

# ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ (ΟΔΗΓΟΣ ΜΕΛΕΤΗΣ)

Έκδοση 2023

© ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΣΚΑΡΛΑΤΟΣ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 4

# Η γέννηση της σύγχρονης Κβαντομηχανικής

(Αρχή κυματοσωματιδιακού δυϊσμού-Εξίσωση  
Schrödinger-Στατιστική ερμηνεία της  
κυματοσυνάρτησης- Αρχή της αβεβαιότητας)

Έκδοση 2023

© ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΣΚΑΡΛΑΤΟΣ

## Ι. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

► Οι κανόνες κβάντωσης Wilson-Sommerfeld έβαλαν «κάτω από την ίδια σκέπη» την κβάντωση της ενέργειας του μικροσκοπικού αρμονικού ταλαντωτή και του ηλεκτρονίου ενός μονοηλεκτρονιακού ατόμου. Η κβάντωση αναδύθηκε σαν μία «ιδιοτροπία» των περιοδικών κλασικών κινήσεων μικροσκοπικών συστημάτων και αντιμετωπίστηκε εντελώς κλασικά. Οι κανόνες κβάντωσης Wilson-Sommerfeld διατήρησαν έτσι προσωρινά την «ηρεμία» στη Φυσική των αρχών του 20<sup>ου</sup> αιώνα.

► Στο μεταξύ η άποψη του Einstein για την κβάντωση της ενέργειας της H/M ακτινοβολίας με την εισαγωγή της έννοιας του φωτονίου δεν έτυχε αρχικά κάποιας γενικής αποδοχής. Το θέμα δεν εθίγει από τους Wilson-Sommerfeld. Οι κανόνες τους ερμήνευαν την ακτινοβολία του μέλανο σώματος περιοριζόμενοι στους μικροσκοπικούς ταλαντωτές των τοιχωμάτων της κοιλότητας που παρήγαγαν στο εσωτερικό της στάσιμα H/M κύματα.

► Το 1922 επιδεικνύεται το φαινόμενο Compton και η άποψη του Einstein κερδίζει έδαφος. Θα τύχει δε της προσοχής ενός πρώην ιστορικού που αρχίζει εκείνη την εποχή να ασχολείται με τη Φυσική: Του Louis de Broglie.....

► Ο de Broglie θα δεχθεί αβίαστα την άποψη του Einstein, αλλά παράλληλα θα δεχθεί ότι η Φύση δεν μπορεί να κάνει εξαιρέσεις. Ο κυματοσωματιδιακός δυϊσμός δεν μπορεί να αποτελεί μία ιδιαιτερότητα μόνο του φωτός. Αφού η H/M ακτινοβολία εκδηλώνει κυματική και σωματιδιακή συμπεριφορά, αυτό θα πρέπει να ισχύει και για κάθε μικροσκοπικό σωματίδιο που θα πρέπει να εκδηλώνει τόσο σωματιδιακή όσο και κυματική συμπεριφορά.....

## II. ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΟΥ ΔΥΪΣΜΟΥ (1924)

Louis de Broglie  
(1892–1987)



► Κάθε υλικό σωματίδιο μάζας  $m$  που κινείται με ταχύτητα  $v$  εκδηλώνει σωματιδιακή και κυματιτική συμπεριφορά. Με την κίνησή του είναι συνδεδεμένο ένα κύμα (υλικό κύμα) με μήκος κύματος και συχνότητα:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

(Μήκος κύματος  
de Broglie του σωματιδίου)

$$f = \frac{E}{h}$$

Κατά συνέπεια για τα σωματίδια θα ισχύουν και οι σχέσεις που ισχύουν για τα φωτόνια:

$$E = \hbar\omega \quad p = \hbar k$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

Παρατήρηση 1: Η αρχή αυτή διατυπώθηκε αρχικά χωρίς κανένα πειραματικό δεδομένο.

Παρατήρηση 2: Η φύση των υλικών κυμάτων παραμένει προς το παρόν αδιευκρίνιστη. Ο de Broglie θεώρησε πως τα υλικά κύματα συνοδεύουν τα σωματίδια και τα καθοδηγούν (πιλοτάρουν) στην κίνησή τους γι' αυτό και ονομάσθηκαν και «πιλοτικά κύματα» (pilot waves).

Παρατήρηση 3: Για μακροσκοπικά σώματα ( $m \rightarrow \infty$ ) η κυματική φύση εξασθενεί και έχουμε αμιγώς κλασική συμπεριφορά υλικού σώματος ( $\lambda \rightarrow 0$ ).

- Επομένως για ένα μη σχετικιστικό ελεύθερο σωματίδιο (που έχει μόνο κινητική ενέργεια) θα έχουμε ότι :

$$E = K = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2mE} \quad \text{και κατά συνέπεια: } \lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$$

- Για ένα μη σχετικιστικό σωματίδιο που έχει και δυναμική ενέργεια θα έχουμε ότι :

$$E = \frac{p^2}{2m} + U \Rightarrow p = \sqrt{2m(E - U)} \quad \text{και κατά συνέπεια: } \lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E - U)}}$$

- Για ένα σχετικιστικό ελεύθερο σωματίδιο θα έχουμε ότι :

$$E = \sqrt{(m_0c^2)^2 + (cp)^2} \Rightarrow p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - (m_0c^2)^2}$$

και :

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{E^2 - (m_0c^2)^2}}$$



**Παράδειγμα 23: (Αυτοδιδασκαλία)** Να υπολογιστεί το μήκος κύματος de Broglie ενός αυτοκινήτου μάζας ενός τόνου που κινείται με ταχύτητα 100m/s.

**Λύση:** Για το αυτοκίνητο θα έχουμε ότι:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\nu} = \frac{6,62 \times 10^{-34} \text{ Js}}{(1000 \text{ Kgr}) \times 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 6,62 \times 10^{-39} \text{ m!!!}$$

Δεν υπάρχει τρόπος παρατήρησης και μέτρησης τέτοιου μήκους κύματος. Το αυτοκίνητο συμπεριφέρεται εντελώς κλασικά.



**Παράδειγμα 24:** (Λύθηκε μερικώς και στο μάθημα - Αυτοδιδασκαλία) Να βρεθεί μία σχέση για το μήκος κύματος de Broglie (σε Å) συναρτήσει της ενέργειας εκπεφρασμένης σε eV για: (α) Ένα μη σχετικιστικό ηλεκτρόνιο (β) Ένα μη σχετικιστικό πρωτόνιο ή νετρόνιο (γ) Ένα φωτόνιο.

**Λύση:** Έστω  $m_0$  η μάζα ηρεμίας του σωματιδίου. Για το σωματίδιο θα έχουμε ότι:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0E}} = \frac{hc}{\sqrt{2m_0c^2E}}$$

Επίσης:

$$hc = \left(6,62 \times 10^{-34} \text{ Js}\right) \times \left(3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 19,86 \times 10^{-26} \text{ Jm}$$

Όμως:

$$1\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Άρα:

$$hc = \frac{19,86 \times 10^{-26} \text{ Jm}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J / eV}} = 12,412 \times 10^{-7} \text{ eVm} = 12412 \times 10^{-10} \text{ eVm} \approx 12400 \text{ eVÅ}$$

(α) Για το ηλεκτρόνιο:

$$m_{e_0}c^2 = 9,1 \times 10^{-31} \text{ Kgr} \times 9 \times 10^{16} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 81,9 \times 10^{-15} \text{ J} = 51,18 \times 10^4 \text{ eV} \approx 0,5 \times 10^6 \text{ eV}$$

$$\lambda_e (\text{\AA}) = \frac{hc}{\sqrt{2m_{0e}c^2 E}} = \frac{12400 \text{ eV}\text{\AA}}{\sqrt{2 \times 0,5 \times 10^6 \text{ eV} E(\sigma\varepsilon \text{ eV})}} \Rightarrow \lambda_e (\text{\AA}) \approx \frac{12,4}{\sqrt{E_e(\sigma\varepsilon \text{ eV})}}$$

(β) Για το πρωτόνιο και το νετρόνιο (νουκλεόνια):

$$m_{0p} = m_{0n} = m_{0N} = 1836m_{0e}$$

$$m_{0N}c^2 = 1836 \times (0,5 \times 10^6) \text{ eV}$$

$$\lambda_N (\text{\AA}) \approx \frac{0,289}{\sqrt{E_N(\sigma\varepsilon \text{ eV})}}$$

(γ) Για το φωτόνιο:

$$E_{ph} (\text{eV}) = hf = \frac{hc}{\lambda_{ph} (\text{\AA})} \Rightarrow E_{ph} (\text{eV}) = \frac{12400 (\text{eV}\text{\AA})}{\lambda_{ph} (\text{\AA})} \Rightarrow \lambda_{ph} (\text{\AA}) = \frac{12400}{E_{ph} (\sigma\varepsilon \text{ eV})}$$



Παρατήρηση 1: Για ένα ηλεκτρόνιο και ένα νουκλεόνιο της ίδιας ενέργειας:

$$\lambda_N (\text{\AA}) \approx \lambda_e (\text{\AA}) \sqrt{\frac{m_{0e}}{m_{0N}}} = \frac{\lambda_e (\text{\AA})}{\sqrt{1836}} \approx \frac{\lambda_e (\text{\AA})}{43}$$

Παρατήρηση 2: Για να πετύχουν μήκη κύματος της τάξεως του  $\text{\AA}$  τα μεν ηλεκτρόνια χρειάζονται ενέργειες μερικών eV, ενώ τα φωτόνια μερικών χιλιάδων eV.

---

**Παράδειγμα 25: (Λύθηκε μερικώς και στο μάθημα)** Να υπολογιστεί το μήκος κύματος de Broglie ενός ελεύθερου ηλεκτρονίου κινητικής ενέργειας 100 MeV. Ελέγξτε πρώτα εάν αυτό κινείται σχετικιστικά.

**Γενική Υπόδειξη:** Με βάση τη θεωρία της Σχετικότητας η ενέργεια ενός σχετικιστικού σωματιδίου δίνεται από τις εκφράσεις (βλ. και σημειώσεις «Εισαγωγή»):

$$E = K + m_0 c^2 = m c^2 \quad (\text{ελεύθερο σωματίο}) \quad (1)$$

$$E = K + U + m_0 c^2 = m c^2 \quad (\text{σωμάτιο σε πεδίο δυναμικής ενέργειας}) \quad (2)$$

Ισοδύναμα έχουμε ότι:

$$E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (cp)^2} \Rightarrow pc = \sqrt{E^2 - (m_0 c^2)^2} \quad (3)$$

Για ελεύθερο σωματίο θα έχουμε συνδυάζοντας τις (1) και (3):

$$pc = \sqrt{(K + m_0c^2)^2 - (m_0c^2)^2} = \sqrt{K^2 + 2Km_0c^2} = K\sqrt{1 + \frac{2m_0c^2}{K}}$$

*Για να ελέγξουμε εάν ένα σωματίδιο κινείται σχετικιστικά:*

*(α) Συγκρίνουμε την κινητική ενέργειά του ή την ποσότητα  $pc$  με την ενέργεια ηρεμίας του  $E_0$ .*

*(β) Συγκρίνουμε την ταχύτητά του με την ταχύτητα του φωτός  $c$ .*

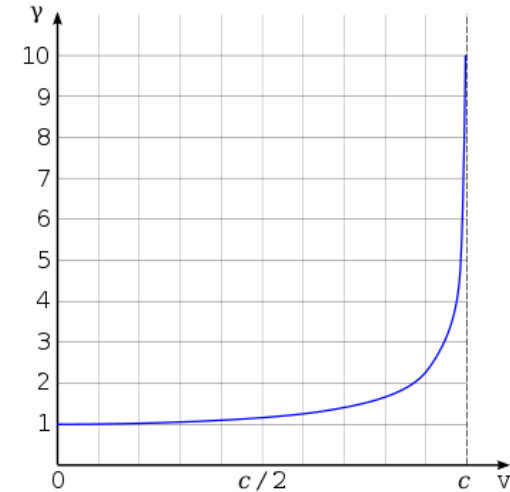
*Εάν  $v \geq 0,7c$  μπορούμε να το θεωρήσουμε αρκετά σχετικιστικό.*

**Λύση:** Για το συγκεκριμένο ηλεκτρόνιο έχουμε ότι:

$$E_0 = m_{e0}c^2 = 9,1 \times 10^{-31} \text{ Kgr} \times 9 \times 10^{16} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 81,9 \times 10^{-15} \text{ J} = 51,18 \times 10^4 \text{ eV} \approx 0,5 \times 10^6 \text{ eV}$$

Εδώ έχουμε ότι:  $K \gg E_0$

$$\begin{aligned} \text{Επομένως: } \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{hc}{pc} = \frac{hc}{K\sqrt{1 + \frac{2m_0c^2}{K}}} = \frac{19,86 \times 10^{-26} \text{ Jm}}{100 \text{ MeV} \sqrt{1 + \frac{1 \text{ MeV}}{100 \text{ MeV}}}} \approx \frac{12400 \text{ eV}\text{\AA}}{100 \text{ MeV}} = \\ &= 124 \times 10^{-6} \text{ \AA} = 12,4 \times 10^{-5} \text{ \AA} = 12,4 \text{ fm} \end{aligned}$$



### III. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

**Εφαρμογή 1 (Σωματίδιο σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικής ενέργειας):** Το σωματίδιο είναι περιορισμένο μέσα στα όρια του πηγαδιού και συγκρούεται ελαστικά στα τοιχώματά του έχοντας διαρκώς όρμη σταθερού μέτρου.

Τα αντίστοιχα υλικά κύματα (προσπίπτουν και ανακλώμενο) θα έχουν τη μορφή:

$$y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

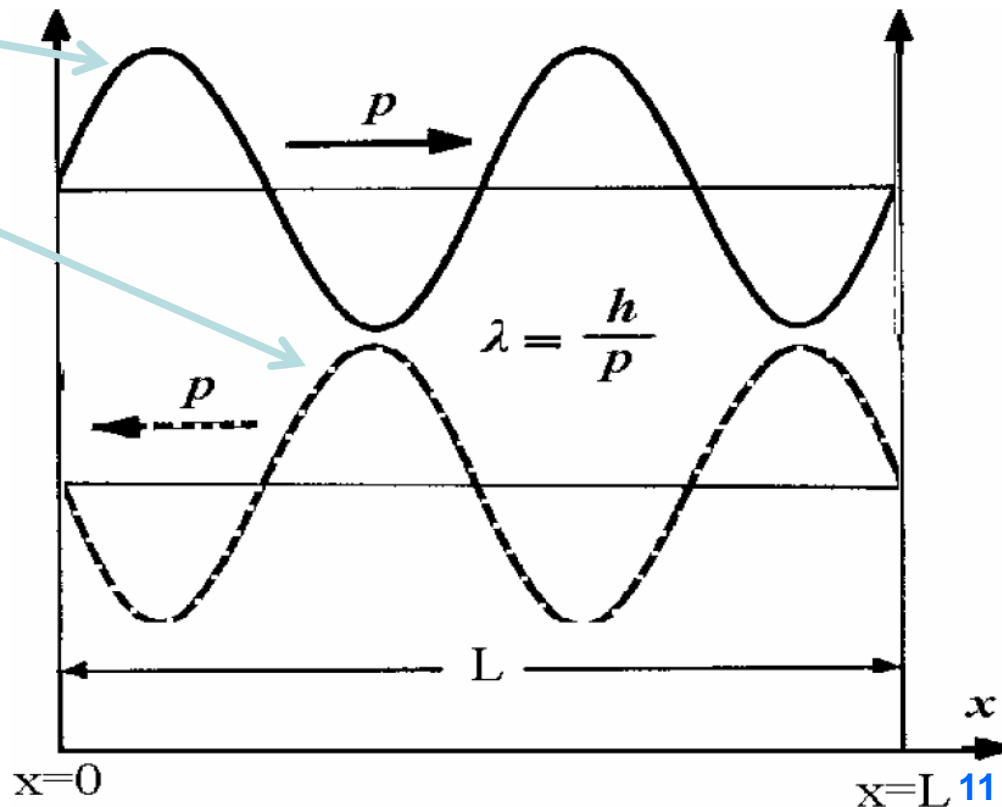
$$y_2(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$$

Η συμβολή τους στην περιοχή (0,L) θα δώσει:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) =$$

$$A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t) =$$

$$(2A \sin kx) \cos \omega t \quad \text{Στάσιμο κύμα !!!!}$$



Το συνολικό στάσιμο κύμα θα πρέπει να ικανοποιεί τα ακόλουθες οριακές συνθήκες:

α)  $y(0, t) = 0$  (Ικανοποιείται αυτόματα για κάθε  $k$  και  $\lambda$ )

β)  $y(L, t) = 0 \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots$  Η τιμή  $n=0$  δεν έχει νόημα. Θα σήμαινε απλά ότι  $L=0$  (δεν έχουμε πηγάδι) ή  $k=0$  (δεν έχουμε κυματοσωματιδιακό δυϊσμό) !!!!

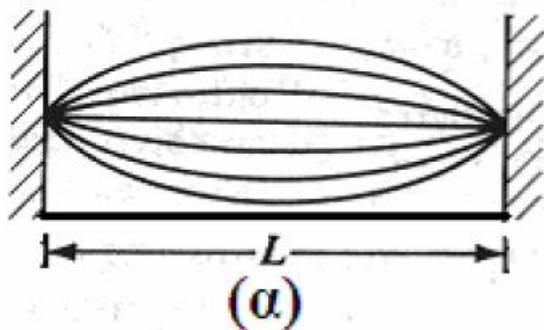
Ισοδύναμα:  $\frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n}, n = 1, 2, 3, \dots$

Επομένως:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{nh}{2L} \quad \text{και:} \quad E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}, n = 1, 2, 3, \dots$$

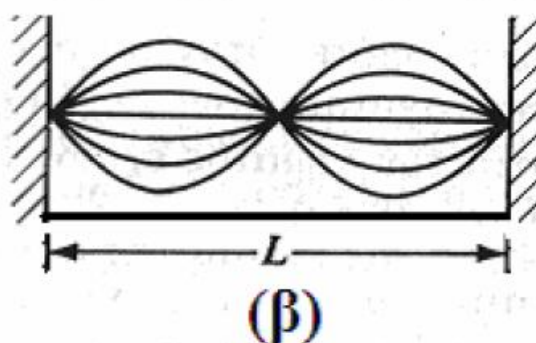
Θεμελιώδης

$n=1$



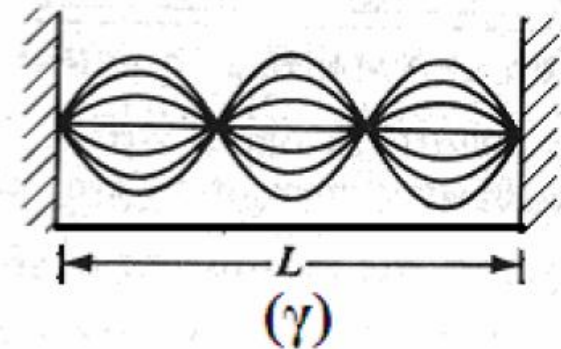
1<sup>η</sup> Διεγερμένη

$n=2$



2<sup>η</sup> Διεγερμένη

$n=3$



Παρατηρήσεις:

- (α) Βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα με τη διαπραγμάτευση κατά Wilson-Sommerfeld.
- (β) Η μόνη διαφορά είναι ότι οι κανόνες κβάντωσης Wilson-Sommerfeld δεν εξαιρούν την τιμή  $n=0$ . Στην σχεδόν κλασική διαπραγμάτευση του προβλήματος δεν υπάρχει λόγος που να αποκλείει η θεμελιώδης κατάσταση του σωματιδίου να αντιστοιχεί σε ενέργεια μηδέν. Ο κυματοσωματιδιακός δυϊσμός συνιστά μία διαφορετικής φιλοσοφίας διαπραγμάτευση του θέματος.
- (γ) Παρατηρούμε μία ιδιαίτερη εξάρτηση της ενέργειας από το εύρος του πηγαδιού. Όσο μειώνεται το  $L$  (δηλαδή όσο το σωματίδιο εντοπίζεται περισσότερο σε μία περιοχή του χώρου), τόσο η ενέργειά του όσο και η συχνότητα του συνδεδεμένου με αυτό υλικού κύματος αυξάνονται.

**Εκκρεμές ερώτημα: Τι επιβάλλει, όμως, μία τέτοιου είδους κίνηση του σωματιδίου;**

**Δεν υπάρχει κάποιος προφανής μηχανισμός.**

**Είναι επίσης αυτονόητο ότι η αιτία θα συνδέεται με τη φύση του υλικού κύματος που συνδέεται με το σωματίδιο...**

**ΑΡΑ, ΤΕΛΙΚΑ, ΤΙ ΕΙΔΟΥΣ ΚΥΜΑ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΥΛΙΚΟ ΚΥΜΑ;**

**Εφαρμογή 2 (Τα μονοηλεκτρονιακά άτομα του Bohr):** Το ερώτημα είναι πώς συνδυάζεται η θεωρία του Bohr με την αρχή του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού.

► Το ηλεκτρόνιο ενός μονοηλεκτρονιακού ατόμου, κινούμενο σε μία επιτρεπόμενη κυκλική τροχιά, θα πρέπει να συμπεριφέρεται ταυτόχρονα και ως κύμα με μήκος κύματος de Broglie:

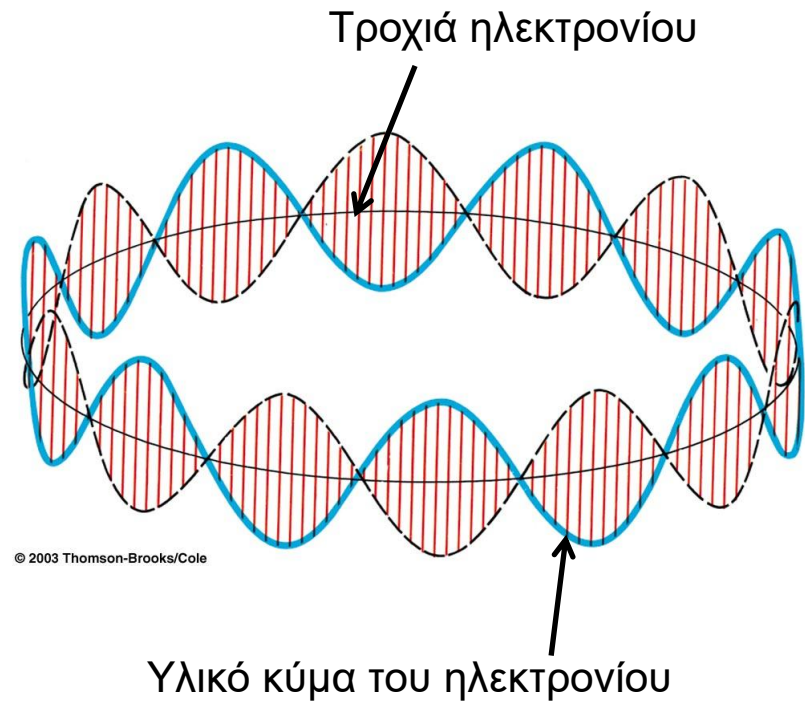
$$\lambda = \frac{h}{p}$$

► Αφού το ηλεκτρόνιο είναι περιορισμένο στην κυκλική του τροχιά, το υλικό κύμα που το συνοδεύει θα είναι προφανώς στάσιμο.

► Οι δύο εικόνες συνδυάζονται μόνο **εάν δεχθούμε** ότι το μήκος της επιτρεπόμενης κυκλικής τροχιάς «χωράει» ακέραια πολλαπλάσια του μήκους κύματος de Broglie του ηλεκτρονίου. Δηλαδή:

$$2\pi r = n\lambda \Rightarrow 2\pi r = n \frac{h}{p} \Rightarrow 2\pi r = n \frac{h}{m_e v} \Rightarrow$$

$$m_e v r = n \frac{h}{2\pi} \Rightarrow L = n \frac{h}{2\pi}, n = 1, 2, 3, 4, \dots$$



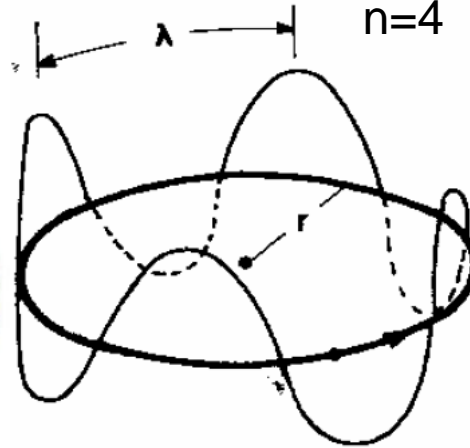
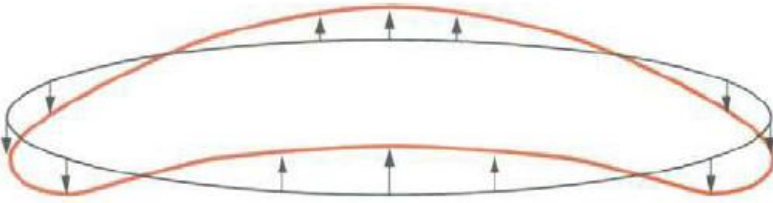
Προκύπτει έτσι **αβίαστα** η ανάγκη κβάντωσης της στροφορμής, όπως την πρότεινε ο Bohr !!!!



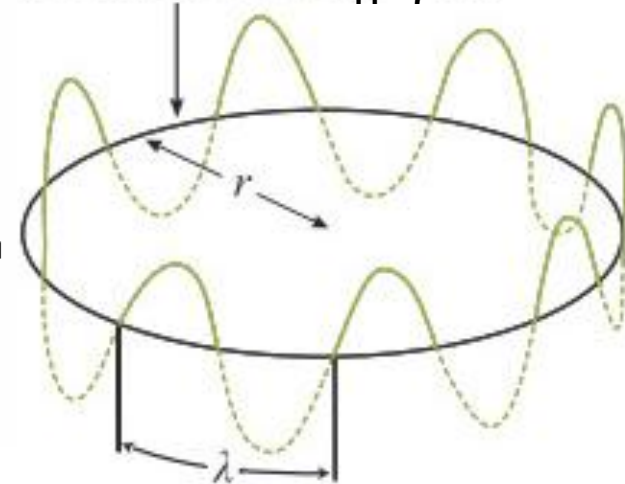
► Σε αντίθετη περίπτωση ( το μήκος της τροχιάς να «χωράει» μη ακέραια πολλαπλάσια του μήκους κύματος de Broglie) έχουμε καταστροφική συμβολή.

Παραδεκτή εικόνα ( $2\pi r = n\lambda$ )

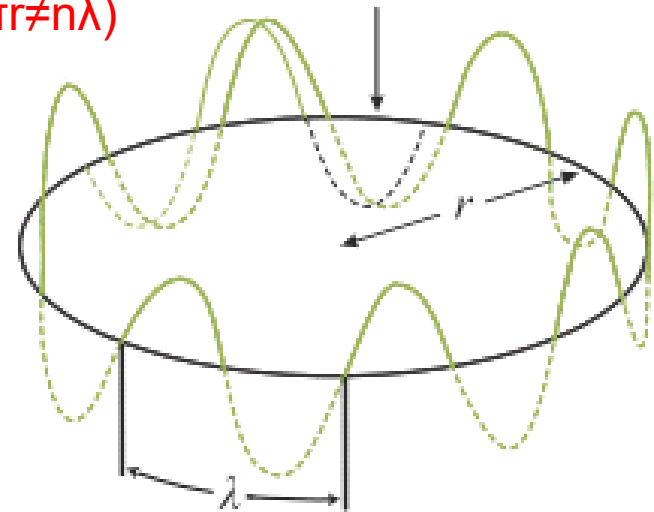
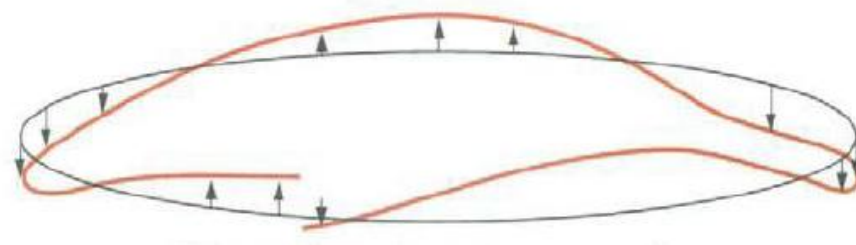
$n=2$



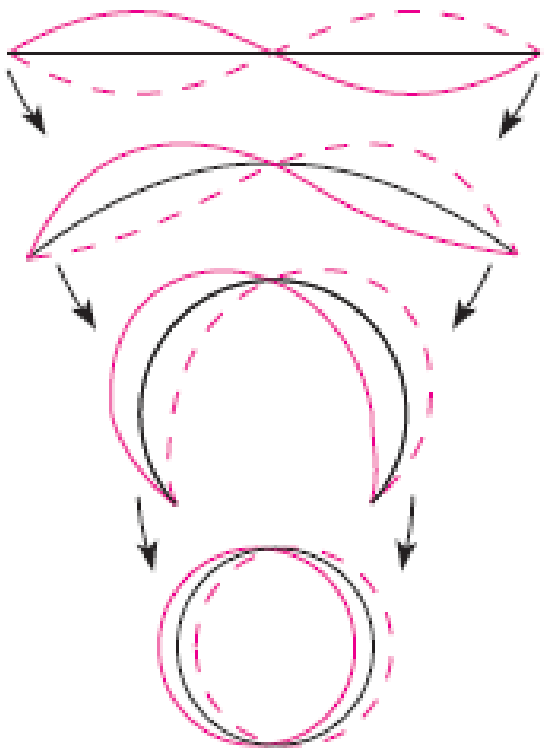
$n=7$



Μη παραδεκτή εικόνα ( $2\pi r \neq n\lambda$ )

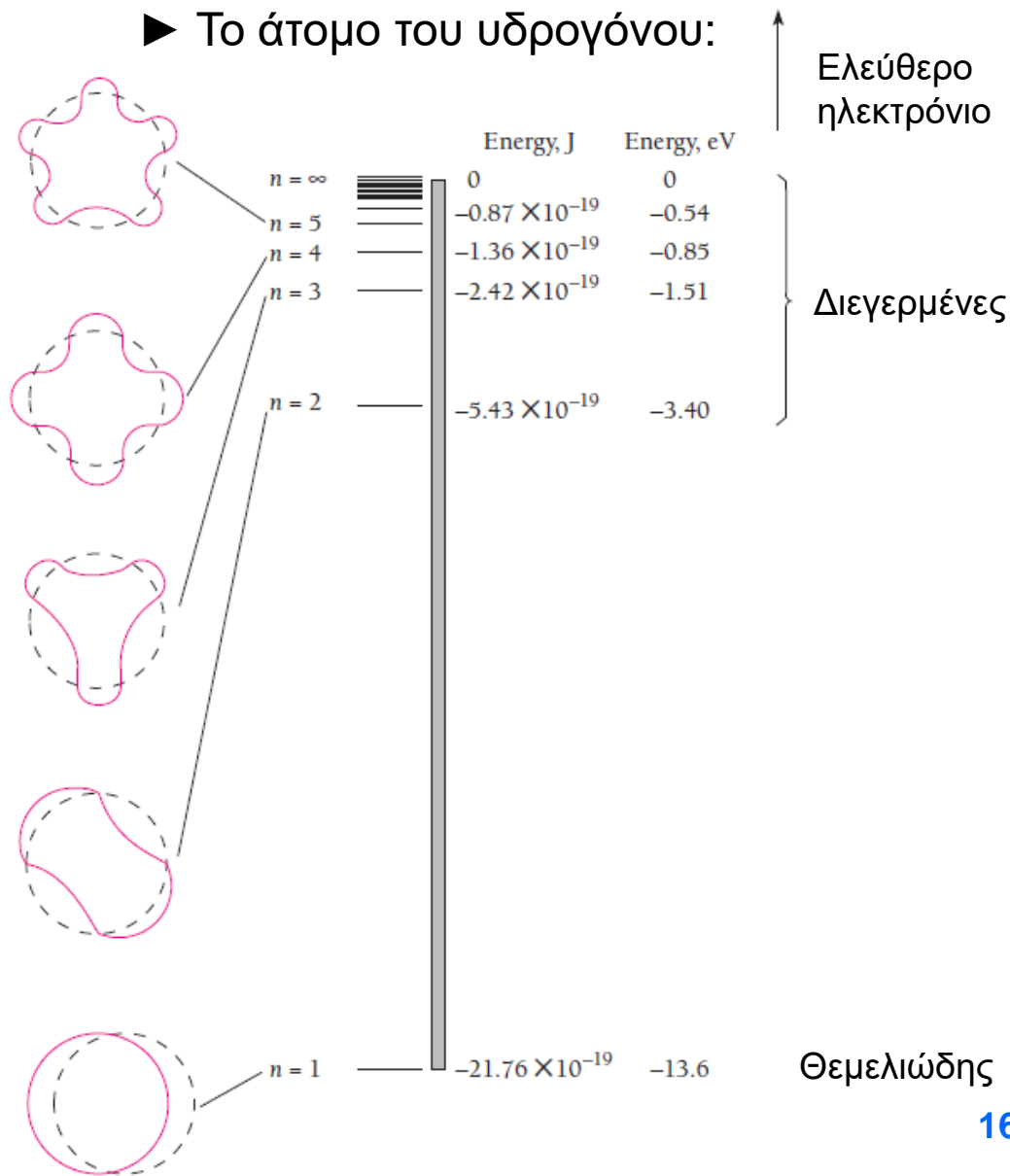


Κατασκευή της πρώτης επιτρεπόμενης τροχιάς για  $n=1$ . Το μήκος της ισοδυναμεί με ένα μήκος κύματος de Broglie.



— Τροχιά ηλεκτρονίου  
— Υλικό κύμα του ηλεκτρονίου

► Το άτομο του υδρογόνου:





Συμπέρασμα: Από όλες τις δυνατές τροχιές, αυτές που επιτρέπονται είναι αυτές που επιζούν της καταστροφικής συμβολής, επειδή τα υλικά τους κύματα συμβάλουν ενισχυτικά.

Εκκρεμές ερώτημα: Τι επιβάλλει, όμως, μία τέτοιου είδους κίνηση του ηλεκτρονίου; Δεν υπάρχει κάποιος προφανής μηχανισμός. Η μόνη δύναμη που υφίσταται είναι η δύναμη Coulomb του πυρήνα που δρά σαν κεντρομόλος....

Είναι επίσης αυτονόητο ότι η αιτία θα συνδέεται με τη φύση του υλικού κύματος που συνδέεται με το σωματίδιο...

**ΑΡΑ, ΤΕΛΙΚΑ, ΤΙ ΕΙΔΟΥΣ ΚΥΜΑ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΥΛΙΚΟ ΚΥΜΑ ΠΟΥ ΣΥΝΟΔΕΥΕΙ ΤΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΟ;**

**Εφαρμογή 3 (Το ελεύθερο μη σχετικιστικό σωματίδιο):** Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο μάζας  $m$  που κινείται ελεύθερο στον χώρο με ταχύτητα  $v$  χωρίς περιορισμούς ή την άσκηση κάποιας δύναμης επάνω του. Τι μορφή θα έχει το υλικό κύμα που το συνοδεύει;

► Θα μπορούσε να είναι ένα τυπικό οδεύον κύμα της παρακάτω μορφής;

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

► Ασφαλώς όχι (!! ) γιατί:

(α) Ένα τυπικό οδεύον κύμα της παραπάνω μορφής ταξιδεύει με τη φασική του ταχύτητα:

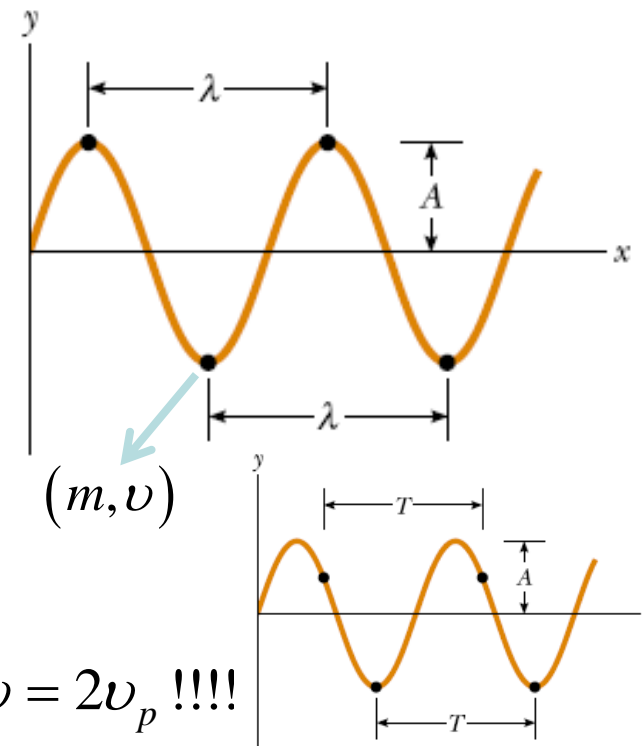
$$v_p = \frac{\omega}{k}$$

Η φασική του ταχύτητα, όμως, δεν αντιπροσωπεύει κάποια ταχύτητα υλικού σημείου.

(β) Επιπλέον η σχέση διασποράς για το ελεύθερο σωματίο είναι:

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{p^2}{2m} = \hbar\omega \\ p &= m v = \hbar k \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} \Rightarrow v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} \Rightarrow v = 2v_p \text{ !!!!}$$

$$v = \frac{\hbar k}{m}$$



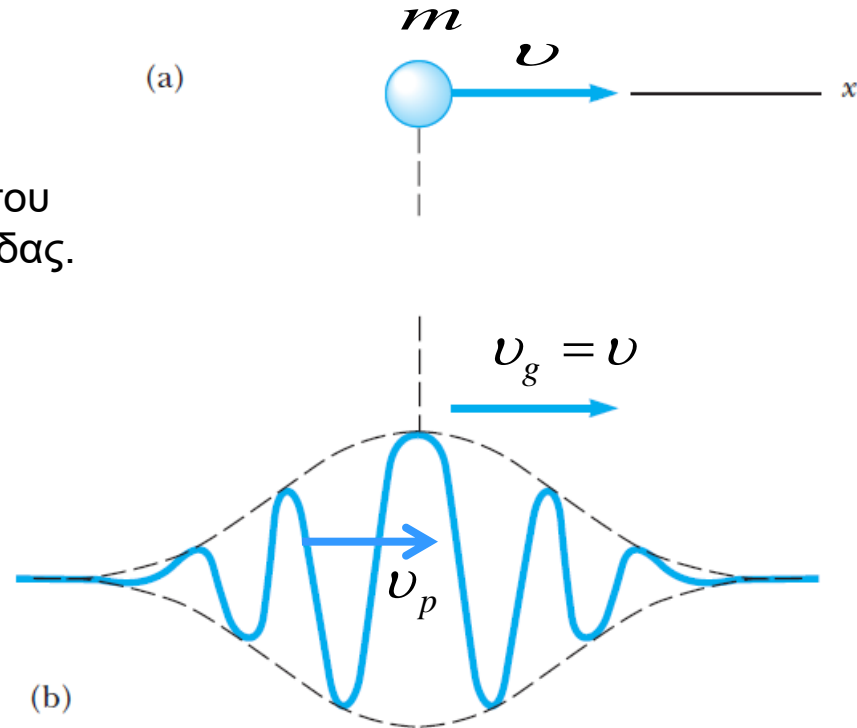
► Το σωματίδιο θα αντιπροσωπεύεται ρεαλιστικότερα από ένα κυματόδεμα (κυματοπακέτο) γιατί:

(α) Ένα κυματόδεμα είναι χωρικά εντοπισμένο και ταιριάζει καλύτερα ως συνοδό υλικό κύμα ενός υλικού σωματιδίου. Το σωματίδιο βρίσκεται στο κέντρο του κυματοπακέτου, το οποίο κινείται με την ταχύτητα ομάδας.

(β) Επιπλέον:

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{p^2}{2m} = \hbar\omega \\ p &= m\upsilon = \hbar k \\ \upsilon &= \frac{\hbar k}{m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} \Rightarrow$$

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} = \upsilon!!!!$$



**Η ταχύτητα του σωματιδίου ισούται με την ταχύτητα ομάδας με την οποία οδεύει ολόκληρο το κυματόδεμα (η περιβάλλουσά του). Οι συνιστώσες του κυματοδέματος κινούνται με τη φασική τους ταχύτητα....**

► Στην πράξη ένα υλικό κυματόδεμα συντίθεται, ως γνωστόν, από υπέρθεση αρμονικών κυμάτων με κυματαριθμούς πολύ κοντινούς σε έναν κεντρικό κυματαριθμό  $k_0$ .

Αφού οι κυματαριθμοί βρίσκονται σε ένα πολύ στενό διάστημα μπορούμε να αναπτύξουμε τη σχέση διασποράς  $\omega(k)$  σε σειρά ως προς το  $k_0$ :

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} + \dots$$

Αγνοώντας όρους ανώτερης τάξης έχουμε ότι:

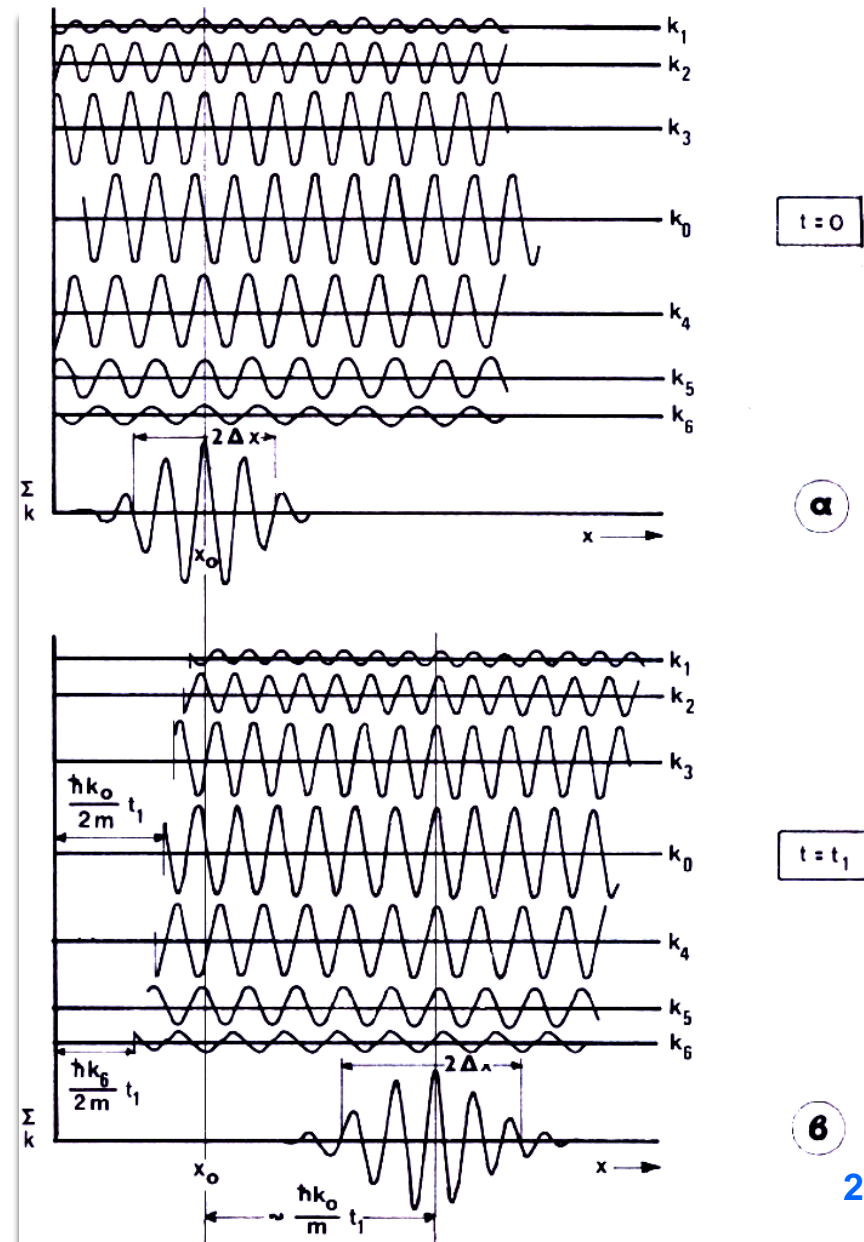
$$v_g = \frac{d\omega(k)}{dk} = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0}$$

Η σχέση διασποράς για το ελεύθερο σωματίο είναι:

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

Άρα:

$$v_g = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} = \frac{\hbar k_0}{m}$$



Η φασική ταχύτητα κάθε συνιστώσας του κυματοδέματος θα είναι:

$$v_p = \left( \frac{\omega}{k} \right)_{k=k_i} = \frac{\hbar k_i}{2m}$$

► Το κέντρο του κυματοδέματος  $x_0$  κινείται με την ταχύτητα ομάδας. Κάθε συνιστώσα του κινείται με διαφορετική φασική ταχύτητα. Κατά συνέπεια μετά το σχηματισμό του υλικού κυματοδέματος, και καθώς αυτό ταξιδεύει στο χώρο «απλώνει» (διασπορά).

Εκκρεμές ερώτημα: Τι επιβάλλει, όμως, μία τέτοιου είδους αναπαράσταση με κυματοδέμα για ένα ελεύθερο σωματίο;

Τι αντιπροσωπεύουν οι συνιστώσες του υλικού κυματοδέματος;

Τι αντιπροσωπεύει η διασπορά του καθώς διαδίδεται;

ΑΡΑ, ΤΕΛΙΚΑ, ΤΙ ΕΙΔΟΥΣ ΚΥΜΑΤΟΔΕΜΑ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΥΛΙΚΟ ΚΥΜΑΤΟΔΕΜΑ ΠΟΥ ΣΥΝΟΔΕΥΕΙ ΤΟ ΕΛΕΥΘΕΡΟ ΣΩΜΑΤΙΟ;

## IV. Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ SCHRÖDINGER (1926)

► Η κυματοσυνάρτηση του υλικού κύματος που συνδέεται με υλικό σωματίδιο σύμφωνα με την υπόθεση de Broglie συμβολίζεται ως:

$$\Psi(x, t)$$

► Ένα **ελεύθερο σωματίδιο** που συνοδεύεται από ένα υλικό κύμα δεν μπορεί παρά να διαδίδεται ως ένα κυματοδέμα. Θα ισχύει δε ότι:

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} dk$$

Όμως:

$$\left. \begin{array}{l} E = \frac{p^2}{2m} = \hbar\omega \\ p = m\omega = \hbar k \end{array} \right\} \Rightarrow \omega = \frac{(\hbar k)^2}{2m\hbar} = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

Και επομένως:

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i \left[ kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t \right]} dk$$

**Ποια κυματική εξίσωση ικανοποιεί η παραπάνω κυματοσυνάρτηση;;;**

Erwin Schrödinger  
(1887 –1961)



Θα έχουμε ότι:

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 A(k) e^{i\left[kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t\right]} dk \quad (\alpha)$$

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} = i \int_{-\infty}^{+\infty} k A(k) e^{i\left[kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t\right]} dk$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = i^2 \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 A(k) e^{i\left[kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t\right]} dk = - \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 A(k) e^{i\left[kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t\right]} dk \quad (\beta)$$

Από (α) και (β) παίρνουμε:

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} \Rightarrow i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2}$$

**Ελεύθερη εξίσωση του Schrödinger**

Γραμμική με σταθερούς **μιγαδικούς** συντελεστές



**μιγαδικές λύσεις**

**Κλασική κυματική εξίσωση**

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}$$

Γραμμική με σταθερούς **πραγματικούς** συντελεστές



**πραγματικές λύσεις** 23

- ▶ Εάν το σωματίδιο υφίσταται την επίδραση κάποιας (συντηρητικής) δύναμης έχοντας δυναμική ενέργεια  $U(x)$  η εξίσωση του Schrödinger παίρνει, εντελώς διαισθητικά, τη μορφή:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x)\Psi(x,t)$$

- ▶ Στις τρεις διαστάσεις θα έχουμε ότι:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r},t) + U(\vec{r})\Psi(\vec{r},t) \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

**Θεμελιώδες ερώτημα: Τι είδους κύμα αντιπροσωπεύουν οι μιγαδικές λύσεις της εξίσωσης του Schrödinger ;;;**

**Πρώτη απάντηση: Σίγουρα όχι ένα «κλασικό μηχανικό» κύμα ή κυματόδεμα.....**



## V. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΒΕΒΑΙΩΣΗ ΤΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ de Broglie

► Εάν μπορούμε να παρεμβάλουμε στο δρόμο των υλικών κυμάτων «εμπόδια» με συγκρίσιμες διαστάσεις ή μεγαλύτερα εμπόδια με σχισμές ή οπές της ίδιας περίπου τάξης μεγέθους με το μήκος κύματος, θα παρατηρήσουμε φαινόμενα συμβολής ή /και περίθλασης;

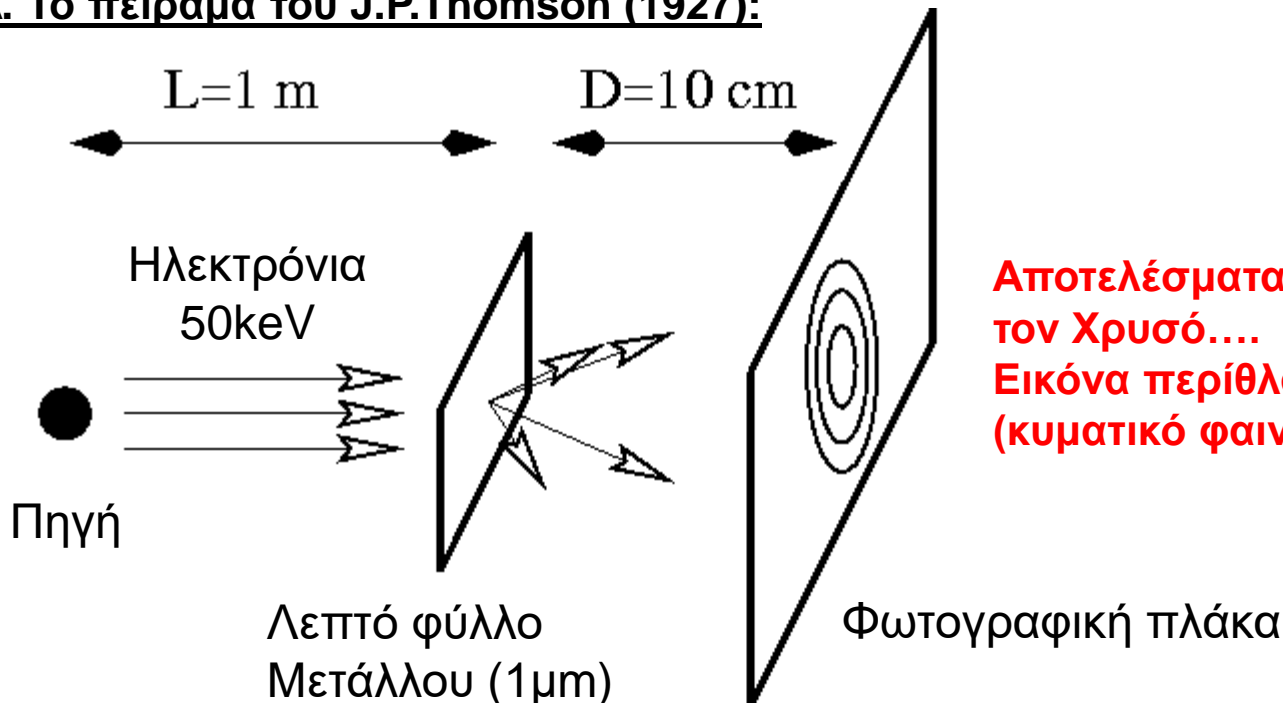
► Η απάντηση είναι καταφατική, όπως έδειξαν:

(β) Τό πείραμα του J.P.Thomson (1927)

(β) Το πείραμα των Davisson-Germer (1927)

(γ) Πειράματα σχισμών με ηλεκτρόνια (δεκαετία του 1960)

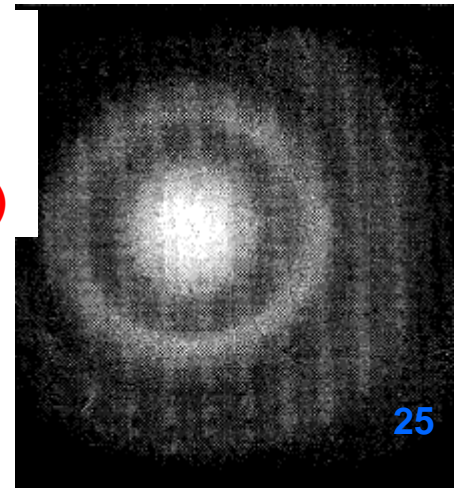
### A. Το πείραμα του J.P.Thomson (1927):



G. P. Thomson  
(1892-1975)



**Αποτελέσματα για  
τον Χρυσό....  
Εικόνα περίθλασης  
(κύματικό φαινόμενο)**

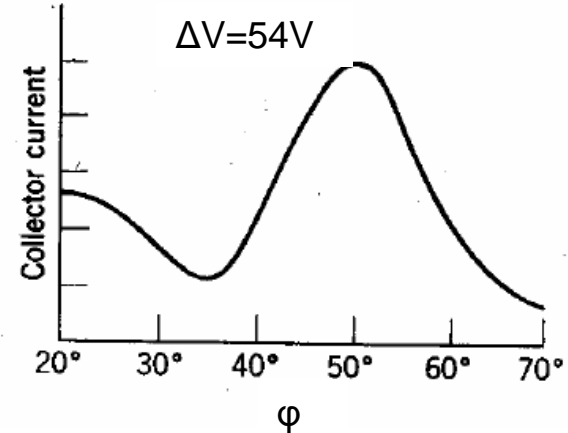
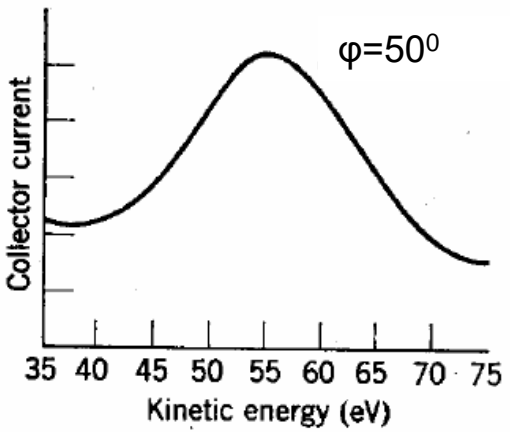
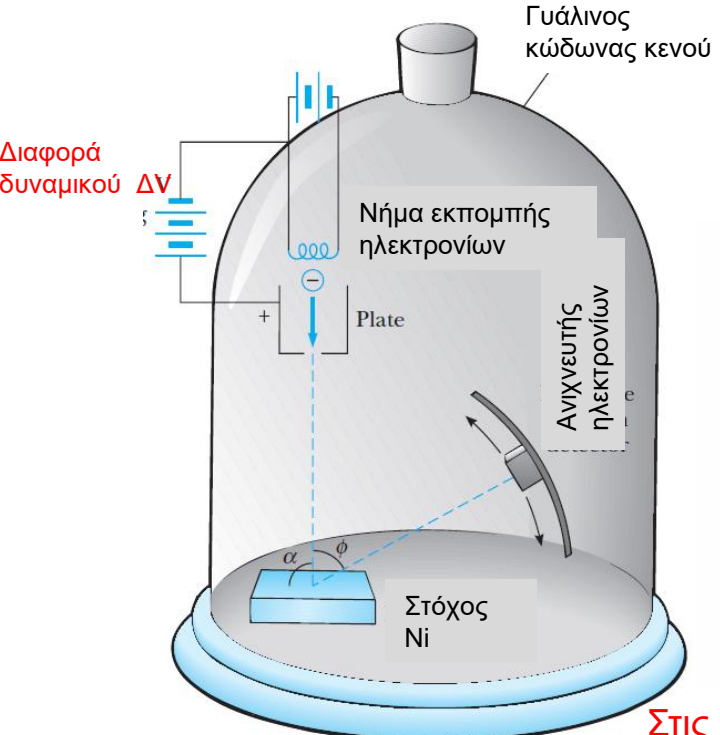


**Β. Το πείραμα των Davisson-Germer (1927):** Πρόσπτωση ηλεκτρονίων ενέργειας 35-75 eV κάθετα στην επιφάνεια (πολύ)κρυσταλλικού Ni.

Clinton Davisson  
(1881 –1958)



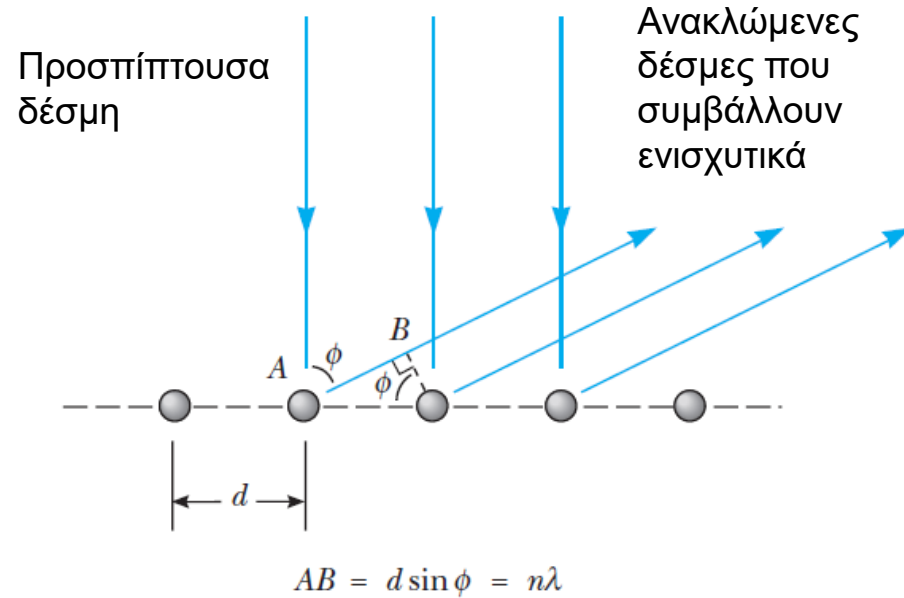
Lester Germer  
(1896 –1971)



Στις 50° μέγιστη ένταση συλλεγόμενου «ρεύματος» για ενέργεια 54eV  
Για ενέργεια 54eV μέγιστη ένταση συλλεγόμενου «ρεύματος» για φ=50°



Σκεδαζόμενη ένταση (τυχαίες μονάδες)



Για  $E=54\text{eV}$  το μήκος κύματος de Broglie των ηλεκτρονίων είναι:

$$\lambda_e (\text{\AA}) = \frac{12,4}{\sqrt{E_e (eV)}} = \frac{12,4}{\sqrt{54}} = 1,68$$

Ενισχυτική συμβολή έχουμε όταν η διαφορά του οπτικού δρόμου των δεσμών που συμβάλλουν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος:

$$d \sin \phi = n \lambda_e$$

Εδώ  $d=2,15$  και επομένως:

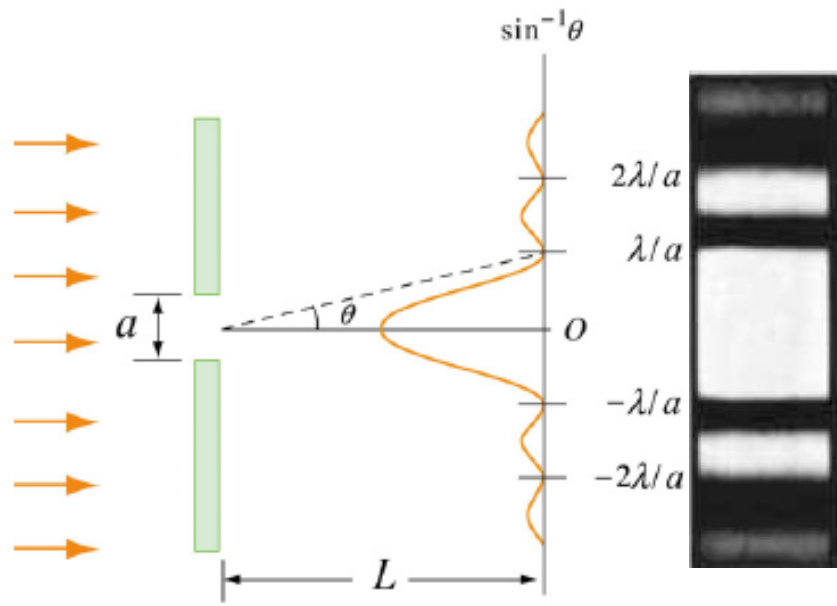
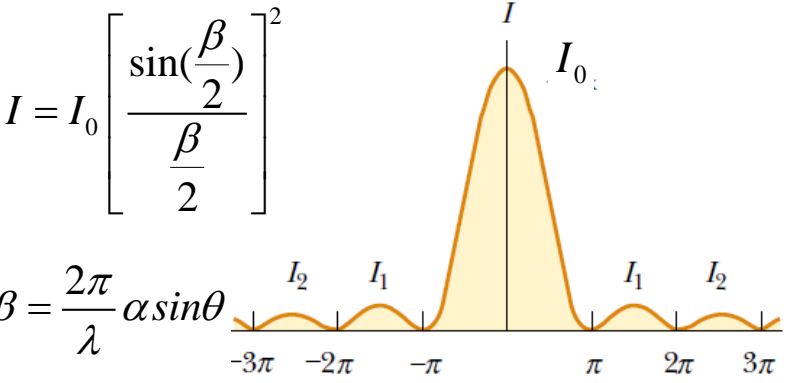
$$d \sin \phi = (2,15 \text{\AA}) \sin(50^\circ) = 1,65 \text{\AA} \quad \text{!!!!!!}$$

Σαφές κυματικό φαινόμενο....

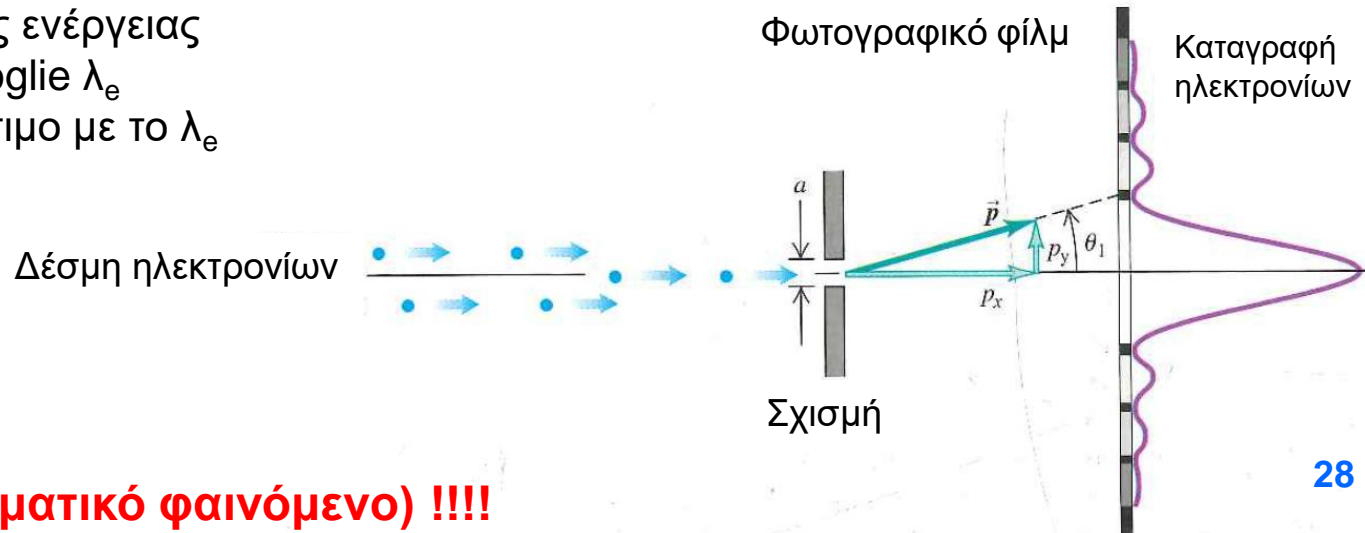


**Γ. Περίθλαση φωτός και ηλεκτρονίων μέσα από λεπτή σχισμή:**

Φως συγκεκριμένου μήκους κύματος  $\lambda$   
Άνοιγμα σχισμής  $a$  συγκρίσιμο με το  $\lambda$   
Καταστροφική συμβολή για:  $a \sin \theta = m\lambda$ ,  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$



Ηλεκτρόνια συγκεκριμένης ενέργειας και μήκους κύματος de Broglie  $\lambda_e$   
Άνοιγμα σχισμής  $a$  συγκρίσιμο με το  $\lambda_e$

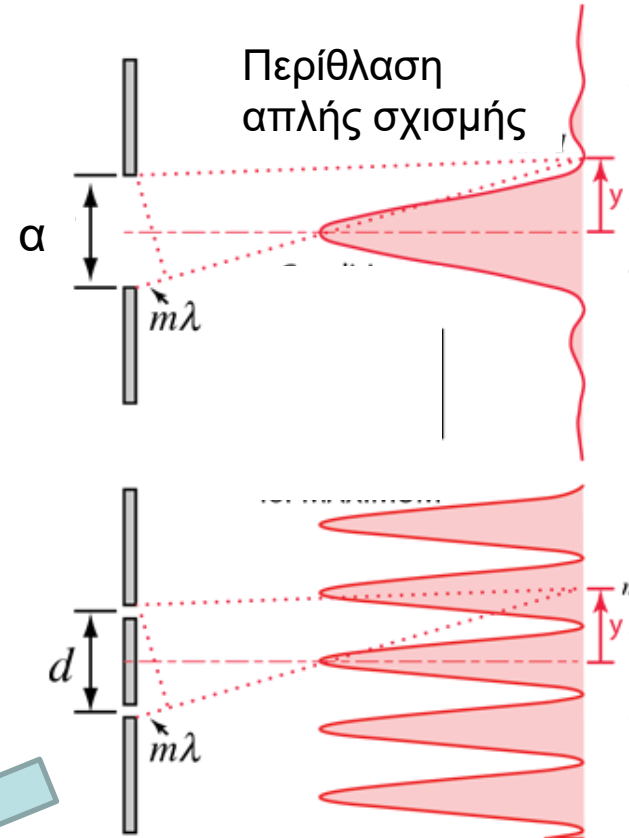
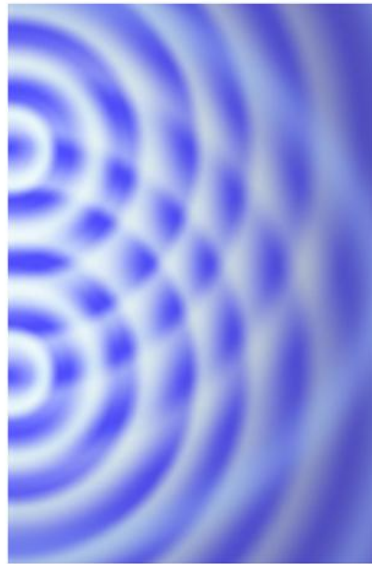
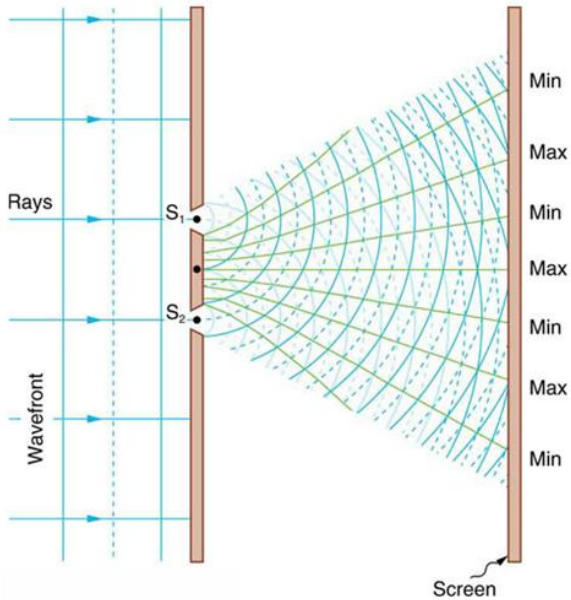


**Εικόνα περίθλασης (κυματικό φαινόμενο) !!!!**



**Δ. Το πείραμα της διπλής σχισμής για φως και ηλεκτρόνια:**

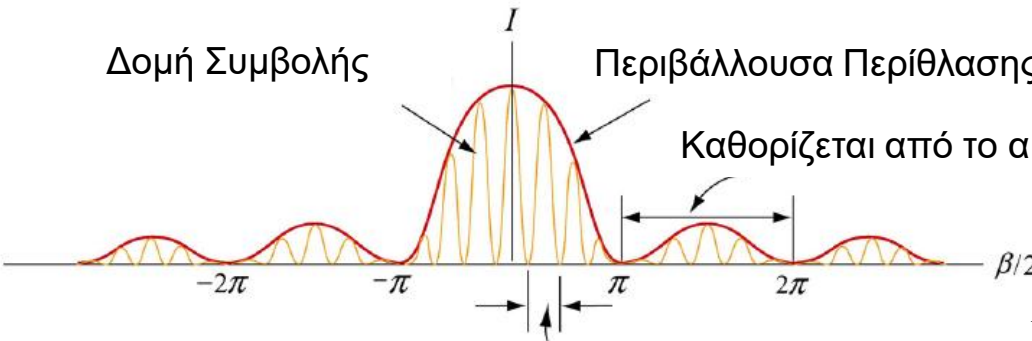
Φως συγκεκριμένου μήκους κύματος  $\lambda$ , άνοιγμα σχισμής  $a$  συγκρίσιμο με το  $\lambda$ , απόσταση μεταξύ σχισμών  $d$



Δομή Συμβολής

Περιβάλλουσα Περίθλασης

Καθορίζεται από το  $a$



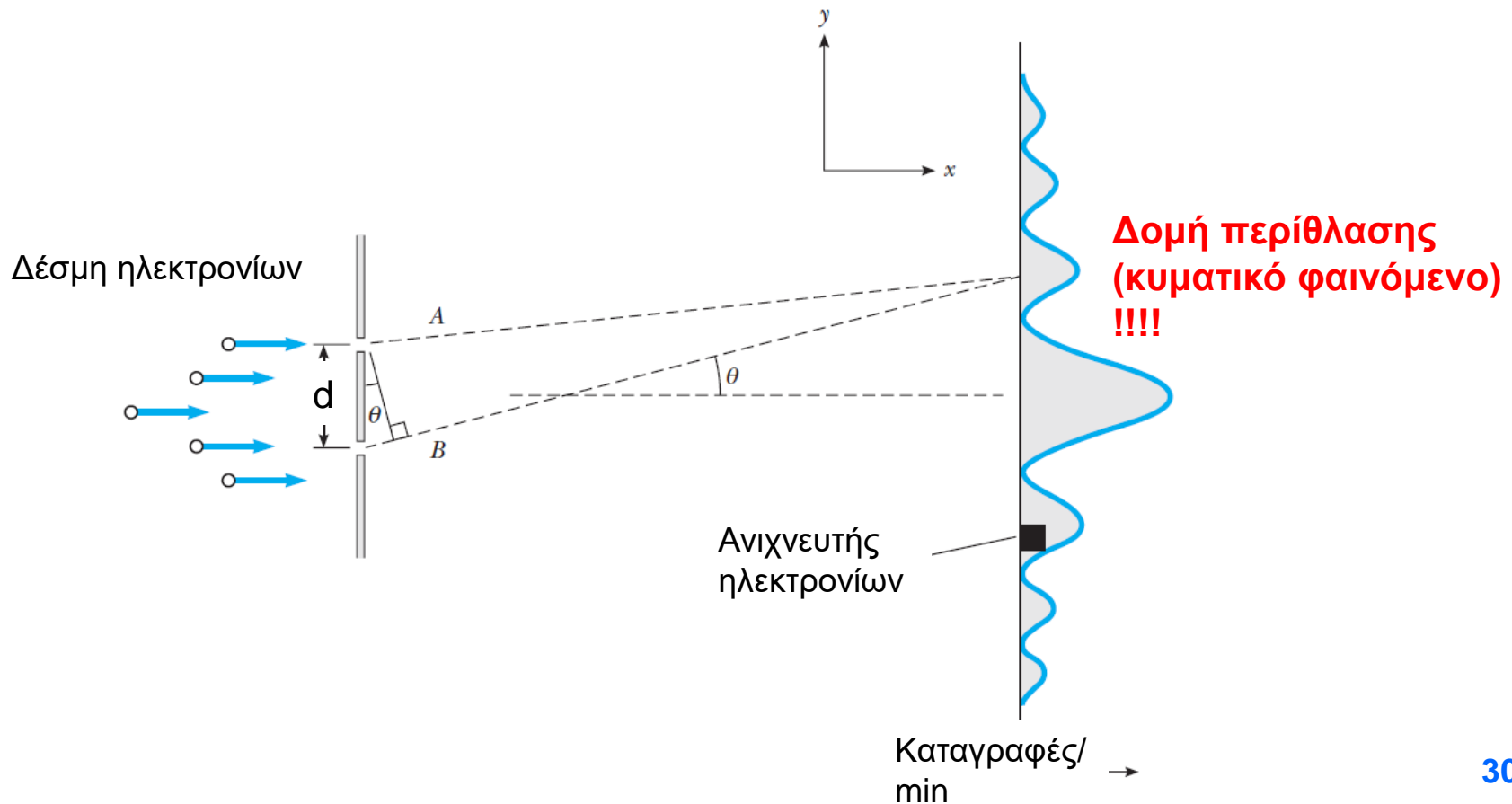
Καθορίζεται από το  $d$

Συμβολή δύο σχισμών

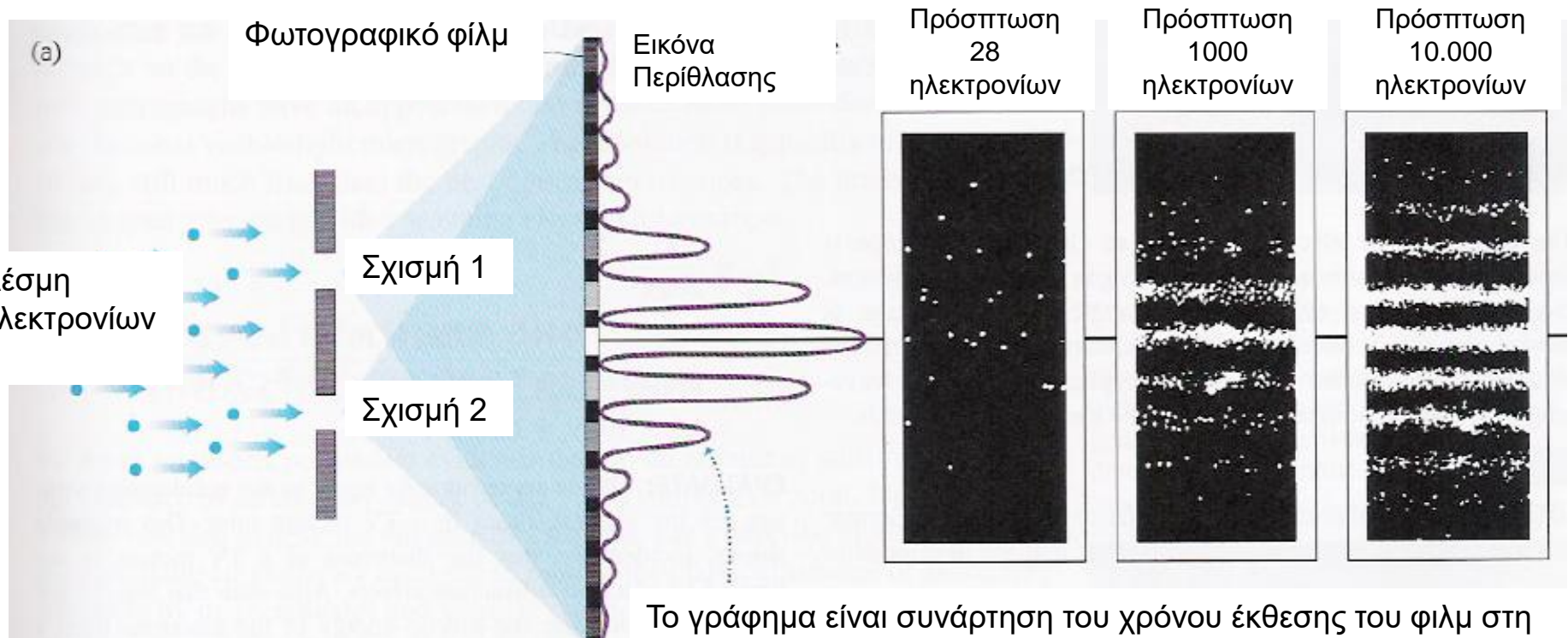
$$I = I_0 \cos\left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}\right) \left[ \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\frac{\beta}{2}} \right]^2$$

Ηλεκτρόνια συγκεκριμένης ενέργειας  
και μήκους κύματος de Broglie  $\lambda_e$   
Άνοιγμα σχισμών  $a$  συγκρίσιμο με το  $\lambda_e$   
Απόσταση μεταξύ σχισμών  $d$

1ος τρόπος εκτέλεσης: Με ανιχνευτή ηλεκτρονίων



2ος τρόπος εκτέλεσης: Με πρόσπτωση των ηλεκτρονίων σε φωτογραφικό φιλμ



Το γράφημα είναι συνάρτηση του χρόνου έκθεσης του φιλμ στη δέσμη, που με τη σειρά του εξαρτάται από το πλήθος των ηλεκτρονίων που προσπίπτουν

**Εικόνα περίθλασης (κυματικό φαινόμενο) !!!!**

## VI. Η ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΚΥΜΑΤΟΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΙ Η ΑΡΣΗ ΤΗΣ ΑΝΤΙΦΑΣΗΣ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ-ΚΥΜΑ (1926)

Max Born  
(1882 – 1970)



- ▶ Η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου δεν αντιπροσωπεύει ένα φυσικά παρατηρήσιμο κλασικό κύμα, αλλά ένα «κύμα πιθανότητας».
- ▶ Το τετράγωνο του μέτρου της κυματοσυνάρτησης δίνει την πυκνότητα πιθανότητας (πιθανότητα ανά μονάδα μήκους ή όγκου) να βρούμε το σωματίδιο σε μία περιοχή του χώρου.

$$P(x, t) = \Psi(x, t)\Psi^*(x, t) = |\Psi(x, t)|^2$$

$$P(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}, t)\Psi^*(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2$$

- ▶ Η ποσότητα

$$\wp = |\Psi(x, t)|^2 dx$$

είναι η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο που περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση  $\Psi$ , κατά τη χρονική στιγμή  $t$ , στο διάστημα  $x \rightarrow x+dx$

- ▶ Η ποσότητα

$$\wp = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dx dy dz$$

είναι η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο που περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση  $\Psi$ , κατά τη χρονική στιγμή  $t$ , στο διάστημα  $x \rightarrow x+dx$ ,  $y \rightarrow y+dy$ ,  $z \rightarrow z+dz$

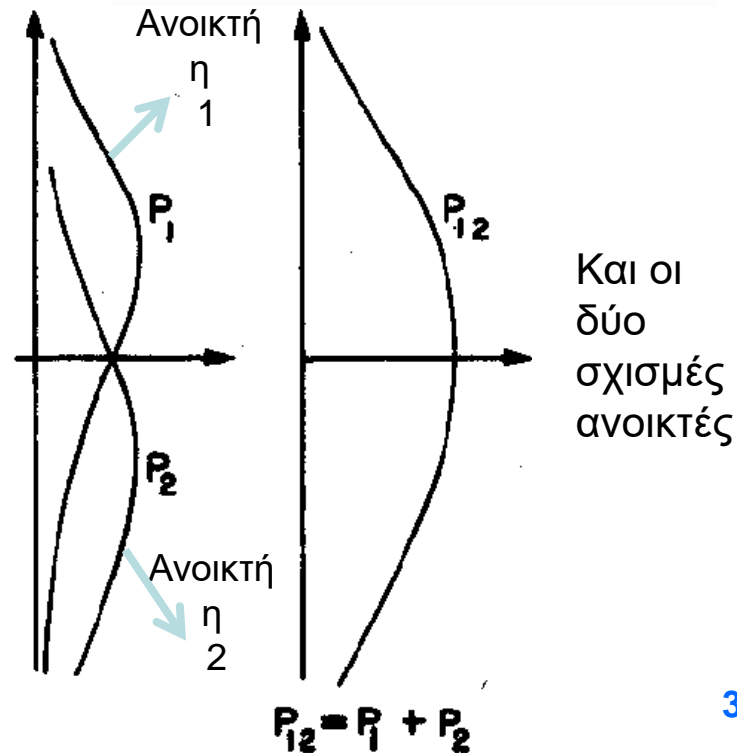
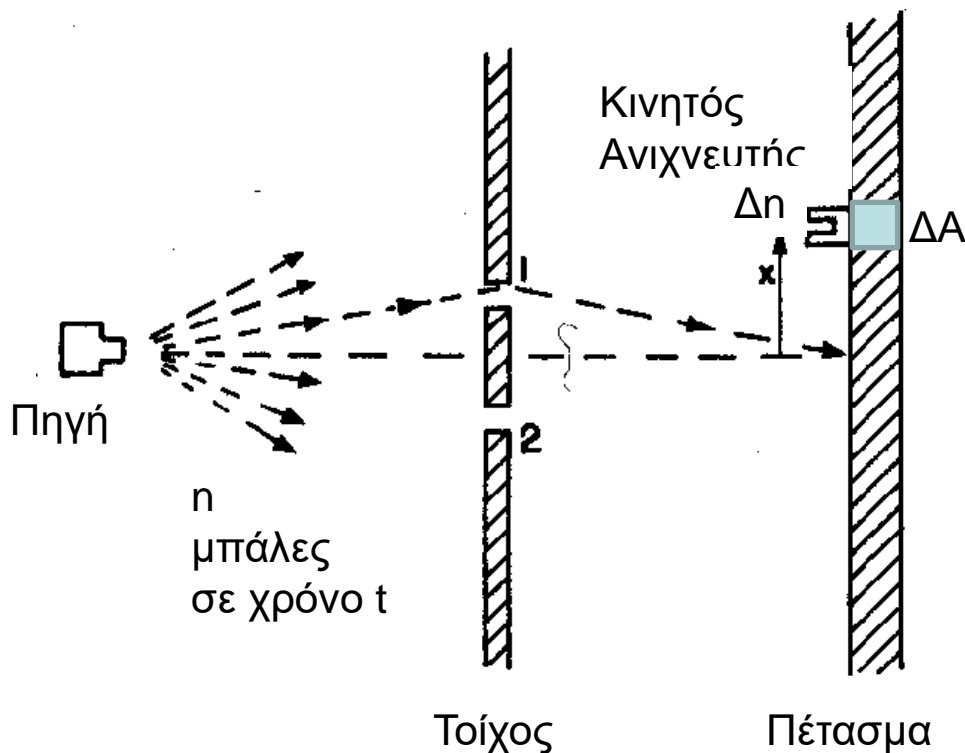
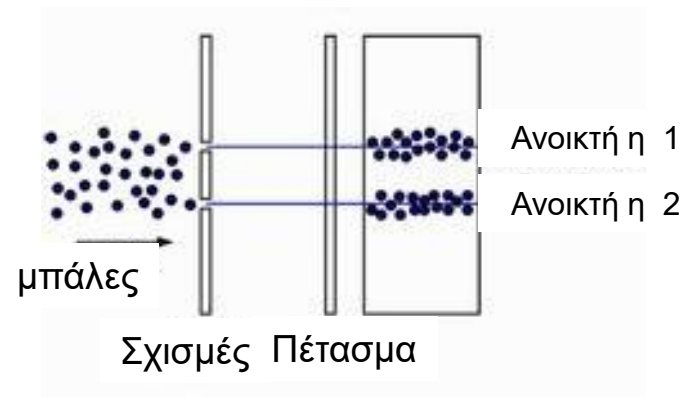


## Πειράματα διπλής σχισμής

(α) Κλασικά μακροσκοπικά σώματα (μικρές μπάλες):

$$P(x) = \frac{1}{n} \frac{\Delta n(x)}{\Delta A}$$

$$P_{12}(x) = P_1(x) + P_2(x)$$



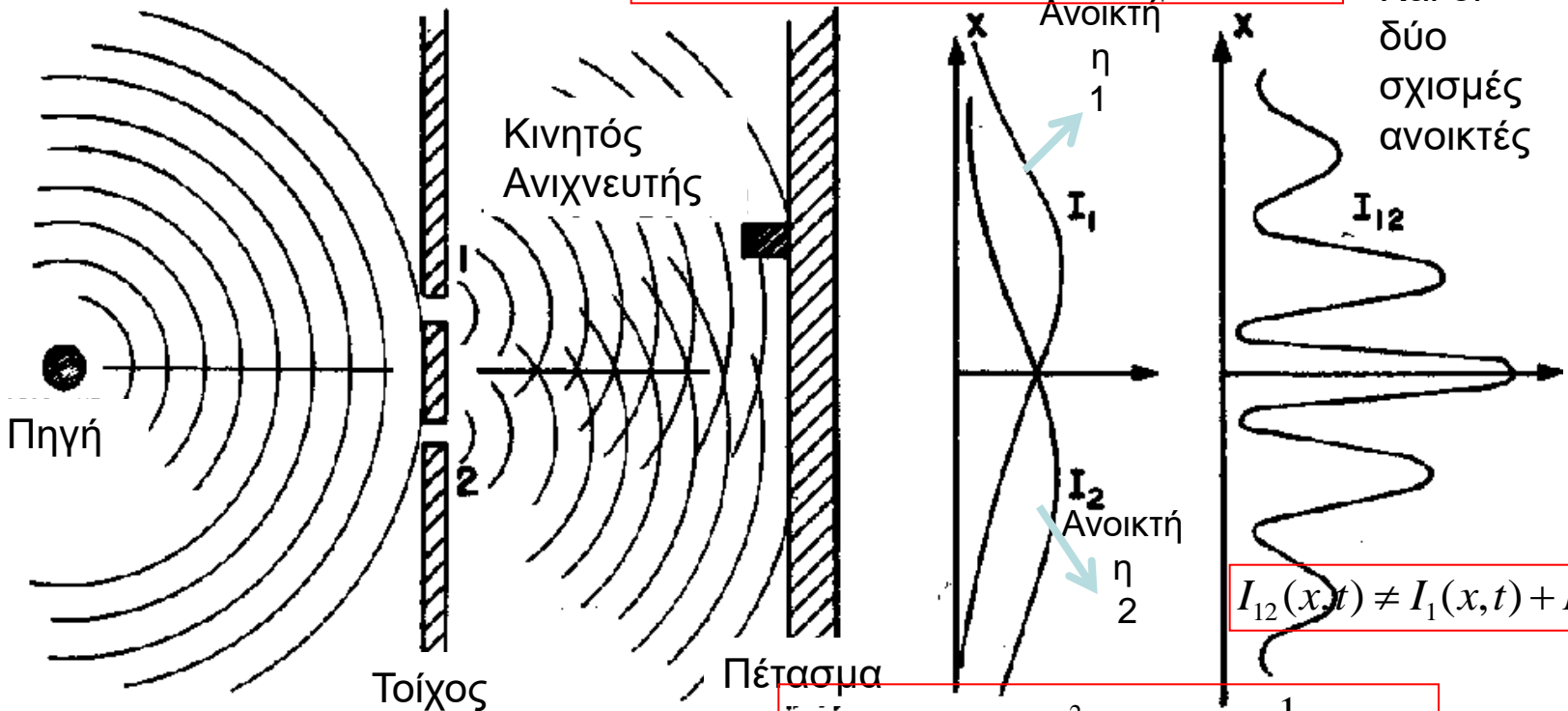


**(β) Φώς:** Παίρνουμε τη γνωστή εικόνα περίθλασης όταν και οι δύο σχισμές είναι ανοικτές. Διαφορετική εικόνα από ότι στην περίπτωση των κλασικών σφαιριδίων.

**Η ένταση είναι το μέγεθος –κλειδί.** (α) Εάν η σχισμή 1 είναι ανοικτή το μέγιστο της (στιγμαίας) έντασης  $I_1$  της Η/Μ ακτινοβολίας λαμβάνεται σχεδόν απέναντι από τη σχισμή 1. (β) Εάν η σχισμή 2 είναι ανοικτή το μέγιστο της έντασης  $I_2$  της Η/Μ ακτινοβολίας λαμβάνεται σχεδόν απέναντι από τη σχισμή 2.

$$I_1(x,t) = c\epsilon_0 |\vec{E}_1|^2 \Rightarrow \langle I_1 \rangle = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_{01}^2$$

Και οι δύο σχισμές ανοικτές



$$I_{12}(x,t) \neq I_1(x,t) + I_2(x,t)$$

$$I_2(x,t) = c\epsilon_0 |\vec{E}_2|^2 \Rightarrow \langle I_2 \rangle = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_{02}^2$$

(γ) Εάν είναι ανοικτές και οι δύο σχισμές σε κάθε σημείο του πέτασματος θα έχουμε συμβολή από τις δύο ήλεκτρικά πεδία.

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_1 &= \text{Re} \left\{ E_{01} e^{i\varphi_1} \right\} \\ \vec{E}_2 &= \text{Re} \left\{ E_{02} e^{i\varphi_2} \right\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{E}_{12} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \Rightarrow I_{12} = c\varepsilon_0 \left| \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \right|^2 \neq I_1 + I_2$$

$$\begin{aligned} \langle I_{12} \rangle &= c\varepsilon_0 \left\langle \left( \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \right)^2 \right\rangle = c\varepsilon_0 \left\langle \vec{E}_1^2 \right\rangle + c\varepsilon_0 \left\langle \vec{E}_2^2 \right\rangle + 2c\varepsilon_0 \left\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \right\rangle \\ &= \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + 2\sqrt{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle} \cos \delta(x) \end{aligned}$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ** (Εάν θεωρήσουμε ότι το φώς αποτελείται από φωτόνια): Έστω  $N$  το πλήθος των φωτονίων που προσπίπτει στο πέτασμα ανά μονάδα επιφανείας και χρόνου. Τότε η ένταση μίας δέσμης των φωτονίων γράφεται ως

$$I = Nhf$$

Στο πέτασμα παρατηρούμε κατανομή προσπιπτόντων φωτονίων. Η εικόνα περίθλασης στην περίπτωση των δύο ανοικτών σχισμών σημαίνει απλά ότι δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε από ποια σχισμή πέρασε ένα φωτόνιο που προσπίπτει στο πέτασμα.

- (Αρ. Ζδέτση «Εισαγωγή στη Σύγχρονη Φυσική», Σελ.109-117) Βλέπουμε τώρα πως η ένταση  $I$  είναι η ποσότητα - κλειδί που αποτελεί τον συνδετικό κρίκο ανάμεσα στις δύο διαφορετικές περιγραφές της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας επειδή έχει ακριβές νόημα και έκφραση τόσο στην σωματιδιακή (φωτόνια) όσο και στην κυματική (ηλεκτρομαγνητικά κύματα) περιγραφή. Συγκρίνοντας τις σχέσεις

$$I = c\varepsilon_0 |\vec{E}|^2 \quad I = Nhf$$

βλέπουμε πως το τετράγωνο του μέτρου του στιγμιαίου ηλεκτρικού πεδίου  $E$  σε κάποιο σημείο του πετάσματος είναι ανάλογο του πλήθους  $N$  των φωτονίων που φτάνουν στο πέτασμα ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφανείας. Αυτή η παρατήρηση φαίνεται να επιβεβαιώνει την υπόθεση ότι οι κυματικές ιδιότητες είναι συνυφασμένες με ένα μεγάλο πλήθος σωματιδίων, όπως αρχικά υποψιάστηκε ο Einstein.

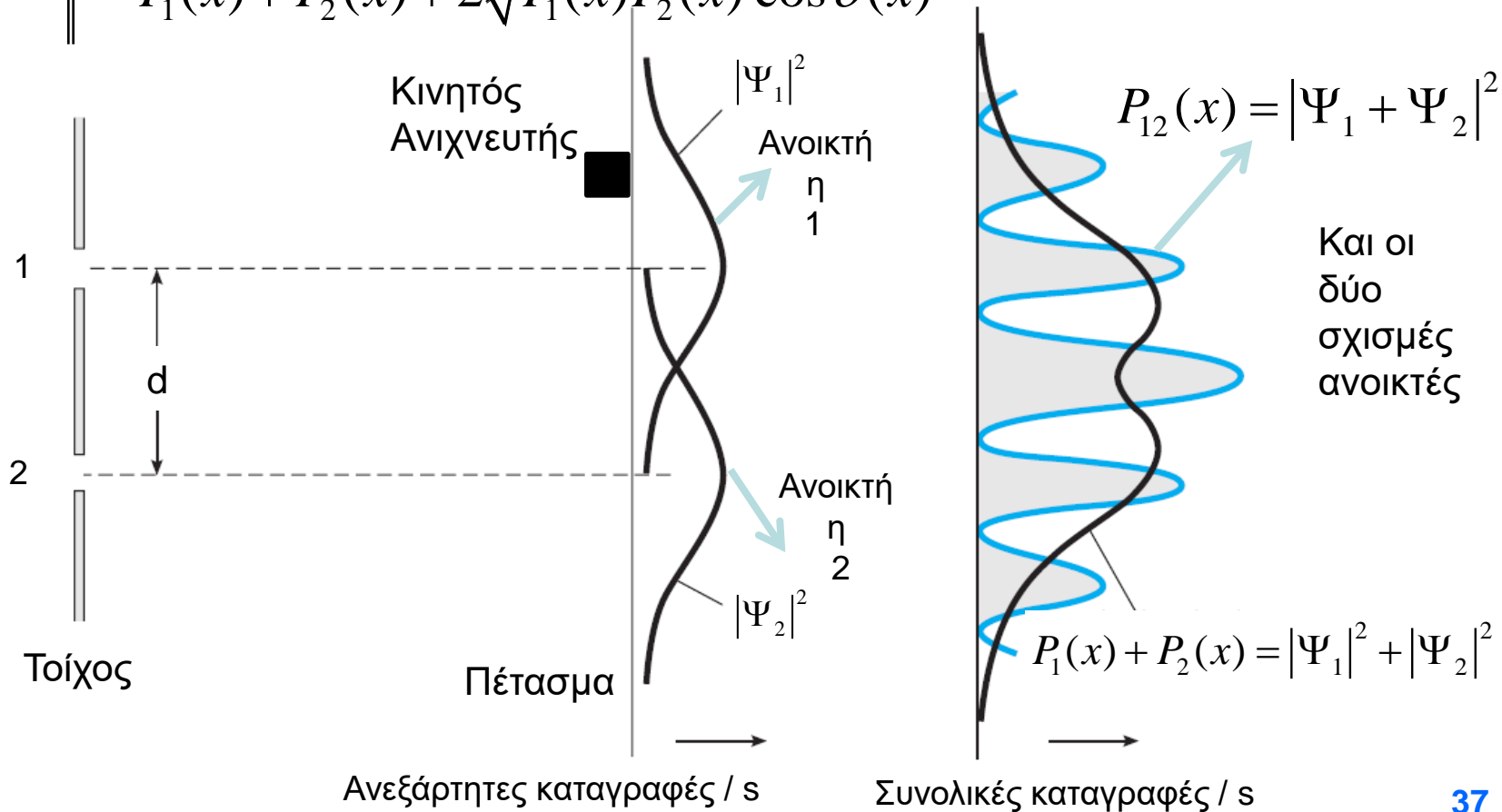
- (Αρ. Ζδέτση «Εισαγωγή στη Σύγχρονη Φυσική», Σελ.109-117) Από την κατασκευή της μια φωτογραφική πλάκα αποτελείται από λεπτότατους κόκκους φωτοευαίσθητου υλικού, οι οποίοι ενεργοποιούνται με την πρόσπτωση των φωτονίων. Στον συνολικό (συνήθως πάρα πολύ μικρό) χρόνο που το φιλμ εκτίθεται στην ακτινοβολία της δέσμης ενεργοποιούνται μόνο οι κόκκοι στους οποίους έχει επιδράσει τουλάχιστον ένα φωτόνιο. Όπου δεν έχει προσπέσει κανένα φωτόνιο θα υπάρχει μαύρη περιοχή στην τελική φωτογραφία. Έτσι η κατανομή της φωτεινότητας στην τελική φωτογραφία είναι ανάλογος του αριθμού των φωτονίων που προσπίπτουν σε κάθε σημείο της πλάκας μέσα στον (πολύ μικρό) χρόνο εκθέσεως του φιλμ.





(γ) Σωματίδια του μικρόκοσμου (ηλεκτρόνια): Από ποια σχισμή περνούν τα ηλεκτρόνια ;

$$P_1(x) = |\Psi_1|^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{12}(x) \neq P_1(x) + P_2(x) = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 \\ P_{12}(x) = |\Psi_1 + \Psi_2|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + 2|\Psi_1||\Psi_2|\cos\delta(x) = \\ P_2(x) = |\Psi_2|^2 \end{array} \right. \\ = P_1(x) + P_2(x) + 2\sqrt{P_1(x)P_2(x)}\cos\delta(x)$$



- ▶ Το παραπάνω αποτέλεσμα δεν συμβιβάζεται με την διαισθητικά προφανή λογική πρόταση «το ηλεκτρόνιο ή περνάει από τη σχισμή 1 ή από τη σχισμή 2» η οποία επιβάλλει

$$P_{12}(x) = P_1(x) + P_2(x) = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2$$

- ▶ Επομένως θα πρέπει να δεχθούμε:

(α) Ηλεκτρόνια ανιχνεύονται στο πέτασμα χωρίς να περάσουν από καμία σχισμή !!

Αυτό είναι πρακτικά αδύνατον λόγω του τοίχου....

(β) Ηλεκτρόνια ανιχνεύονται στο πέτασμα έχοντας περάσει το καθένα και από τις δύο σχισμές !!!

Αδύνατον γιατί προϋποθέτει:

(i) Ότι τα ηλεκτρόνια κόβονται στη μέση...

(ii) Ότι τα ηλεκτρόνια εκτελούν πολύπλοκη παλινδρομική κίνηση περνώντας αρχικά από τη σχισμή 1 και επιστρέφοντας πίσω περνούν μετά από τη σχισμή 2....

**Μάλλον το τελικό αποτέλεσμα υποδηλώνει ότι δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε από ποιά σχισμή περνάει το ηλεκτρόνιο με τον ανιχνευτή στο πέτασμα !!!!**

**Η εικόνα περίθλασης απεικονίζει την τυχαιότητα στη μελέτη του μικρόκοσμου.....**

**Τα σωμάτια είναι πάντα σωμάτια. Η πιθανότητα κατανομής τους στον χώρο, η οποία αναδεικνύεται σε κυρίαρχη ιδιότητα λόγω της αδυναμίας μας να καθορίσουμε με πλήρη ακρίβεια (χωρίς αβεβαιότητες) τις ιδιότητες τους, διέπεται από κυματική συμπεριφορά.**



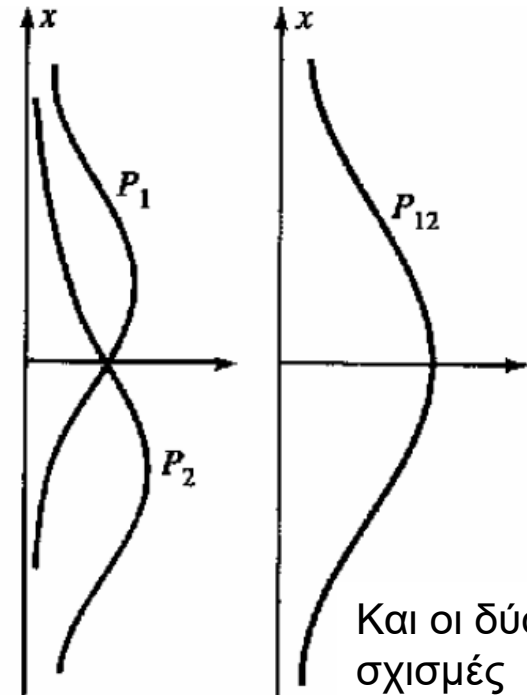
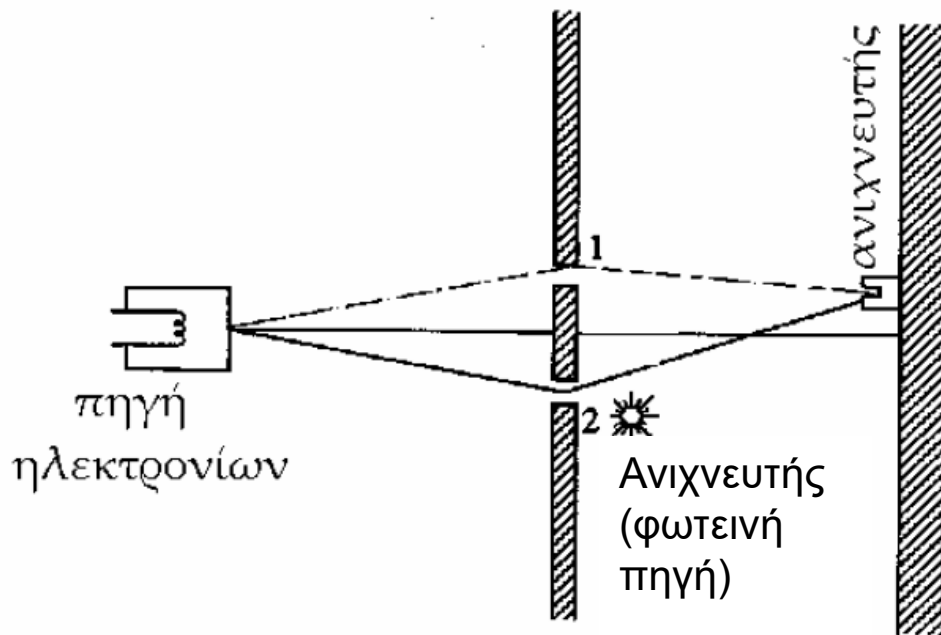
► Τροποποίηση του πειράματος: Τοποθέτηση ανιχνευτή ακριβώς μετά τις σχισμές .

Τώρα μπορούμε να καθορίσουμε το ποσοστό των ηλεκτρονίων τα οποία πέρασαν από την οπή 2 και, εφόσον γνωρίζουμε το (σταθερό) ολικό πλήθος των ηλεκτρονίων, των ηλεκτρονίων τα οποία πέρασαν από την οπή 1.

**Εάν προσδιορίσουμε πειραματικά από ποια σχισμή πέρασε κάθε ηλεκτρόνιο, τότε:**

$$P_{12}(x) = P_1(x) + P_2(x) = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2$$

**Η εικόνα περίθλασης εξαλείφεται.....  
Ίδιο αποτέλεσμα με τις μακροσκοπικές μπάλες....**



Και οι δύο  
σχισμές  
ανοικτές

Συμπέρασμα 1: Η προσπάθεια μέτρησης επηρέασε τα ηλεκτρόνια αλλάζοντας τη συμπεριφορά τους.

Συμπέρασμα 2 (γενικό συμπέρασμα στην Κβαντομηχανική): Εάν ένα αποτέλεσμα μπορεί να πραγματοποιηθεί κατά  $N$  τρόπους στον καθένα από τους οποίους αντιστοιχεί μία κυματοσυνάρτηση  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N$  τότε:

(α) Εάν προσδιορίσουμε πειραματικά με ποιόν από τους τρόπους πραγματοποιείται το αποτέλεσμα, η πιθανότητα να προκύψει το αποτέλεσμα αυτό είναι ανάλογη της ποσότητας

$$\wp \sim |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + \dots + |\Psi_N|^2$$

και δεν εμφανίζονται φαινόμενα συμβολής/περίθλασης.

(α) Εάν αυτός ο πειραματικός προσδιορισμός δεν γίνεται τότε η πιθανότητα να προκύψει το αποτέλεσμα είναι ανάλογη της ποσότητας

$$\wp \sim |\Psi_1 + \Psi_2 + \dots + \Psi_N|^2$$

και εμφανίζονται φαινόμενα συμβολής/περίθλασης.



## VII. Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ (1927)

Werner Heisenberg  
(1901 –1976)

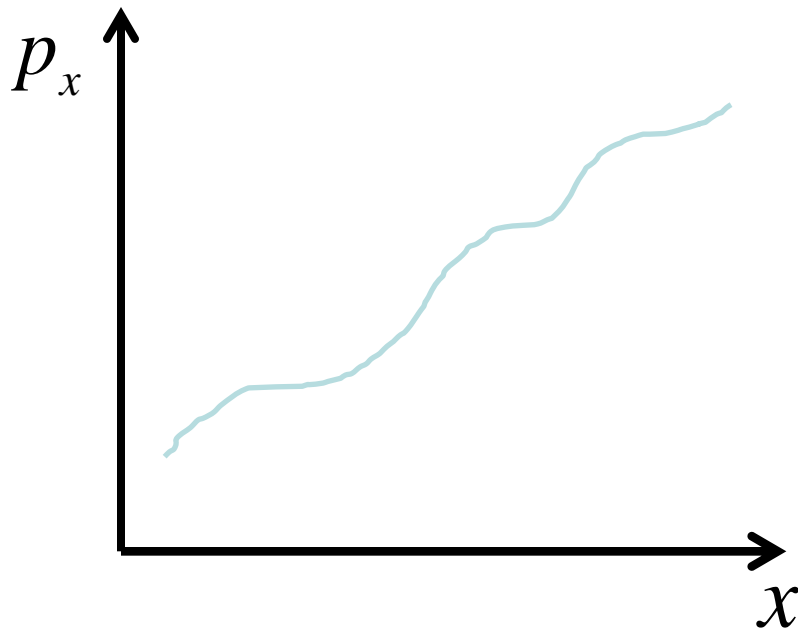


- ▶ Είναι αδύνατον να μετρήσουμε ταυτόχρονα και με απόλυτη ακρίβεια την ορμή και τη θέση ενός σωματιδίου.
- ▶ Το γινόμενο της αβεβαιότητας στη μέτρηση της θέσης επί την αβεβαιότητα στη μέτρηση της ορμής δεν μπορεί να είναι μικρότερο από μια συγκεκριμένη ποσότητα. Συγκεκριμένα:

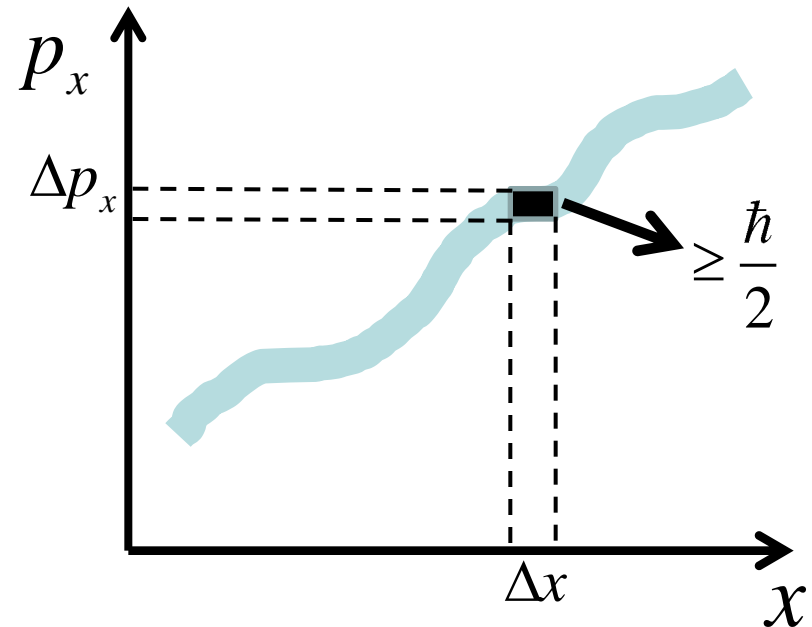
$$\begin{aligned}(\Delta p_x)(\Delta x) &\geq \frac{\hbar}{2} \\ (\Delta p_y)(\Delta y) &\geq \frac{\hbar}{2} \\ (\Delta p_z)(\Delta z) &\geq \frac{\hbar}{2}\end{aligned}$$

Αυτό υποδηλώνει ότι εάν προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε με μεγάλη ακρίβεια την ορμή ή την ενέργεια ενός σωματιδίου (ελαχιστοποιώντας το  $\Delta p$ ), θα αυξηθεί η απροσδιοριστία στη μέτρηση της θέσης του ( $\Delta x$ ) και αντιστρόφως.

**Ένα σωματίδιο αντιστέκεται στον εντοπισμό του αυξάνοντας την ενέργειά του !!!!**



Τροχιά κλασικού σωματιδίου  
στον χώρο των φάσεων



Τροχιά κβαντικού σωματιδίου  
στον χώρο των φάσεων

**Παράδειγμα 26: (Λύθηκε και στο μάθημα)** Μία μέτρηση εκτιμά τη θέση ενός μη σχετικιστικού ελεύθερου πρωτονίου με ακρίβεια  $\pm 10^{-11} \text{m}$ . Να υπολογιστεί η αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της θέσης του 1sec αργότερα.

**Λύση:** Έστω  $\Delta x_0$  η αβεβαιότητα θέσης του πρωτονίου για  $t=0$ . Με βάση την αρχή της αβεβαιότητας θα έχουμε ότι:

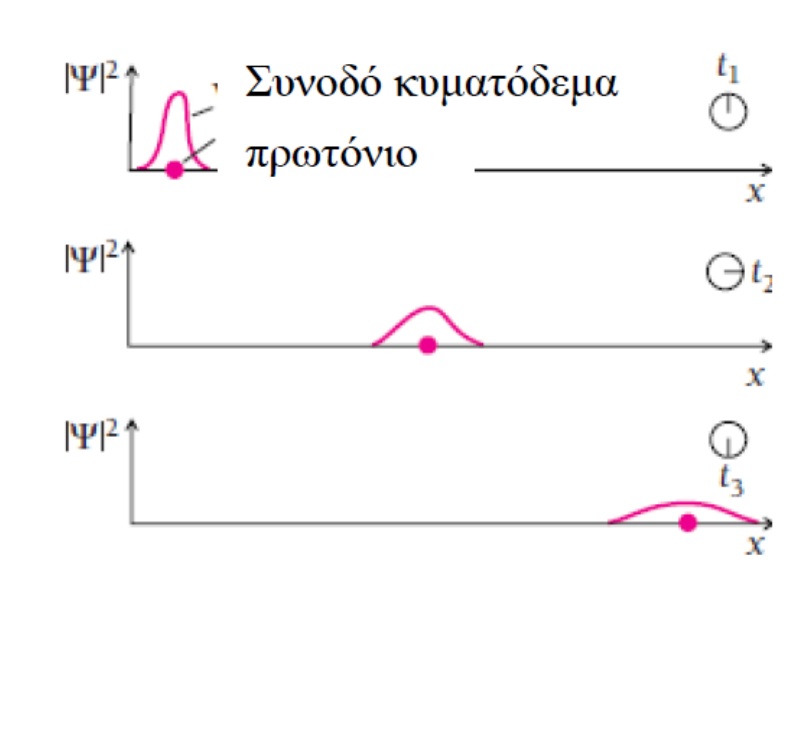
$$(\Delta p)(\Delta x_0) \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow (\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2(\Delta x_0)}$$

Η αβεβαιότητα της ταχύτητας του πρωτονίου θα είναι:

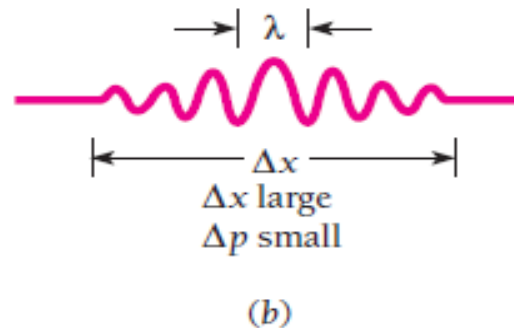
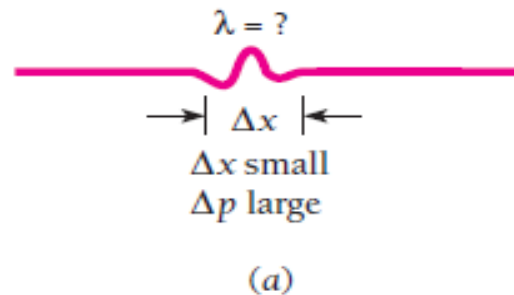
$$(\Delta v) = \frac{(\Delta p)}{m_p} \Rightarrow (\Delta v) \geq \frac{\hbar}{2m_p(\Delta x_0)}$$

Μετά από χρόνο  $t$  το πρωτόνιο καλύπτει απόσταση  $x$  που προσδιορίζεται με αβεβαιότητα:

$$(\Delta x) = t(\Delta v) \geq \frac{\hbar t}{2m_p(\Delta x_0)} = 3,15 \times 10^3 \text{ m} !!!!$$



Όσο περισσότερα ξέρουμε για τη θέση του την χρονική στιγμή  $t=0$ , τόσο λιγότερα ξέρουμε για τη θέση του λίγο αργότερα. Η αρχική αβεβαιότητα στην ορμή του είναι μεγάλη και αυτό μεταφέρεται στο χρόνο κάνοντας αδύνατη την εύρεση της θέσης του σωματιδίου. Αυτό αντιπροσωπεύει και το «άπλωμα» του κυματοδέματος (πιθανότητας) που συνοδεύει το σωματίδιο.



**Παράδειγμα 27:** (Λύθηκε και στο μάθημα) Να υπολογιστεί η ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης ενός σωματιδίου μάζας  $m$  μέσα σε ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικής ενέργειας μήκους  $L$  με βάση την αρχή της αβεβαιότητας.

**Λύση:** Η αρχή της αβεβαιότητας επιβάλλει:

$$(\Delta p_x)(\Delta x) \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow (\Delta p_x)(\Delta x) \geq \frac{h}{4\pi}$$

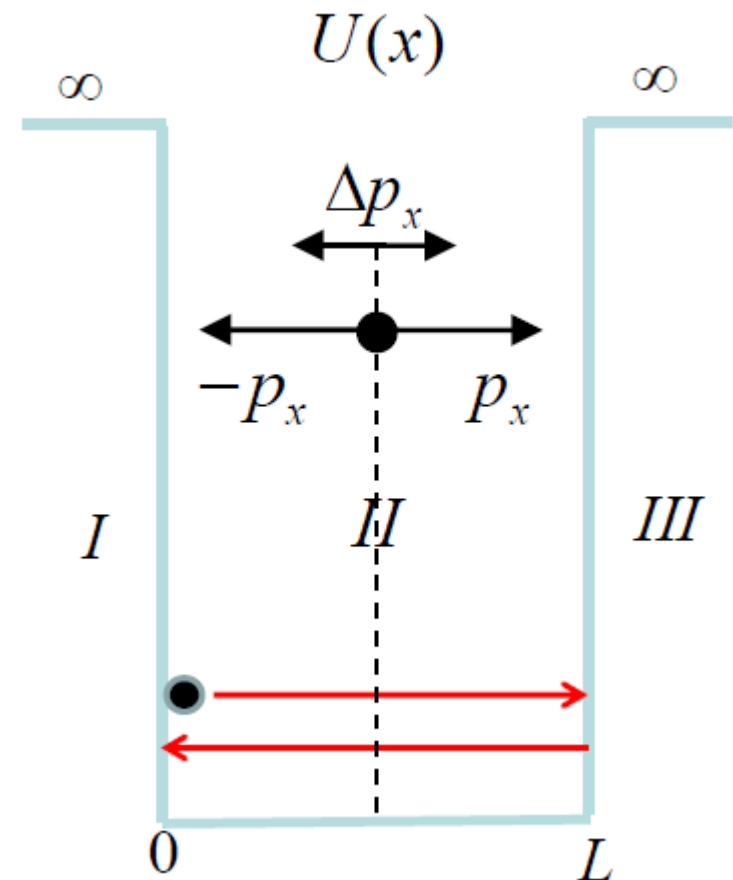
Εδώ έχουμε ότι:  $(\Delta x) = L$

Θεωρώντας ότι το διάστημα αβεβαιότητας της ορμής είναι πάντα συμμετρικό σε σχέση με την τιμή της μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$|p_x| \geq \frac{1}{2}(\Delta p_x) \Rightarrow |p_x| \geq \frac{1}{2} \frac{h}{4\pi(\Delta x)} \Rightarrow |p_x| \geq \frac{h}{8\pi L}$$

Άρα:

$$E_{\min} = \frac{(p_x^2)_{\min}}{2m} = \frac{\left(\frac{h}{8\pi L}\right)^2}{2m} = \frac{h^2}{128\pi^2 mL^2}$$



Για την απλότητα των συλλογισμών μας η απόκλιση από το γνωστό αποτέλεσμα:

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2}$$

δεν μπορεί να θεωρηθεί σημαντική.

Το συμπέρασμα είναι ότι ένα εντοπισμένο δέσμιο σωματίδιο δεν μπορεί να έχει θεμελιώδη κατάσταση μηδενικής ενέργειας, όπως προέβλεπαν οι κανόνες Wilson-Sommerfeld. Παράλληλα όσο προσπαθούμε να το εντοπίσουμε, αυτό αυξάνει την αβεβαιότητα προσδιορισμού της ενέργειάς του.

---

**Παράδειγμα 28: (Λύθηκε και στο μάθημα)** Να εκτιμηθεί η ενέργεια ενός πρωτονίου του ατομικού πυρήνα (α) με βάση την αρχή του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού και (β) με βάση την αρχή της αβεβαιότητας.

**Λύση:** (α) Θεωρούμε ως σωματίδιο-κύμα περιορισμένο στον πυρήνα το πρωτόνιο θα έχει μήκος κύματος de Broglie:

$$\lambda_p \approx 2R = 10^{-14} \text{ m}$$

Εδώ έχουμε ότι:

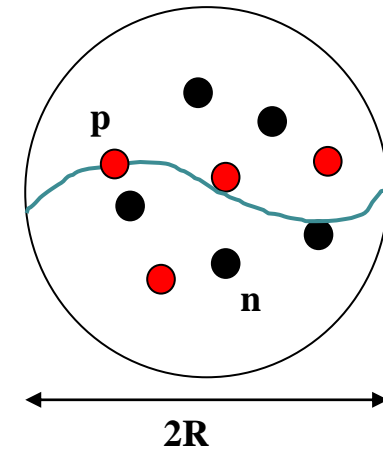
$$p_p = \frac{h}{\lambda_p}$$

$$K_p = \frac{p_p^2}{2m_p} = \frac{h^2}{2m_p \lambda_p^2} = \frac{(6,62 \times 10^{-34} \text{ Js})^2}{2 \times 1836 \times 9,1 \times 10^{-31} \text{ Kgr} \times (10^{-14})^2 \text{ m}^2} =$$

$$= 1,31 \times 10^{-12} \text{ J} = 0,81 \times 10^7 \text{ eV} = 8,1 \text{ MeV}$$

**(β) Παρατήρηση:** Όταν ζητούνται εκτιμήσεις με βάση την αρχή της αβεβαιότητας μπορούμε να θεωρούμε ότι:

$$(\Delta p_x)(\Delta x) \approx \hbar$$



Τα πρωτόνια είναι περιορισμένα στον πυρήνα ακτίνας  $R$ . Επομένως:

$$(\Delta x) = 2R$$

$$(\Delta p_x)(\Delta x) \approx \hbar \Rightarrow (\Delta p_x) \approx \frac{\hbar}{2R}$$

$$|p_x| > (\Delta p_x) \Rightarrow |p_x| > \frac{\hbar}{2R} \Rightarrow |p_x| > \frac{h}{4\pi R}$$

$$E_p = \frac{|p_x|^2}{2m_p} > \frac{h^2}{32\pi^2 m_p R^2} \approx 0,05 \text{ MeV}$$

**Η ενέργεια των σωματιδίων του πυρήνα είναι τεράστια ακριβώς γιατί είναι εντοπισμένα σε ένα πολύ στενό εύρος. Καταλαβαίνει κανείς την ισχύ της ατομικής βόμβας....**

---



**Παράδειγμα 29: (Λύθηκε και στο μάθημα)** Να εκτιμηθεί η ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου με βάση την αρχή της αβεβαιότητας. Υποθέστε ότι δεν γνωρίζουμε τη θεωρία του Bohr.

**Λύση:** Το ηλεκτρόνιο στη θεμελιώδη κατάστασή του περιστρέφεται γύρω από τον πυρήνα σε μία απόσταση  $r$ . Επομένως:

$$(\Delta r) = r \quad \text{και} \quad (\Delta p_e)(\Delta r) \approx \hbar \Rightarrow (\Delta p_e) \approx \frac{\hbar}{r}$$

Επίσης:

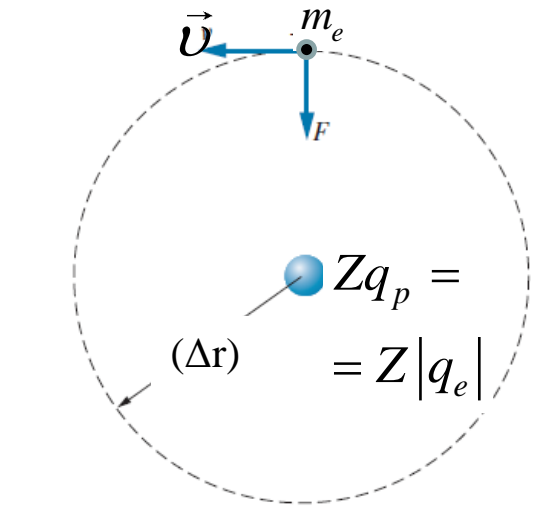
$$p_e > (\Delta p_e) \Rightarrow p_e > \frac{\hbar}{r}$$

Επομένως:

$$E = \frac{p_e^2}{2m_e} - \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r} > \frac{\hbar^2}{2m_e r^2} - \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Ελάχιστη ενέργεια έχουμε για ακτίνα  $r$  τέτοια ώστε:

$$\frac{dE}{dr} = 0 \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{m_e r^3} + \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0 \Rightarrow r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e q_e^2} = \alpha_0$$



Παίρνουμε το ακριβές αποτέλεσμα της θεωρίας του Bohr !!

Επομένως:

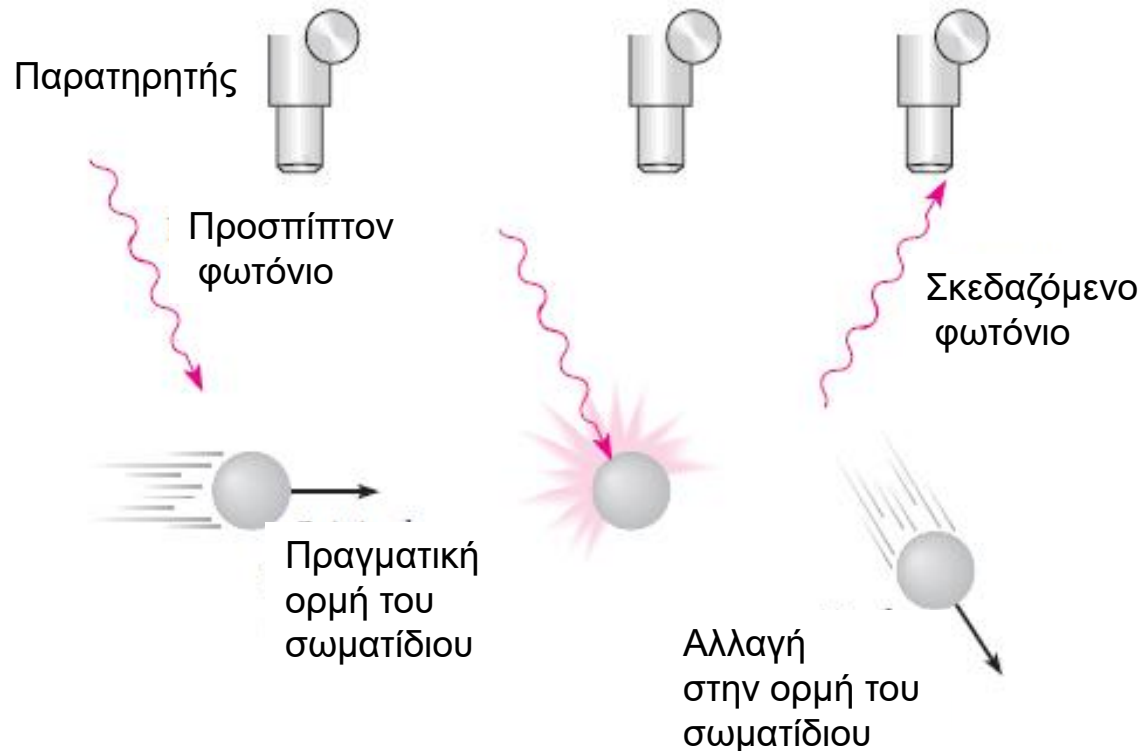
$$E_{\min} = E(r = \alpha_0) = -\frac{m_e q_e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2}$$

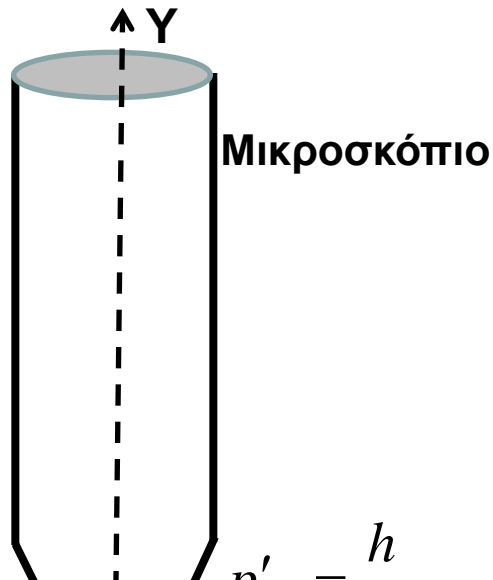
**Παίρνουμε το ακριβές αποτέλεσμα της θεωρίας του Bohr !!**

---

► Η αρχή της αβεβαιότητας εκφράζει ουσιαστικά την επίδραση της μετρητικής διαδικασίας στην κατάσταση ενός μικροσκοπικού σωματιδίου (κάτι που δεν συμβαίνει στον Μακρόκοσμο).

**Ιδεατό πείραμα του Bohr:** Έστω ότι επιθυμούμε να προσδιορίσουμε τη θέση ενός σωματιδίου με ένα υποθετικό μικροσκόπιο κατάλληλης διακριτικής ικανότητας. Για να το δούμε, όμως, πρέπει να το φωτίσουμε. Το προσπίπτον φωτόνιο, όμως, θα συγκρουστεί με το σωματίο αλλάζοντας την ορμή του. Έτσι προσδιορίζοντας με σχετική ακρίβεια τη θέση του, αυξάνεται η αβεβαιότητα στη μέτρηση της ορμής του.

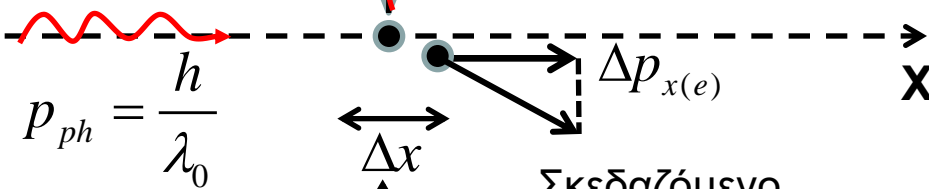




$$p'_{ph} = \frac{h}{\lambda}$$

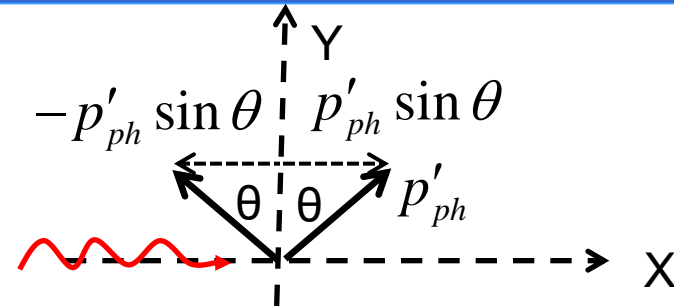
Προσπίπτον  
φωτόνιο

Σκεδαζόμενο  
φωτόνιο



Σκεδαζόμενο  
ηλεκτρόνιο

Αρχικά ακίνητο  
ηλεκτρόνιο



Το σκεδαζόμενο φωτόνιο διέρχεται από τον φακό και ανιχνεύεται όταν η γωνία σκέδασής του κυμαίνεται μεταξύ  $\pm\theta$ . Τα αντίστοιχα όρια ορμής του στον άξονα Χ κυμαίνονται σε εύρος:

$$\Delta p'_{x(ph)} = 2 p'_{ph} \sin \theta = 2 \frac{h}{\lambda} \sin \theta$$

Αυτή η ορμή μεταβιβάζεται στο ηλεκτρόνιο για το οποίο θα έχουμε:

$$\Delta p_{x(e)} = 2 \frac{h}{\lambda} \sin \theta$$

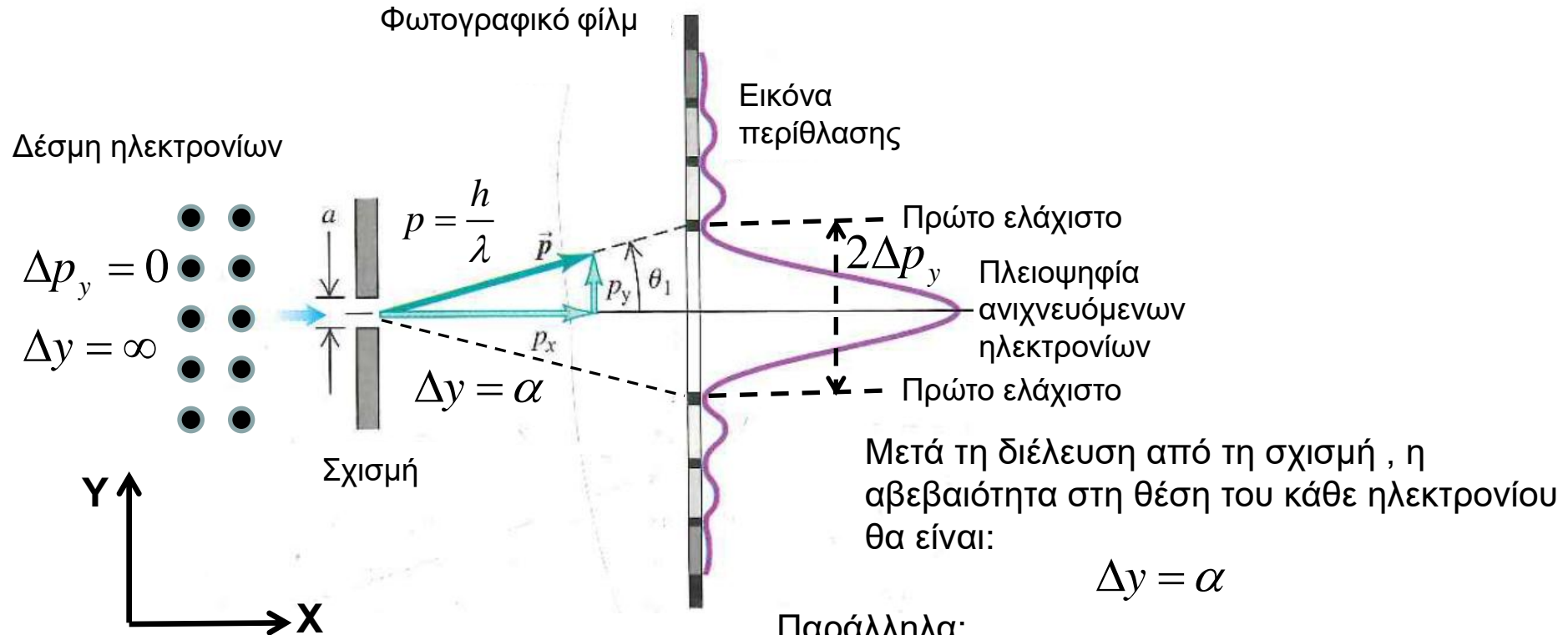
Η διακριτική ικανότητα του μικροσκοπίου είναι:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\sin \theta}$$

Για το ηλεκτρόνιο:  $(\Delta p_x)_e (\Delta x)_e = 2h$  52



**Το πείραμα περίθλασης ηλεκτρονίων από απλή σχισμή και η αρχή της αβεβαιότητας:**



$$\Delta p_y = 2 p \sin \theta_1 = 2 \frac{h}{\lambda} \sin \theta_1$$

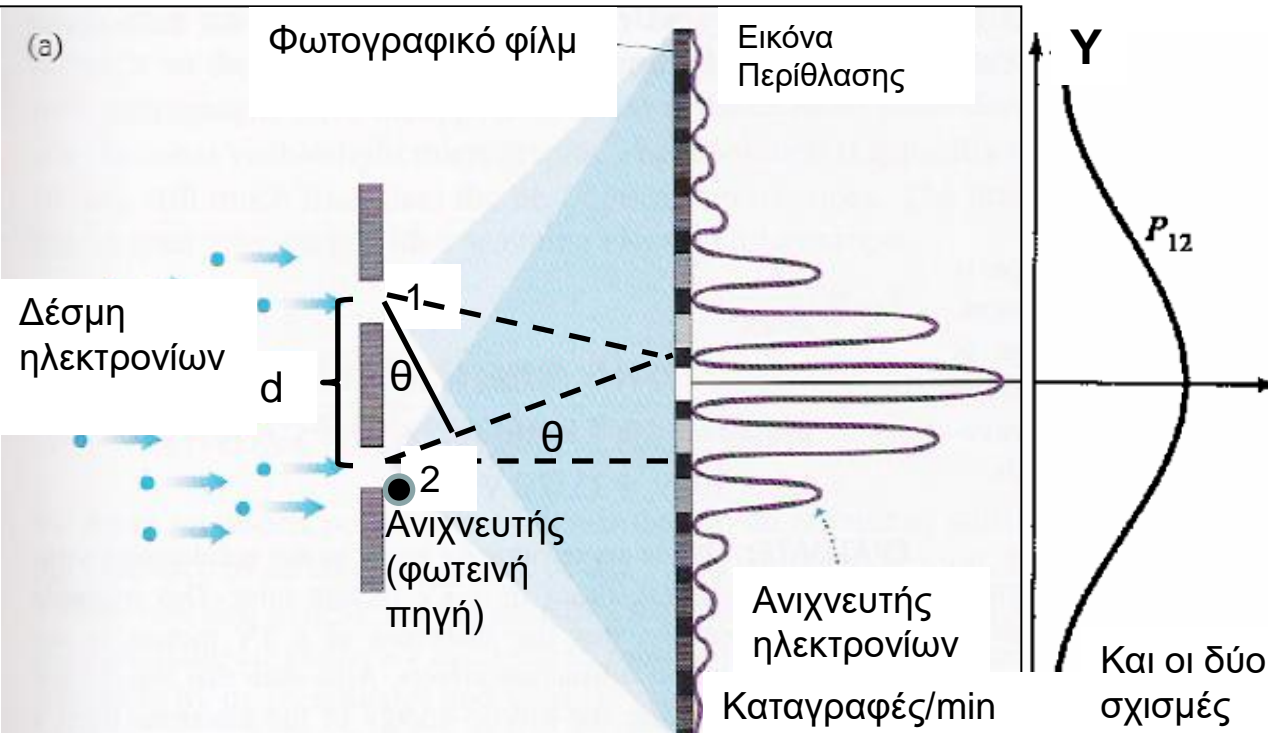
Όμως:  $\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{\alpha}$

Άρα:  $\Delta p_y = 2 \frac{h}{\lambda} \frac{\lambda}{\alpha} = 2 \frac{h}{\alpha}$

Τελικά:  $(\Delta p_y)(\Delta y) = 2 \frac{h}{\alpha} \alpha = 2h$



**Επάνοδος στο τροποποιημένο πείραμα της διπλής σχισμής για ηλεκτρόνια:**



Όταν προσδιορίζουμε με μεγάλη ακρίβεια τη θέση ενός ηλεκτρονίου μετά τη διέλευσή του από τη σχισμή, αυξάνεται η αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της ορμής του. Αυτό οδηγεί στην καταστροφή της εικόνας περίθλασης.

$$\Delta y \leq \frac{d}{2}$$

$$p_y = p \sin \theta \approx p\theta$$

$$\Rightarrow \Delta p_y \approx p\Delta\theta$$

Προσπαθώντας να ελαττώσουμε την αβεβαιότητα στη θέση του ηλεκτρονίου (αμέσως μετά την διέλευσή του από μια σχισμή), ώστε να προσδιορίσουμε από ποια σχισμή πέρασε, αυξάνουμε τόσο πολύ την αβεβαιότητα στη γωνία  $\theta$ , ώστε αυτή η αβεβαιότητα να γίνεται συγκρίσιμη ή μεγαλύτερη από τις χαρακτηριστικές γωνίες  $\theta_{\min}$  και  $\theta_{\max}$ , οι οποίες αντιστοιχούν στην θέση του πρώτου ελάχιστου και του πρώτου (μετά το κεντρικό) μεγίστου της εικόνας συμβολής. Προφανώς μια τέτοια κατάσταση (όπου η αβεβαιότητα στην γωνιακή θέση των μεγίστων και ελαχίστων είναι μεγαλύτερη από τις ίδιες τις τιμές των χαρακτηριστικών γωνιακών θέσεων) αντιστοιχεί σε απώλεια της εικόνας συμβολής.

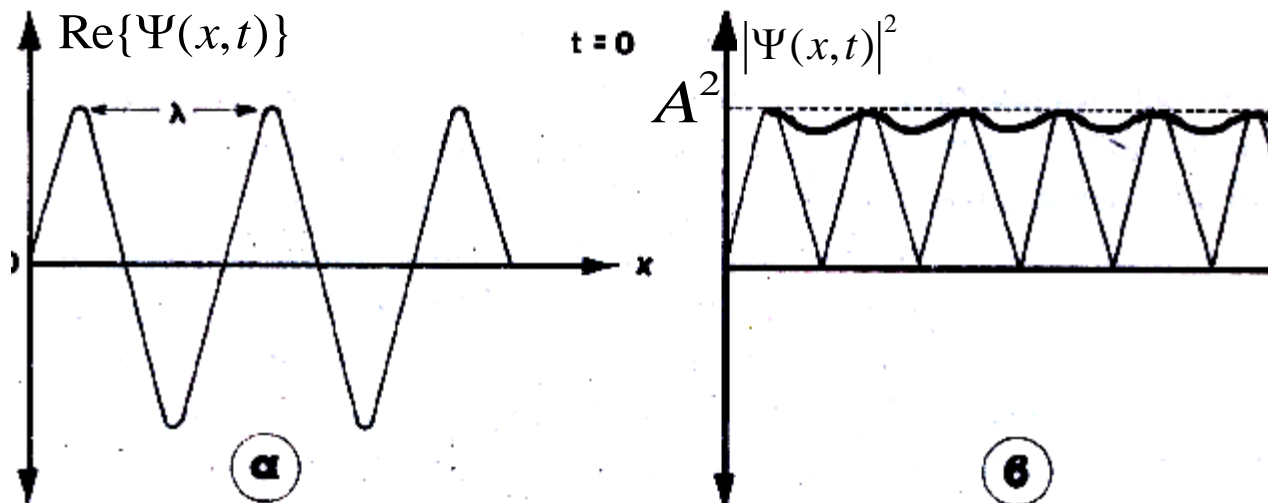
### Το ελεύθερο σωματίο και η αρχή της αβεβαιότητας:

- ▶ Στα πλαίσια της υπόθεσης de Broglie , έχουμε πεί ότι αποκλείεται ένα ελεύθερο σωματίο να αναπαριστάται από ένα επίπεδο υλικό (μηχανικό) κύμα.
- ▶ Στα πλαίσια της στατιστικής ερμηνείας της κυματοσυνάρτησης σε συνδυασμό με την αρχή της αβεβαιότητας ένα επίπεδο κύμα πιθανότητας με κυματοσυνάρτηση  $\Psi$  μπορεί να αναπαριστά ένα ελεύθερο σωματίο καθορισμένης ενέργειας και ορμής , αλλά πρακτικά άπειρης αβεβαιότητας ως προς τον προσδιορισμό της θέσης του (μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε στο χώρο). Εδώ θα έχουμε ότι:

$$\left. \begin{aligned} \Psi(x,t) &= A e^{i[kx - \omega t]} \\ E &= \hbar\omega \\ p &= \hbar k \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Psi(x,t) = A e^{\frac{i}{\hbar}[px - Et]}$$

$$\Psi(x,t)\Psi^*(x,t) = |\Psi(x,t)|^2 = A^2$$

Σταθερή πυκνότητα πιθανότητας. Το σωματίδιο έχει την ίδια πιθανότητα να βρεθεί οπουδήποτε στη διεύθυνση  $x$  (άπειρη αβεβαιότητα θέσης).

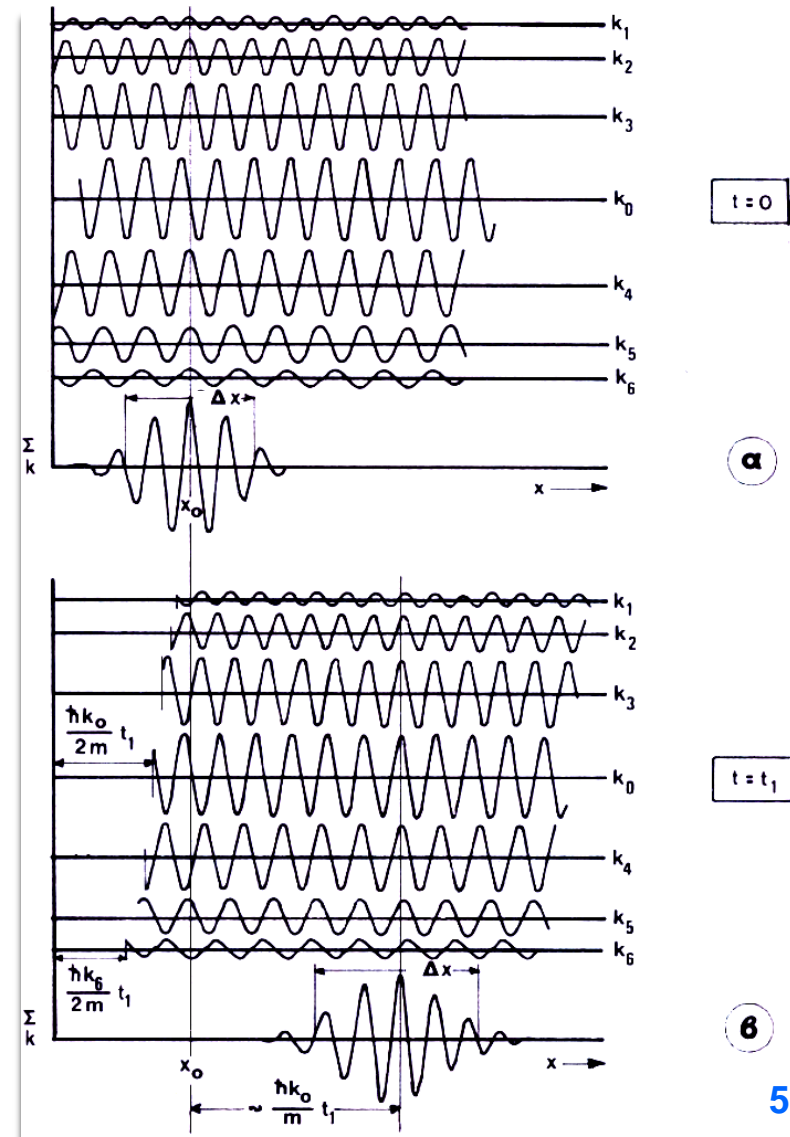




► Ένα ελεύθερο σωματίο με σχετικά μικρή αβεβαιότητα ως προς τη θέση του  $\Delta x$  αναπαριστάται με ένα κυματόδεμα κυματοσυνάρτησης:

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} dk$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε μεγάλη αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της ορμής του και επομένως της ενέργειάς του. Κατά συνέπεια η αναπαράσταση με κυματόδεμα είναι η απόλυτα ενδεδειγμένη, καθώς ένα κυματόδεμα συντίθεται παρακτικά από άπειρα επίπεδα κύματα πολύ κοντινών κυματαριθμών (και κατά συνέπεια ενεργειών), γεγονός που σημαίνει μεγάλη αβεβαιότητα στον σαφή προσδιορισμό της ενέργειάς του.





- **Σχέση αβεβαιότητας χρόνου -ενέργειας:** Η αβεβαιότητα στη μέτρηση της ενέργειας  $\Delta E$  ενός κβαντικού συστήματος που πραγματοποιείται σε χρόνο  $\Delta t$  είναι τέτοια ώστε:

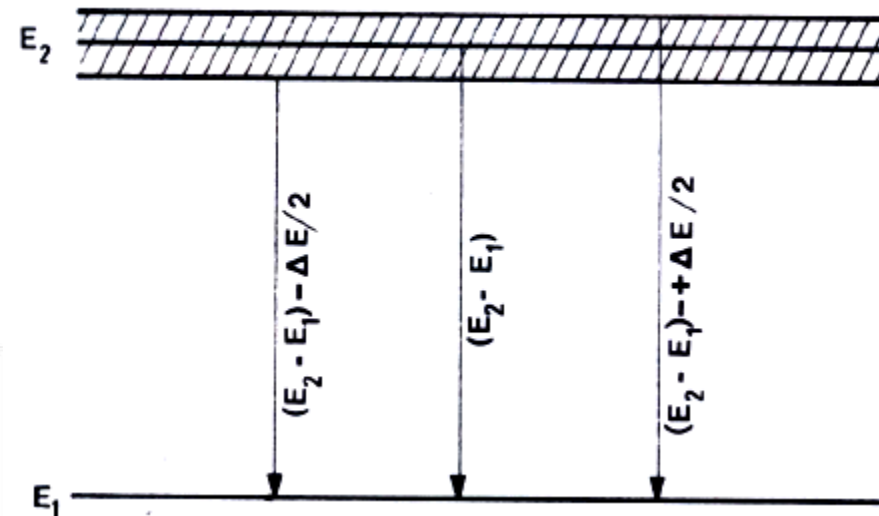
$$(\Delta E)(\Delta t) \geq \frac{\hbar}{2}$$

Όσο πιο αργά μεταβάλλεται ένα κβαντικό φυσικό σύστημα, τόσο ακριβέστερα προσδιορίζεται η ενέργειά του. Αντιστρόφως, όσο πιο γρήγορος είναι ο ρυθμός μεταβολής του, τόσο μεγαλύτερη είναι η αβεβαιότητα στη μέτρηση της ενέργειάς του.

Χαρακτηριστική εφαρμογή αποτελούν τα φάσματα εκπομπής των ατόμων, οι φασματικές γραμμές των οποίων εμφανίζουν ένα στοιχειώδες πλάτος. Αυτό οφείλεται στον πολύ μικρό χρόνο ζωής των διεγερμένων καταστάσεων των ατόμων που οδηγεί σε αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της ενέργειάς τους μέσω της εκπομπής φωτονίου.



Διεγερμένη με χρόνο ζωής  $\tau \sim 10^{-8}$  s και αβεβαιότητα ενέργειας  $\Delta E$



Θεμελιώδης με χρόνο ζωής  $\tau = \infty$  και απόλυτα προσδιοριζόμενη ενέργεια

## ΤΙ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΕΤΕ ΠΡΟΣΕΚΤΙΚΑ

Η ύλη της Ενότητας αυτής βρίσκεται στον Krane [σελ. 143-181] και στον Serway [σελ. 129-161]. Διαβάστε κυρίως από τον παρόντα Οδηγό Μελέτης.

Θα ξέρετε «από έξω» τις σελίδες 4-5 της παρούσας Ενότητας.

Θα θεωρήσετε τις εφαρμογές στις σελίδες 11-19 της παρούσας Ενότητας του Οδηγού Μελέτης σαν λυμένα παραδείγματα.

Τα πειράματα διπλής σχισμής των σελίδων 33-40 της παρούσας Ενότητας του Οδηγού Μελέτης μπορείτε να τα διαβάσετε και πιο αναλυτικά στο κλασικό σύγγραμμα:

“The Feynman Lectures on Physics”, Vol.III, p.1-9.

Θα ξέρετε «από έξω» ως εφαρμογή τις σελίδες 51-52 της παρούσας Ενότητας [Ιδεατό πείραμα του Bohr].