Κεφάλαιο 1

Σχετικιστικές συμμετρίες και σωμάτια

1.1 Η συμμετρία Πουανκαρέ

1.1.1 Βασικοί ορισμοί και ιδιότητες

Η θεμελιώδης κινηματική συμμετρία για ένα φυσικό σύστημα είναι η συμμετρία των μετασχηματισμών μεταξύ διαφορετικών συστημάτων αναφοράς στο χώρο και το χρόνο. Η θεμελιώδης συμμετρία του χωροχρόνου, όταν αγνοούμε τα βαρυτικά φαινόμενα, είναι η συμμετρία Πουανκαρέ (H. Poincaré), την οποία εξετάζουμε στη συνέχεια.

Κάθε φυσικό γεγονός χαρακτηρίζεται από μία χρονική συντεταγμένη t και τρεις (Καρτεσιανές) χωρικές συντεταγμένες x^1, x^2, x^3. Στη θεωρία της σχετικότητας, ο χρόνος t αντιμετωπίζεται ως μία τέταρτη συντεταγμένη $x^0 = t$ (σε μονάδες όπου η ταχύτητα του φωτός $c = 1$) , και ένα γεγονός αντιστοιχεί σε ένα τετραδιάνυσμα

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

του *χωροχρόνου Μινκόβσκι* (H. Minkowski) $M = \boldsymbol{R}^4$. Σε ότι ακολουθεί, συχνά θα γράφουμε το τετραδιάνυσμα $\underline{x}$ ως x^μ όπου οι ελληνικοί δείκτες μ παίρνουν τιμές $0, 1, 2, 3$. Θα χρησιμοποιούμε λατινικούς δείκτες i, j, k κοκ με τιμές $1, 2, 3$ για χωρικές ποσότητες.

Έστω δύο γεγονότα $\underline{x}$ και $\underline{x}'$ που διαφέρουν κατά ένα στοιχειώδες τετραδιάνυσμα $d\underline{x} = \underline{x}' - \underline{x}$. Η βασική αρχή της σχετικότητας είναι ότι οι νόμοι της φυσικής παραμένουν οι ίδιοι κάτω από μετασχηματισμούς του συστήματος συντεταγμένων που αφήνουν αναλλοίωτη την ποσότητα

$$(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = d\underline{x}^T \eta d\underline{x} = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{1.2}$$

όπου ο πίνακας $\eta = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$ καλείται *μετρική του Μινκόβσκι*.

Στην τελευταία έκφραση της Εξ. (1.2) χρησιμοποιούμε τη σύμβαση άθροισης του Αϊνστάιν: αν ο ίδιος δείκτης επαναλαμβάνεται πάνω και κάτω σημαίνει ότι έχουμε άθροιση ως προς το δείκτη. Χρησιμοποιούμε τη μετρική του Μινκόβσκι για να ανεβοκατεβάζουμε δείκτες. Συμβολίζουμε τον αντίστροφο πίνακα της μετρικής η^{-1} ως $\eta^{\mu\nu}$ και ορίζουμε $A_\mu := \eta_{\mu\nu} A^\nu$ ή αντίστροφα, $A^\mu = \eta^{\mu\nu} A_\nu$. Με αυτή τη σύμβαση, $A_0 = A^0$ και $A^i = -A_i$. Επίσης $A_i B^i = -\sum_i A_i B_i = -\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.

Ο γενικότερος μετασχηματισμός συντεταγμένων που αφήνει την ποσότητα (1.2) αναλλοίωτη είναι της μορφής

$$\underline{x} \to \Lambda \underline{x} + \underline{a}, \tag{1.3}$$

όπου $\underline{a} \in \boldsymbol{R}^4$ και Λ είναι ένας πίνακας 4×4 που ικανοποιεί τη σχέση

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \tag{1.4}$$

Οι πίνακες Λ αυτής της μορφής καλούνται *μετασχηματισμοί Λόρεντς*.

Θα περιοριστούμε σε πίνακες Λ με ορίζουσα ίση με τη μονάδα. Έτσι δε λαμβάνουμε υπόψη πίνακες της μορφής diag$\{-1,1,1,1\}$ που αντιστοιχούν σε αντιστροφή του χρόνου, και πίνακες της μορφής diag$\{1,-1,-1,-1\}$ που αντιστοιχούν σε αντιστροφή του χώρου, τους οποίους θα εξετάσουμε χωριστά.

Χρησιμοποιώντας δείκτες θα γράφουμε το μετασχηματισμό Λόρεντς, ως $x^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, ενώ ο αντίστροφος μετασχηματισμός Λόρεντς $\Lambda^{-1} = \eta \Lambda^T \eta^{-1}$ θα έχει συνιστώσες $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\mu{}^\nu$.

Οπότε οι μετασχηματισμοί (1.3) χαρακτηρίζονται από ένα ζεύγος $(\Lambda, \underline{a})$ και ορίζουν την ομάδα Πουανκαρέ, η οποία συχνά συμβολίζεται ως $ISO(3,1)$. Δύο διαδοχικοί μετασχηματισμοί $(\Lambda_1, \underline{a}_1)$ και $(\Lambda_2, \underline{a}_2)$ δρουν ως

$$\underline{x} \to \Lambda_2 \Lambda_1 \underline{x} + \Lambda_2 \underline{a}_1 + \underline{a}_2, \tag{1.5}$$

που σημαίνει ότι η πράξη της ομάδας Πουανκαρέ είναι

$$(\Lambda_2, \underline{a}_2)(\Lambda_1, \underline{a}_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 \underline{a}_1 + \underline{a}_2). \tag{1.6}$$

Η μονάδα της ομάδας Πουανκαρέ είναι $(1, \underline{0})$, όπου 1 είναι ο πίνακας της μονάδας και $\underline{0}$ το τετραδιάνυσμα με όλους τους συντελεστές 0. Το αντίστροφο ενός στοιχείου $(\Lambda, \underline{a})$ είναι το στοιχείο $(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}\underline{a})$.

1.1.2 Η ομάδα $SO(3,1)$

Θα εξετάσουμε πρώτα τους μετασχηματισμούς Λόρεντς. Ο γενικότερος πίνακας Λ που ικανοποιεί την Εξ. (1.4) γράφεται

$$\Lambda(u_1,u_2,u_3,\theta_1,\theta_2,\theta_3) = R_3(\theta_3) R_2(\theta_2) R_1(\theta_1) B_3(u_3) B_2(u_2) B_1(u_1), \tag{1.7}$$

όπου $\theta_i \in [0, 2\pi]$, $u_i \in \boldsymbol{R}$ και

$$\begin{gathered}
B_1(u_1) = \begin{pmatrix} \cosh u_1 & \sinh u_1 & 0 & 0 \\ \sinh u_1 & \cosh u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B_2(u_2) = \begin{pmatrix} \cosh u_2 & 0 & \sinh u_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sinh u_2 & 0 & \cosh u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
B_3(u_3) = \begin{pmatrix} \cosh u_3 & 0 & 0 & \sinh u_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh u_3 & 0 & 0 & \cosh u_3 \end{pmatrix} R_1(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ 0 & 0 & -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \\
R_2(\theta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} R_3(\theta_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_3 & \sin\theta_3 & 0 \\ 0 & -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{1.8}$$

Κάθε πίνακας B_i αντιστοιχεί σε ένα μετασχηματισμό στον υπόχωρο των x^0, x^i. Αυτοί οι μετασχηματισμοί καλούνται *ωθήσεις* (boosts), αναμιγνύουν χωρικές και χρονικές συντεταγμένες και περιγράφουν τη μετάβαση σε ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με το αρχικό. Κάθε πίνακας R_i αντιστοιχεί σε ένα μετασχηματισμό περιστροφής γύρω από τον άξονα x^i.

Παραμετροποίηση 3+1. Αναπτύσσοντας τους πίνακες B_i, R_i γύρω από τη μονάδα, επιλέγουμε μία βάση που αποτελείται από τους 6 πίνακες

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Αμέσως υπολογίζουμε τις σχέσεις μετάθεσης

$$[K_i, K_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} J_k, \qquad [J_i, J_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} J_k \qquad [K_i, J_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} K_k. \tag{1.11}$$

Παρατηρούμε ότι οι μεταθέτες των γεννητόρων J_i είναι μεταξύ τους κλειστές, οπότε τα J_i ορίζουν την άλγεβρα $\mathfrak{so}(3)$ των περιστροφών στο χώρο.

1.1.3 Η άλγεβρα Πουανκαρέ

Οι χωροχρονικές μετατοπίσεις $\underline{x} \to \underline{x} + \underline{a}$ αντιστοιχούν 4 γεννήτορες P_μ κάθε ένας εκ των οποίων αντιστοιχεί σε μετατόπιση μίας εκ των τεσσάρων συντεταγμένων του διανύσματος. Δηλαδή ο γεννήτορας P_μ αντιστοιχεί στη μετατόπιση του $\underline{x}$ κατά $\epsilon \underline{e}_\mu$,όπου $\underline{e}_\mu$ είναι τα διανύσματα βάσης του $\boldsymbol{R}^4$ με συντελεστές

$$(\underline{e}_\mu)^\nu = \delta^\nu_\mu. \tag{1.12}$$

Οι γεννήτορες P_μ των μετατοπίσεων στο χωροχρόνο καλούνται *τετραορμή*. Οι γεννήτορες της μετατίθενται,

$$[P_\mu, P_\nu] = 0. \tag{1.13}$$

Συνολικά η ομάδα Πουανκαρέ έχει 10 γεννήτορες,

- τρεις γεννήτορες K_i που αντιστοιχούν σε ωθήσεις,
- τρεις γεννήτορες J_i που αντιστοιχούν σε περιστροφές στο χώρο,
- τρεις γεννήτορες P_i που αντιστοιχούν σε μετατόπιση στο χώρο, και
- ένα γεννήτορα $H = P_0$ που αντιστοιχεί σε μετατόπιση στο χρόνο.

Αποδεικνύεται ότι οι μη μηδενικές σχέσεις μετάθεσης μεταξύ των παραπάνω γεννητόρων είναι οι ακόλουθες

$$\begin{aligned}
[K_i, K_j] &= \sum_k \epsilon_{ijk} J_k, &(1.14)\\
[J_i, J_j] &= \sum_k \epsilon_{ijk} J_k, &(1.15)\\
[K_i, J_j] &= \sum_k \epsilon_{ijk} K_k &(1.16)\\
[K_i, P_j] &= \delta_{ij} H &(1.17)\\
[J_i, P_j] &= -\sum_k \epsilon_{ijk} P_k &(1.18)\\
[K_i, H] &= P_i. &(1.19)
\end{aligned}$$

1.2 Κβαντική περιγραφή της συμμετρίας Πουανκαρέ

Για να περιγράψουμε κβαντικά τη συμμετρία Πουανκαρέ πρέπει να βρούμε Χώρους Χίλμπερτ στους οποίους ορίζονται αυτοσυζυγείς τελεστές $\hat{K}_i, \hat{J}_i, \hat{P})_i$ και $\hat{H}$, που ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης.

$$\begin{aligned}
[\hat{K}_i, \hat{K}_j] &= i\sum_k \epsilon_{ijk} \hat{J}_k, &(1.20)\\
[\hat{J}_i, \hat{J}_j] &= i\sum_k \epsilon_{ijk} \hat{J}_k, &(1.21)\\
[\hat{K}_i, \hat{J}_j] &= i\sum_k \epsilon_{ijk} \hat{K}_k &(1.22)\\
[\hat{K}_i, \hat{P}_j] &= i\delta_{ij} \hat{H} &(1.23)\\
[\hat{J}_i, \hat{P}_j] &= -i\sum_k \epsilon_{ijk} \hat{P}_k &(1.24)\\
[\hat{K}_i, \hat{H}] &= i\hat{P}_i. &(1.25)
\end{aligned}$$

Έστω ότι έχουμε βρει τους παραπάνω τελεστές. Κανείς βρίσκει ότι υπάρχουν δύο τελεστές οι οποίοι μετατίθεται με όλους τους γεννήτορες.

Ο πρώτος είναι ο *τελεστής μάζας*

$$\hat{M}^2 = \hat{H}^2 - \boldsymbol{P}^2. \tag{1.26}$$

Ο τελεστής $\hat{M}^2$ αντιστοιχεί στο τετράγωνο της μάζας ηρεμίας m^2 ενός φυσικού συστήματος. Στα γνωστά φυσικά συστήματα η μάζα ηρεμίας m ενός σωματιδίου παίρνει μόνο θετικές τιμές ή μηδέν. Επίσης είναι μία σταθερά χαρακτηριστική του σωματιδίου, δεν εξαρτάται από την κατάστασή του. Αυτό δεν ισχύει σε συστήματα δύο ή περισσοτέρων σωματιδίων. Για παράδειγμα, σε ένα σύστημα δύο σωματιδίων μάζας m_1 και m_2 οι αντίστοιχες τετραορμές p_1^μ και p_μ^2 ικανοποιούν τις σχέσεις $p_1^\mu p_{1\mu} = m_1^2$ και $p_2^\mu p_{2\mu} = m_2^2$. Η ολική τετραορμή $P^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$ ικανοποιεί $P_\mu P^\mu = m_1^2 + m_2^2 + 2p_{1\mu}p_2^\mu$, δηλαδή η τιμή της εξαρτάται από τις ορμές των σωματιδίων.

Συμπεραίνουμε ότι ένας χώρος Χίλμπερτ με σταθερή τιμή του $\hat{M}^2$ περιγράφει ένα και μόνο σωμάτιο.

Ο δεύτερος τελεστής που μετατίθεται με όλους τους γεννήτορες, καλείται βαθμωτό Πάουλι-Λουμπάνσκι και ορίζεται ως εξής

$$\hat{C} = (\hat{\boldsymbol{J}} \cdot \hat{\boldsymbol{P}})^2 - \hat{\boldsymbol{W}}^2 \tag{1.27}$$

όπου $\hat{\boldsymbol{W}} = \hat{H}\hat{\boldsymbol{J}} - \hat{\boldsymbol{K}} \times \hat{\boldsymbol{P}}$.

Για να αντιληφθούμε τη φυσική σημασία του τελεστή $\hat{C}$, θεωρούμε ένα σωμάτιο και διαλέγουμε συντεταγμένες στο σύστημα αναφοράς όπου αυτό ηρεμεί. Τότε ισχύει $\hat{P}_i = 0$, οπότε $\hat{W}_0 = 0$ και $\hat{W}_i = \hat{H}\hat{J}_i$. Επίσης, αφού για ένα σωμάτιο, $\hat{M}^2 = m^2\hat{1}$, έχουμε $\hat{H} = m\hat{1}$. Καταλήγουμε ότι $\hat{C} = -\hat{\boldsymbol{W}} \cdot \hat{\boldsymbol{W}} = -m^2\hat{\boldsymbol{J}}^2$. Αλλά οι τελεστές $\hat{J}_i$ είναι γεννήτορες περιστροφών, οπότε το $\boldsymbol{J}^2$ αντιστοιχεί στην ολική στροφορμή. Αφού $\hat{P}_i = 0$, η τροχιακή στροφορμή μηδενίζεται και η μόνη συνεισφορά στην ολική στροφορμή προέρχεται από το σπιν $\hat{S}_i$. Για ένα σωματίδιο, $\hat{\boldsymbol{J}}^2 = s(s+1)$ όπου s το σπιν του σωματιδίου και κατά συνέπεια

$$\hat{C} = -m^2 s(s+1)\hat{1}. \tag{1.28}$$

Η τιμή $\hat{C}$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του συστήματος αναφοράς καθώς ο τελεστής $\hat{C}$ είναι βαθμωτή ποσότητα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι απλούστερες αναπαραστάσεις της ομάδας Πουανκαρέ αντιστοιχούν σε σωμάτια με καλώς ορισμένη τιμή της μάζας ηρεμίας και του σπιν.

Ωστόσο η Εξ. (1.28) ισχύει μόνο για $m \neq 0$. Για $m = 0$, το σωμάτιο κινείται με την ταχύτητα του φωτός και δεν υπάρχει σύστημα ηρεμίας, οπότε το επιχείρημα που δώσαμε παραπάνω δεν ισχύει. Για να υπολογίσουμε το $\hat{C}$ σ' αυτήν την περίπτωση πρέπει να εξετάσουμε εκπεφρασμένα τις αναπαραστάσεις για $m = 0$. Εν γένει, οι τιμές του $\hat{C}$ είναι διάφορες του μηδενός, αλλά ειδικά στις αναπαραστάσεις με $m = 0$ που έχουν φυσική σημασία μηδενίζεται.

Οι απλούστερες αναπαραστάσεις της συμμετρίας Πουανκαρέ χαρακτηρίζονται από σταθερές τιμές των $\hat{M}^2$ και $\hat{C}$. Υπάρχουν 5 διαφορετικές κατηγορίες αναπαραστάσεων, από τις οποίες μόνο δύο εμφανίζονται στη φύση. Αυτές είναι οι εξής.

Αναπαραστάσεις με μάζα $m^2 > 0$, και διακριτό σπιν με δυνατές τιμές $s = \frac{n}{2}$, για $n = 0, 1, 2, \ldots$. Αντιστοιχούν σε έμμαζα σωμάτια και περιγράφονται από το χώρο Χίλμπερτ $L^2(\boldsymbol{R}^3) \otimes \boldsymbol{C}^{2s+1}$.

Αναπαραστάσεις με μάζα $m^2 = 0$ και διακριτό σπιν με δυνατές τιμές $s = \frac{n}{2}$, για $n = 0, 1, 2, \ldots$. Επιπλέον χαρακτηρίζονται από έναν νέο κβαντικό αριθμό την ελικότητα h η οποία παίρνει τιμή +1 που αντιστοιχεί σε σπιν παράλληλο στην ορμή και -1 σε σπιν αντιπαράλληλο στην ορμή. Αντιστοιχούν σε άμαζα σωμάτια και περιγράφονται από το χώρο Χίλμπερτ $L^2(\boldsymbol{R}^3)$.