ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ : ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ
(Υποχρεωτικό 4ου Εξαμήνου)
Διδάσκων : Δ. Σκαρλάτος
Προβλήματα Σειρά # 3 : Κανόνες Κβάντωσης Wilson-Sommerfeld
Αρχή της αντιστοιχίας
Αντιστοιχεί στην Ενότητα 3 του αναρτημένου στο e-class Οδηγού Μελέτης

Τα προβλήματα παρατίθενται με τη σειρά που διδάχθηκε η ύλη και με αύξουσα σειρά δυσκολίας ανά κατηγορία.
Η ένδειξη ● υποδηλώνει λίγο πιο δύσκολο πρόβλημα. Οι φοιτητές μετά την παρακολούθηση και τη μελέτη των λυμένων Παραδειγμάτων θα πρέπει να είναι σε θέση να διαπραγματευτούν και αυτά τα προβλήματα.
Η ένδειξη ●● υποδηλώνει απαιτητικό πρόβλημα.
Η ένδειξη √ υποδηλώνει πρόβλημα που πρέπει να αντιμετωπιστεί σε πρώτη ανάγνωση.

√Πρόβλημα 1. (α) Να αποδειχθεί ότι η ενεργειακή διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών ενεργειακών σταθμών ενός αρμονικού ταλαντωτή (διαπραγμάτευση κατά Planck ή Wilson-Sommerfeld) τείνει στο μηδέν για $h \to 0$.
(β) Να αποδειχθεί ότι η έκφραση της φασματικής κατανομής της αφετικής ικανότητας μέλανος σώματος του Planck μεταπίπτει στην αντίστοιχη των Rayleigh-Jeans για $h \to 0$.
Σχολιάστε και τις δύο περιπτώσεις.

√Πρόβλημα 2. Στο πρόβλημα της κίνησης σωματιδίου μάζας m μέσα σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικής ενέργειας εύρους L όπου

$$U(x) = \begin{cases} 0, & 0<x<L \\ \infty, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

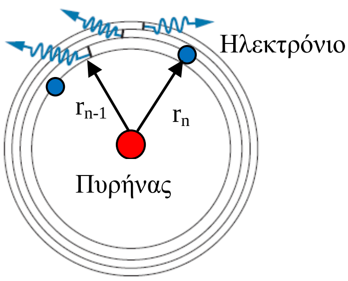
αποδείξαμε στον πίνακα ότι το ενεργειακό του φάσμα με βάση τους κανόνες κβάντωσης Wilson-Sommerfeld δίδεται από την έκφραση:

$$E_n = \frac{h^2 n^2}{8mL^2},\ n = 0,1,2,3,....$$

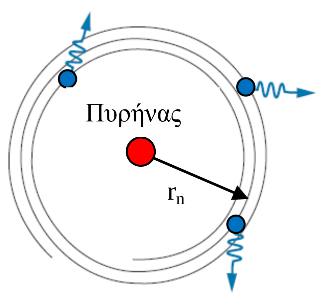
Να υπολογιστεί η διαφορά των δύο πρώτων ενεργειακών σταθμών του
(α) Για $m=9\times10^{-28}$ gr και $L=10^{-8}$cm (μικροσκοπικό σύστημα).
(β) Για για m=10 gr και L=1 cm (μακροσκοπικό σύστημα).
Τι παρατηρείτε;
[Απ. (β) $\Delta E \sim 0$]

√●Πρόβλημα 3. (α) Να αποδειχθεί ότι η συχνότητα του εκπεμπόμενου φωτονίου κατά την μετάβαση του ηλεκτρονίου ενός μονοηλεκτρονιακού ατόμου ατομικού αριθμού Z από τη στάθμη n στην n-1 δίδεται από την έκφραση:

$$f = \frac{Z^2 2\pi^2 K_e^2 m_e q_e^4}{h^3}\left[\frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}\right]$$



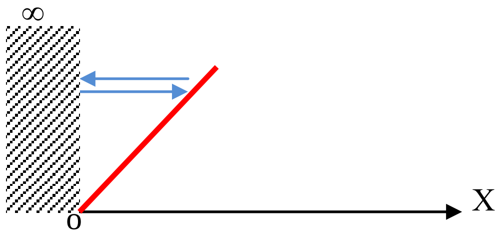
(β) Σε ποιά έκφραση μεταπίπτει η παραπάνω για $n \to \infty$;
Τι σημαίνει εδώ πρακτικά ότι $n \to \infty$;
(γ) Συγκρίνετε την έκφραση που βρήκατε στο σκέλος (β) με τη συχνότητα της ακτινοβολίας που θα εξέπεμπε το ηλεκτρόνιο εάν κινούνταν τελείως κλασικά στην τροχιά n ακτίνας r_n με ταχύτητα v_n.
Σε αυτή την περίπτωση η συχνότητα της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας θα ισούται με τη συχνότητα περιστροφής του ηλεκτρονίου. Τι παρατηρείτε;



[Απ. (β) $f = \dfrac{Z^2 4\pi^2 K_e^2 m_e q_e^4}{h^3 n^3}$ (γ) είναι ίσες]

√**Πρόβλημα 4.** Σωμάτιο μάζας m κινείται στο διάστημα σε περιοχή του χώρου όπου η δυναμική ενέργεια είναι:

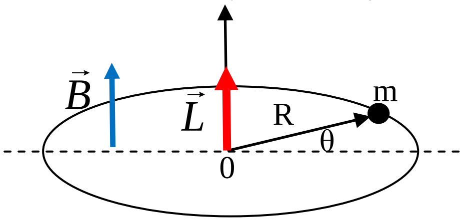
$$U(x)=\begin{cases}\infty, & x<0\\ \dfrac{x}{\sqrt{m}}, & x>0\end{cases}$$



Να κατασκευαστεί το φασικό του διάγραμμα και να υπολογιστεί η ενέργειά του (το ενεργειακό του φάσμα) με βάση τους κανόνες κβάντωσης Wilson-Sommerfeld. Τι συμβαίνει στα όρια h→0, m→∞, n→∞; Δίδεται ότι : $\int\sqrt{\alpha x+b}\,dx=\dfrac{2(\alpha x+b)^{\frac{3}{2}}}{3\alpha}$

[Απ. $E_n=\left(\dfrac{3h}{4\sqrt{2m}}\right)^{\frac{2}{3}}n^{\frac{2}{3}},\ n=0,1,2,3,....$]

√**Πρόβλημα 5. Α(Ο μικροσκοπικός περιστροφέας).** (α) Ένα σωματίδιο μάζας m είναι υποχρεωμένο να περιστρέφεται σε κυκλικό στεφάνι ακτίνας R, όπως στο σχήμα:

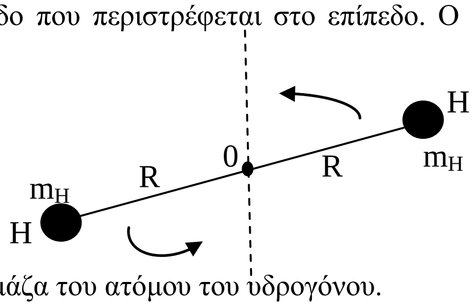


Να υπολογιστεί η ενέργειά του (το ενεργειακό του φάσμα) με βάση τους κανόνες κβάντωσης Wislon-Sommerfeld. Υπενθυμίζεται ότι η (κινητική) ενέργεια ενός περιστρεφόμενου υλικού σημείου ως προς άξονα δίνεται από τη σχέση $E=\dfrac{L^2}{2I}$ όπου L η στροφορμή του και I η ροπή αδρανείας του. [Απ. $E_n=\dfrac{h^2}{8\pi^2 mR^2}n^2,\ n=1,2,3,....$]

(β) Έστω ότι το σωματίδιο είναι φορτισμένο με φορτίο q και κατά μήκος του κάθετου στο επίπεδο του κύκλου άξονα εφαρμόζεται ένα ομογενές και σταθερό μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$. Να υπολογιστεί εκ νέου το ενεργειακό του φάσμα. Υπενθυμίζεται ότι η δυναμική ενέργεια φορτισμένου περιστρεφόμενου σωματιδίου σε μαγνητικό πεδίο δίδεται από την έκφραση $U=-\vec{\mu}\bullet\vec{B}$ όπου μ η μαγνητική διπολική ροπή του $\vec{\mu}=\dfrac{q\vec{L}}{2m}$.

[Απ. $E_n=\dfrac{h^2}{8\pi^2 mR^2}n^2-\dfrac{qBh}{4\pi m}n,\ n=1,2,3,....$]

Β (Ο μικροσκοπικός στερεός περιστροφέας). Με τον όρο αυτό εννοούμε ένα σύστημα δύο υλικών σημείων ενωμένων με μία νοητή αβαρή ράβδο που περιστρέφεται στο επίπεδο. Ο στερεός περιστροφέας εξ' ορισμού έχει μόνο κινητική ενέργεια γιατί η συνολική ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής είναι μηδέν. Θεωρείστε, κατά συνέπεια το μόριο του H_2 ως έναν στερεό περιστροφέα (σύστημα δύο ατόμων H) όπως στο σχήμα.
Να υπολογιστεί η ενέργεια του μορίου του H_2 (το ενεργειακό του φάσμα) με βάση τους κανόνες κβάντωσης Wislon-Sommerfeld. Ως m_H δηλώνεται η μάζα του ατόμου του υδρογόνου.



[Απ. $E_n=\dfrac{h^2}{16\pi^2 m_H R^2}n^2,\ n=1,2,3,....$]