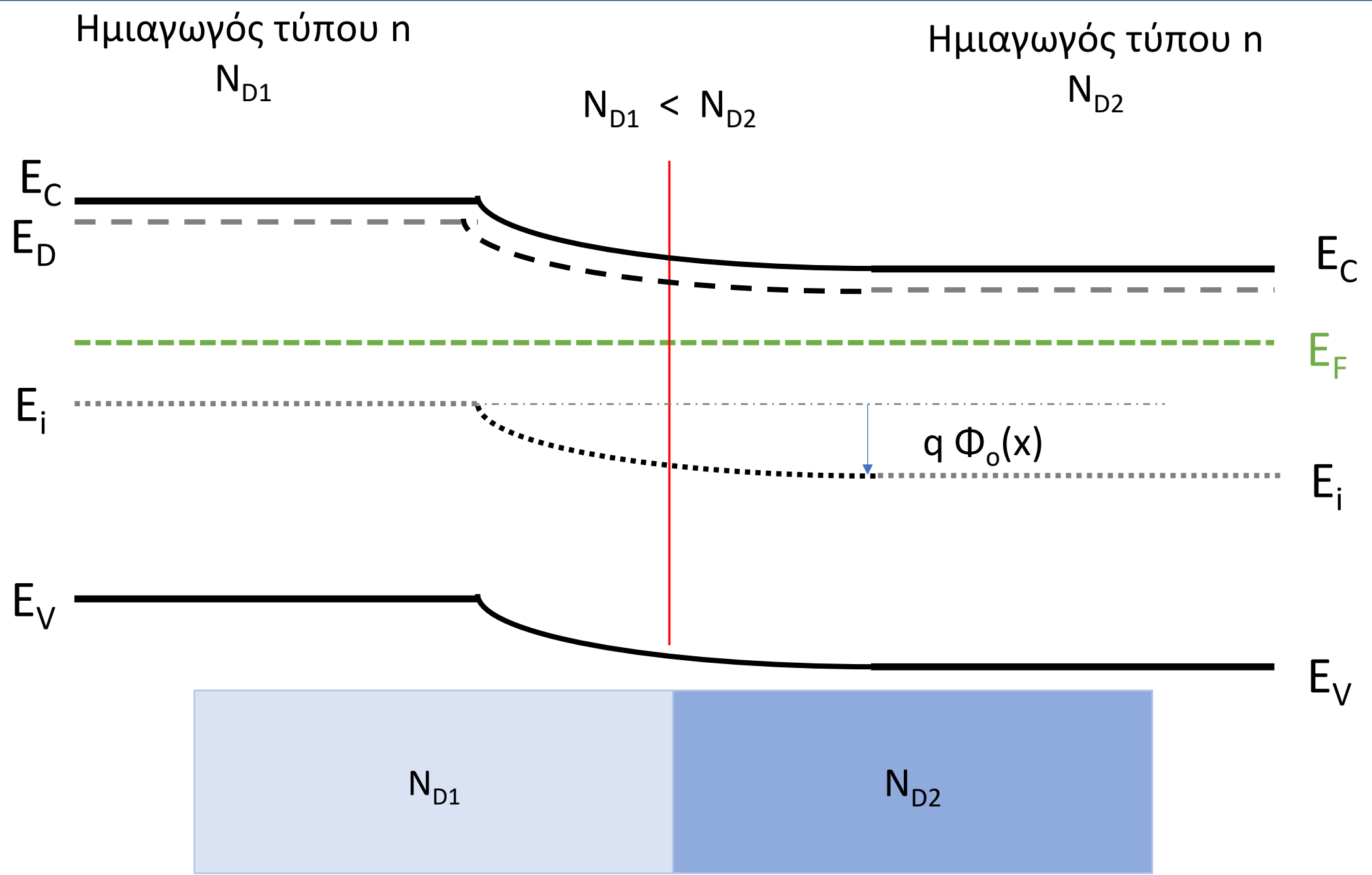
Ημιαγωγός τύπου n

N_{D2}

$N_{D1} < N_{D2}$







QUASI FERMİ LEVELS

Σε συνθήκες **εκτός Θ.Ι.**, η έννοια της στάθμης Fermi δεν έχει νόημα. Στην περίπτωση αυτή ορίζω δύο νέες ποσότητες, τις ψευδοστάθμες Fermi (quasi-Fermi levels)

$$f_n(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_{F_n}}{kT}\right)}$$

$$f_p(E) = [1 - f(E)] = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_{F_p} - E}{kT}\right)}$$

Οπότε οι συγκεντρώσεις των φορέων θα δίνονται από

$$n = \int_{E_C}^{\infty} N_C(E) f_n(E) dE = N_C \exp\left(-\frac{E_C - E_{F_n}}{kT}\right)$$



$$n = n_i \exp\left(\frac{E_{F_n} - E_i}{kT}\right)$$

$$p = \int_{-\infty}^{E_V} N_V(E) f_p(E) dE = N_V \exp\left(-\frac{E_{F_p} - E_V}{kT}\right)$$

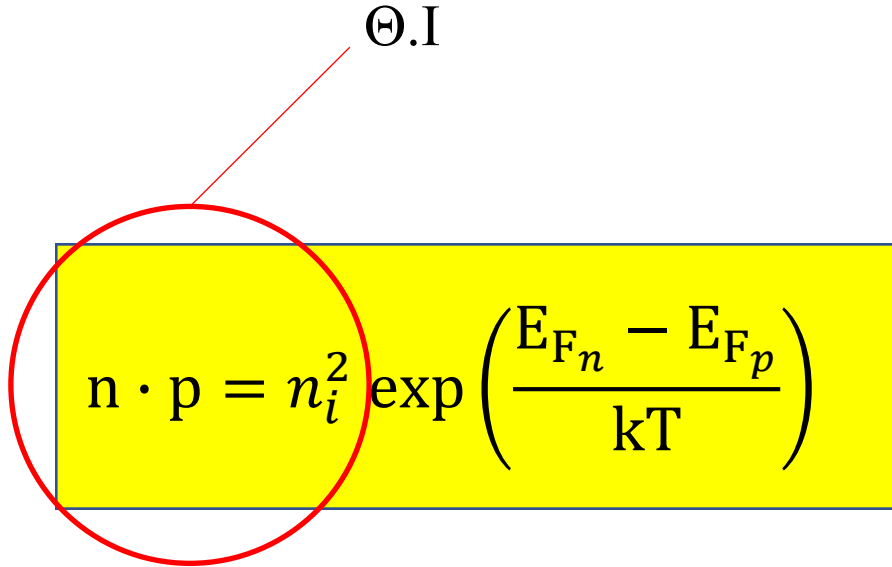


$$p = n_i \exp\left(\frac{E_i - E_{F_p}}{kT}\right)$$

Για καταστάσεις εκτός Θ.Ι θα ισχύει ότι

$$n = n_i \exp\left(\frac{E_{F_n} - E_i}{kT}\right)$$

$$p = n_i \exp\left(\frac{E_i - E_{F_p}}{kT}\right)$$



$$n \cdot p = n_i^2 \exp\left(\frac{E_{F_n} - E_{F_p}}{kT}\right)$$

$$E_{F_n} - E_{F_p}$$

Η διαφορά ανάμεσα στις δύο ψευδοστάθμες Fermi είναι ένα μέτρο του πόσο ένα σύστημα είναι εκτός Θερμοδυναμικής Ισορροπίας (Θ.Ι).

Ρεύμα ηλεκτρονίων:

$$J_{n,x} = J_{n,x}^{drift} + J_{n,x}^{dif} = q \cdot n \cdot \mu_n \cdot E_x + q \cdot D_n \cdot \frac{dn(x)}{dx}$$

Με τη χρήση των ψευδο-σταθμών Fermi μπορώ να δείξω ότι

$$J_{n,x} = \mu_n \cdot n \cdot \frac{dE_{F_n}}{dx}$$

Αντίστοιχα ισχύει και για τις οπές

$$J_{n,x} = \mu_n \cdot n \cdot \frac{dE_{F_n}}{dx}$$

$$J_{p,x} = \mu_p \cdot p \cdot \frac{dE_{F_p}}{dx}$$

Drift-diffusion equations

$$\vec{J}_n = \mu_n \cdot n \cdot \vec{\nabla} E_{F_n}$$

$$\vec{J}_p = \mu_p \cdot p \cdot \vec{\nabla} E_{F_p}$$

Donald A. Neamen, **Semiconductor Physics and Devices- Basic Principles**, McGraw-Hill (2011)

John D. Cressler, **Silicon Earth- Introduction to Microelectronics and Nanotechnology**, CRC Press (2016)

S. M. SZE and M. K. LEE, **Semiconductor Devices-Physics and Technology**, JOHN WILEY & SONS, INC. (2012)