ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ
(ΟΔΗΓΟΣ ΜΕΛΕΤΗΣ)

Έκδοση 2023

ΕΝΟΤΗΤΑ 3
Σύνοψη της Παλαιάς (Πρώϊμης) Κβαντικής Θεωρίας: Οι κανόνες κβάντωσης Wilson-Sommerfeld και η Αρχή της Αντιστοιχίας

Έκδοση 2023

Ι. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Έως το 1916 τα προβλήματα που αναδείκνυαν τις ανεπάρκειες της Κλασικής Φυσικής στην περιγραφή του Μικρόκοσμου συνοψίζονταν:

(α) Στην φύση της Η/Μ ακτινοβολίας που αλληλεπιδρά με την ύλη (θερμική ακτινοβολία μέλανος σώματος που οφείλεται σε ταλαντώσεις δομικών λίθων της επιφάνειάς του, πρόσπτωση Η/Μ ακτινοβολίας σε μέταλλα).
Αναδείχθηκε μέσω των εργασιών των Planck και Einstein η κβάντωση της ενέργειας της Η/Μ ακτινοβολίας μέσω της εισαγωγής της έννοιας του φωτονίου ως κβάντου ενέργειας *hf*. Ο Einstein συμπλήρωσε την εικόνα του ως σωματίου το 1916.

(β) Στην ερμηνεία της ευστάθεας των ατόμων και των ατομικών φασμάτων. Η θεωρία του Bohr εισήγαγε την κβάντωση της στροφορμής και της ενέργειας των ηλεκτρονίων που περιστρέφονται σε ευσταθείς κυκλικές τροχιές γύρω από τους ατομικούς πυρήνες.

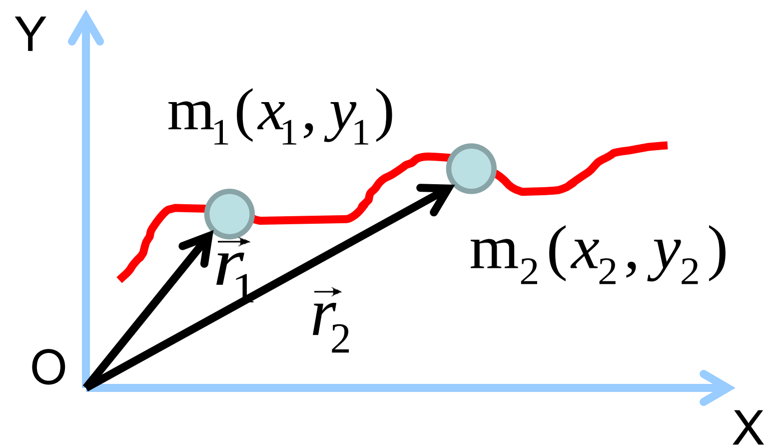
Και τα δύο φαινόμενα ανάγονται σε περιοδικές κινήσεις ΄στον μικρόκοσμο. Οι μικροσκοπικοί ταλαντωτές παράγουν Η/Μ ακτινοβολία κβαντισμένης ενέργειας. Η περιστροφή του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα είναι επίσης περιοδική.

Το 1916 οι Wilson και Sommerfeld δουλεύοντας ανεξάρτητα προσπάθησαν να συμπεριλάβουν όλα αυτά τα φαινόμενα υπό κοινή φορμαλιστική βάση.

II . ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΣΥΝΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΚΑΙ ΦΑΣΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

(α) Γενικευμένες συντεταγμένες:

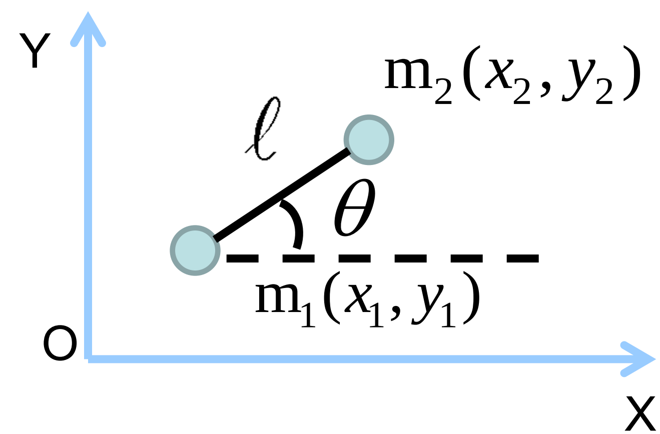
Έστω ένα σύστημα δύο σωματιδίων που κινείται στο επίπεδο υπό την επίδραση αμοιβαίας αλληλεπίδρασης. Ο προσδιορισμός της θέσης και των δύο απαιτεί τη γνώση 4 συντεταγμένων.



Εάν τα δύο σωματίδια είναι συνδεδεμένα με άκαμπτη ελαφρά ράβδο μήκους ℓ υποχρεούμενα να κινούνται και να περιστρέφονται ως σύνολο, τότε οι απαιτούμενες συντεταγμένες μειώνονται γιατί δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

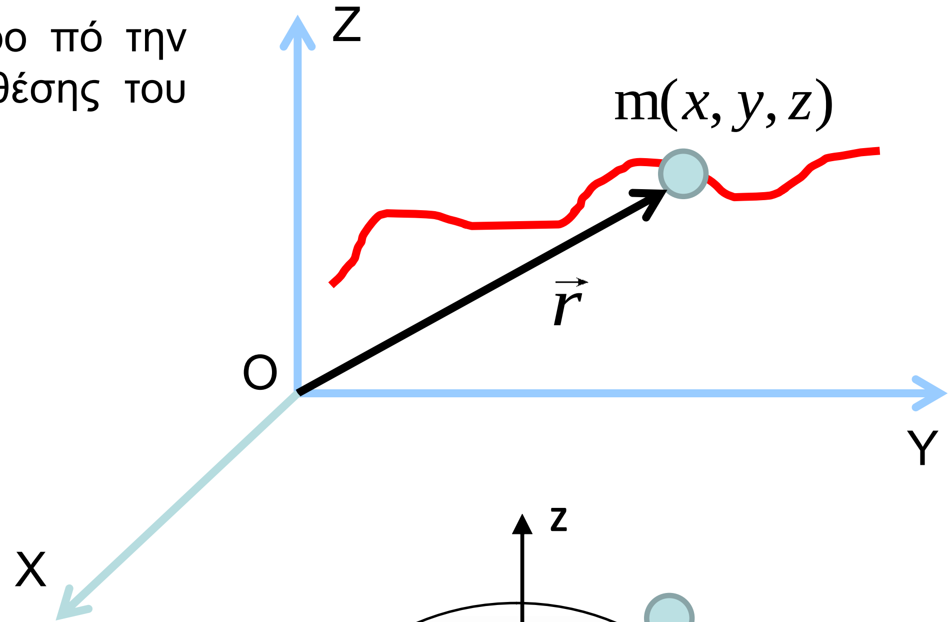
$$x_2 = x_1 + \ell \cos\theta$$

$$y_2 = y_1 + \ell \sin\theta$$

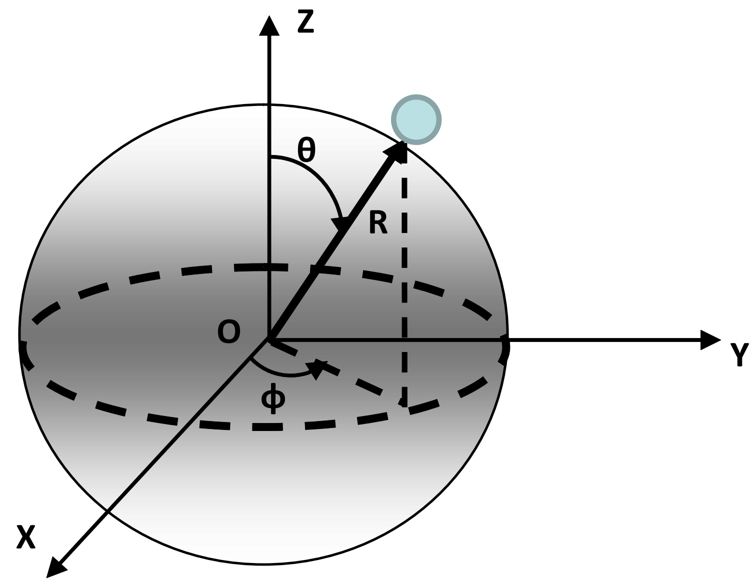


Άρα απαιτούνται τρείς συντεταγμένες (x_1, y_1, θ) .

Έστω ένα σωματίδιο που κινείται στον χώρο πό την επίδραση δύναμης. Ο προσδιορισμός της θέσης του απαιτεί τη γνώση 3 συντεταγμένων.



Εάν το σωματίδιο είναι υποχρεωμένο να κινείται σε επιφάνεια σφαίρας ακτίνας R, τότε οι απαιτούμενες συντεταγμένες είναι 2 (θ, φ).



Τα παραπάνω παραδείγματα είναι κινήσεις που υπόκειται σε **δεσμούς και απαιτούν μικρότερο πλήθος συντεταγμένων όταν οι περιορισμοί στην κίνηση μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει των συντεταγμένων θέσεως των σωματιδίων και του χρόνου (ολόνομοι δεσμοί)**.

Οι ανεξάρτητες παράμετροι που απαιτούνται για να προσδιοριστεί πλήρως η θέση ενός υλικού σημείου ή ενός συστήματος υλικών σημείων ονομάζονται **γενικευμένες συντεταγμένες και συμβολίζονται ως :**

$$\boxed{q_1, q_2, ..., q_N}$$

Οι ορμές που σχετίζονται με τις γενικευμένες συντεταγμένες (συζηγείς ορμές) συμβολίζονται ως:

$$\boxed{p_q}$$

Οι γενικευμένες συντεταγμένες δεν έχουν εν γένει διαστάσεις μήκους, ούτε οι γενικευμένες συζηγείς ορμές διαστάσεις ορμής.

(β) Μηχανική κατά Hamilton και φασικά διαγράμματα: Στην Εισαγωγή αναφέρθηκε ένας εναλλακτικός (καθαρά αλγεβρικός) τρόπος διαπραγμάτευσης της Μηχανικής που στηρίζεται σε μία συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων και των συζηγών ορμών τους που ονομάζεται Χαμιλτονιανή (Hamiltonian) του συστήματος:

$$\boxed{H = f(q_1, q_2, ..., q_N, p_1, p_2, ...p_N)} \qquad \boxed{p_i \to p_{q_i}}$$

Π.χ.

$$\boxed{q_i \left\{ \begin{matrix} x \to p_x \\ y \to p_y \\ z \to p_z \end{matrix} \right\} p_{q_i}} \qquad \boxed{q_i \left\{ \begin{matrix} \theta \to p_\theta \equiv L_\theta \\ \varphi \to p_\varphi \equiv L_\varphi \equiv L_z \end{matrix} \right\} p_{q_i}}$$

Οι εξισώσεις κίνησης είναι τότε:

$$\boxed{\frac{dp_{qi}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{qi}}}$$

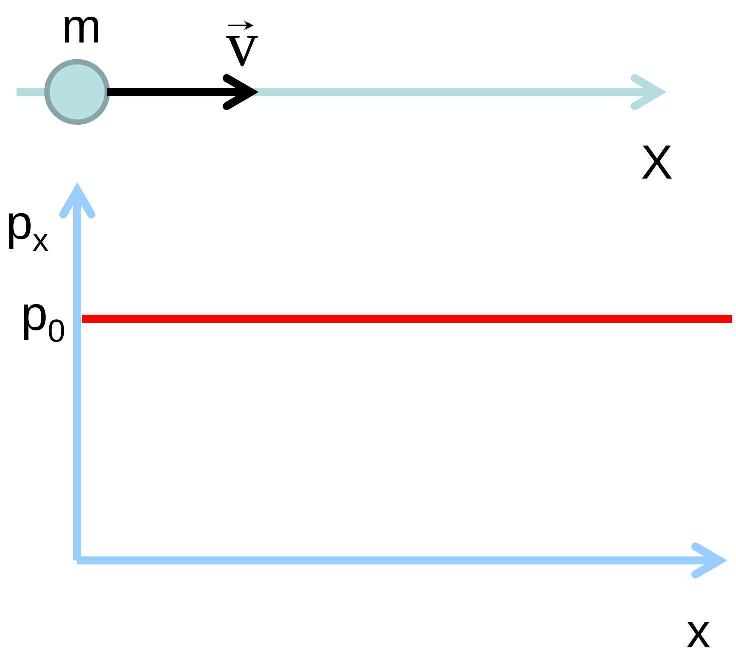
Στην ιδιαίτερη περίπτωση όπου οι σχέσεις μεταξύ γενικευμένων και καρτεσιανών συντεταγμένων του προβλήματος δεν περιέχουν το χρόνο:

$$\boxed{H(q_1, q_2, ..., q_N, p_1, p_2, ...p_N) = \mathrm{U}(q_1, q_2, ..., q_N) + \mathrm{K}(q_1, q_2, ..., q_N, p_1, p_2, ...p_N)}$$

Αφού πλέον η περιγραφή γίνεται συναρτήσει γενικευμένων συντεταγμένων και συζηγών ορμών αναδεικνύεται η ανάγκη παρουσίασης της τροχιάς σε έναν χώρο (p,q) που λέγεται φασικός χώρος. Τα αντίστοιχα διαγράμματα ονομάζονται φασικά διαγράμματα.

Εφαρμογή 1 (Το φασικό διάγραμμα του ελεύθερου σωματίου) Στην περίπτωση αυτή η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο σωμάτιο είναι μηδέν και επομένως αυτό κινείται ευθύγραμμα και ομαλά.

Στην απλή μονοδιάστατη περίπτωση θα έχουμε ότι:



$$q = x \qquad H = K = \frac{p_x^2}{2m}$$

$$p_q = p_x$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dH}{dp_x} = \frac{p_x}{m}$$

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{dH}{dx} = 0$$

$$\text{Για } t = 0 \quad x = x_0 \ \text{ και } \ p_x = p_0 \Rightarrow p(t) = p_0$$

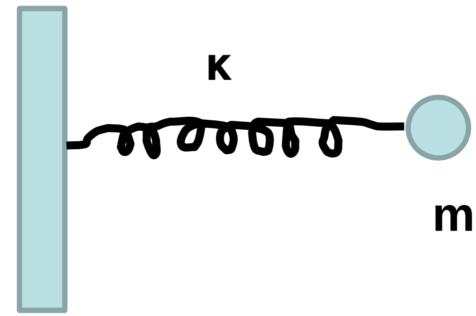
Το φασικό διάγραμμα εικονίζεται στο παραπάνω σχήμα.

Για τη μονοδιάστατη κίνηση ο φασικός χώρος είναι δύο διαστάσεων. Για τριδιάστατη κίνηση ο φασικός χώρος είναι εξαδιάστατος (p_x, p_y, p_z, x, y, z) .

<u>Εφαρμογή 2 (Ο κλασικός αρμονικός ταλαντωτής)</u>

Στην περίπτωση αυτή η ενέργεια και η ορμή συνδέονται με τη σχέση:

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}\kappa x^2 = H$$



που μετασχηματίζεται στην :

$$\frac{p_x^2}{2mE} + \frac{\kappa x^2}{2E} = 1$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες (x,y):

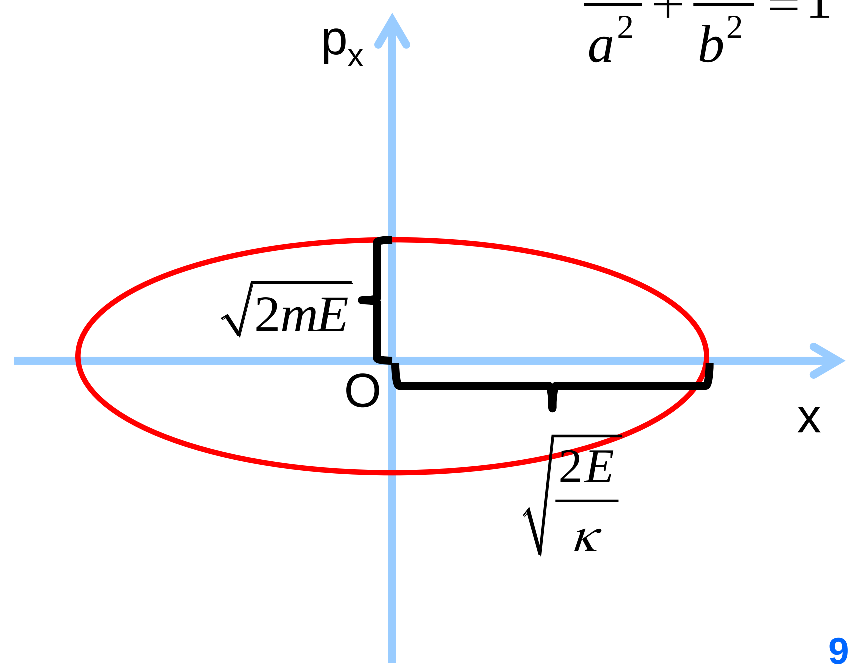
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Αφού η ενέργεια είναι σταθερή, η παραπάνω εξίσωση είναι εξίσωση έλλειψης όπου:

$$a = \sqrt{\frac{2E}{\kappa}} \text{ (μεγάλος ημιάξονας)}$$

$$b = \sqrt{2mE} \text{ (μικρός ημιάξονας)}$$

Το φασικό διάγραμμα εικονίζεται στο διπλανό σχήμα.



III. ΚΑΝΟΝΕΣ ΚΒΑΝΤΩΣΗΣ WILSON-SOMMERFELD (1916)

Προσπαθώντας να βάλουν κάτω από το ίδιο φορμαλιστικό πλαίσιο την κβάντωση της ενέργειας του αρμονικού ταλαντωτή κατά Planck και της ενέργειας των ηλεκτρονίων στα άτομα κατά Bohr, και παρατηρώντας ότι και οι δύο περιπτώσεις αφορούν σε περιοδικές κινήσεις, οι Wilson και Sommerfeld διατύπωσαν (ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο) το 1916 τον εξής γενικό κανόνα:

Για κάθε φυσικό σύστημα του οποίου οι γενικευμένες συντεταγμένες είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου, υπάρχει μία συνθήκη κβάντωσης για κάθε μία από τις συντεταγμένες αυτές που είναι η

$$\boxed{\oint p_q dq = n_q h, \; n_q = 0, 1, 2, 3, ...}$$

Ισοδύναμα: Επιτρέπονται μόνο εκείνες οι περιοδικές τροχιές για τις οποίες το Παραπάνω ολοκλήρωμα είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της σταθεράς του Planck.

Το ολοκλήρωμα είναι κλειστό στον φασικό χώρο (φασικό διάγραμμα) σε μία περίοδο της συντεταγμένης q.

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί την κεντρική εξίσωση της Πρώϊμης Κβαντικής Θεωρίας. Αντικαταστάθηκε από την εξίσωση του Schrödinger στη Σύγχρονη Κβαντική Θεωρία.

Η σταθερά του Planck αντιπροσωπεύει εμβαδό στον φασικό χώρο !!!

Οι κανόνες εισάγουν έναν κβαντικό αριθμό n_q ανά γενικευμένη συντεταγμένη και συζηγή ορμή που εμφανίζεται σε ένα μικροσκοπικό σύστημα που εκτελεί περιοδική κίνηση. Αυτοί μεταφέρονται στην έκφραση της ενέργειας όπως θα δούμε σε εφαρμογές που ακολουθούν.

IV. Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑΣ (1923)

Η αρχή της αντιστοιχίας διατυπώθηκε από τον Bohr το 1923 και συμπληρώνει το πλαίσιο της Πρώϊμης (ή Παλαιάς) Κβαντικής Θεωρίας. Σύμφωνα με αυτή:

Τα αποτελέσματα της κβαντικής διαπραγμάτευσης ενός μικροσκοπικού συστήματος μεταπίπτουν σε αυτά της αντίστοιχης κλασικής διαπραγμάτευσης
(α) Για πολύ μεγάλες μάζες ($m \to \infty$) [Βρισκόμαστε στον Μακρόκοσμο]
(β) Για πολύ μεγάλες τιμές των κβαντικών αριθμών ($n \to \infty$)
(γ) Όταν η σταθερά του Planck τείνει στο μηδέν ($h \to 0$)

Η τελευταία απαίτηση θα γίνει αντιληπτή μέσω παραδειγμάτων που αναδεικνύουν το περιεχόμενο της σταθεράς του Planck (αντιπροσωπεύει εμβαδό στον φασικό χώρο και άρα μπορεί να μηδενιστεί).

V. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Εφαρμογή 1 (Σωματίδιο σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικής ενέργειας): Το σωμάτιο είναι περιορισμένο μέσα στα όρια του πηγαδιού και συγκρούεται ελαστικά στα τοιχώματά του έχοντας διαρκώς όρμή σταθερού μέτρου.

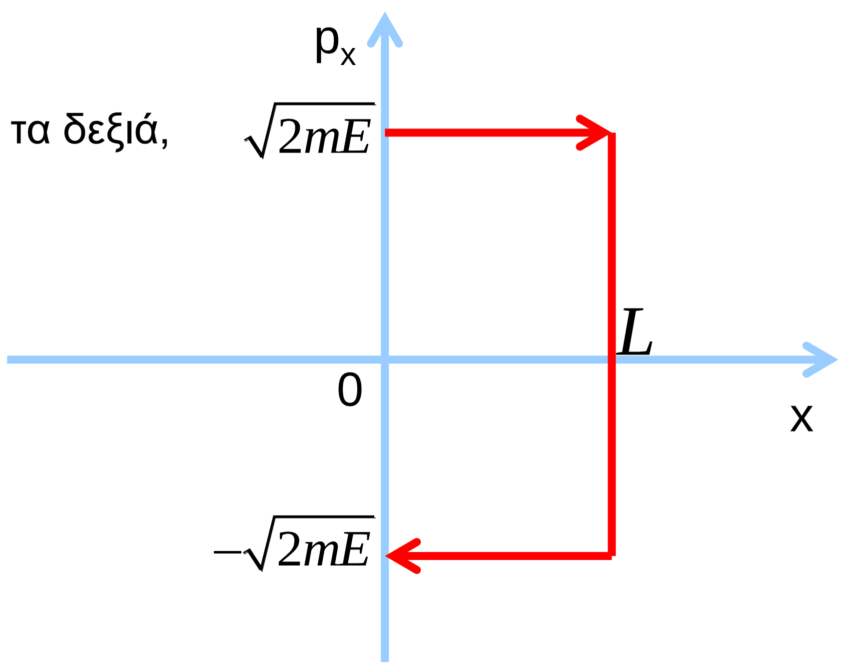
Στην απλή αυτή μονοδιάστατη περίπτωση θα έχουμε ότι:

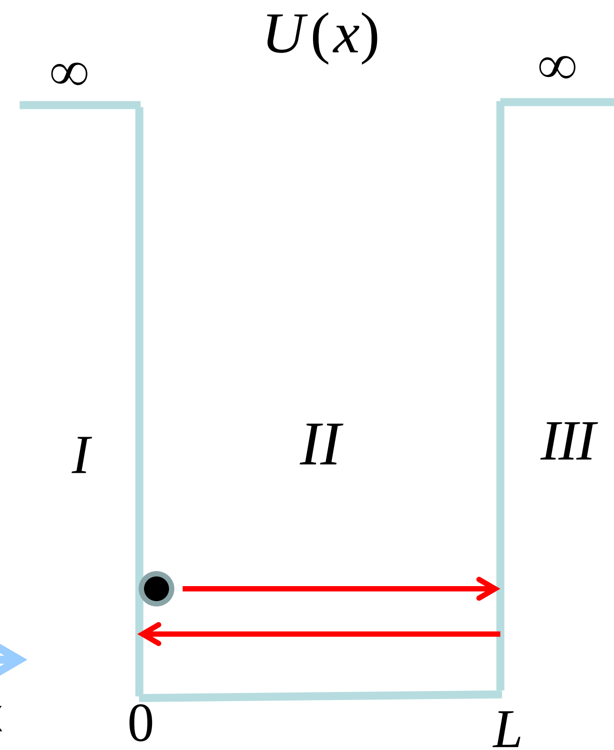
$$q = x$$

$$p_q = p_x$$

$$E = \frac{p_x^2}{2m} \Rightarrow p_x = \pm\sqrt{2mE}$$

Το (+) για κίνηση προς τα δεξιά,
 το (-) για κίνηση προς
τα αριστερά.

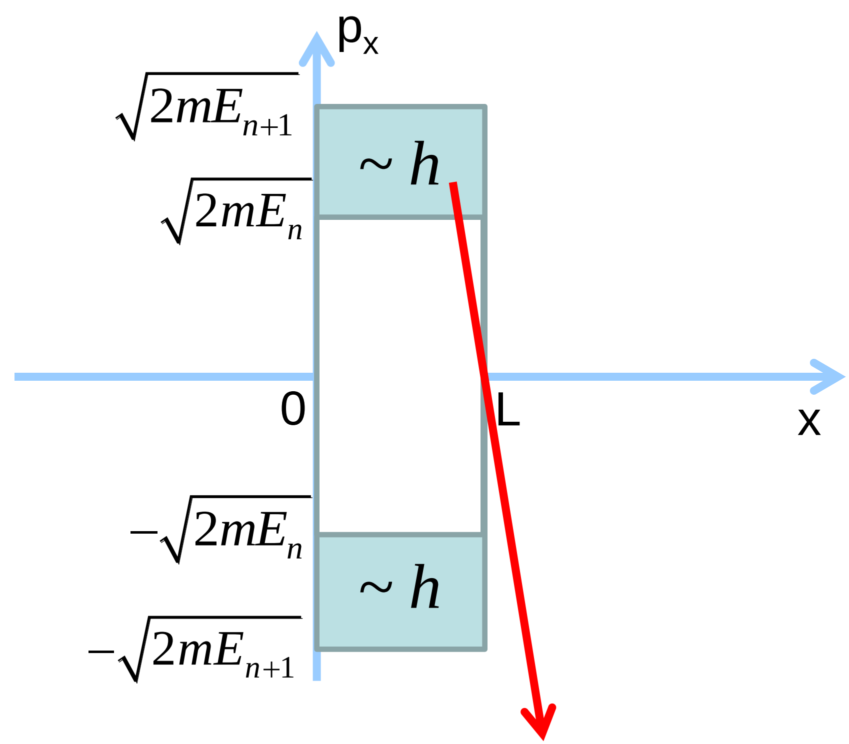




$$U(x) = \begin{cases} 0, & 0<x<L \\ \infty, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

$$\oint p_x dx = nh \Rightarrow \int_0^L \sqrt{2mE}\,dx + \int_L^0 -\sqrt{2mE}\,dx = nh \Rightarrow 2\sqrt{2mE}\,L = nh \Rightarrow 8mEL^2 = n^2h^2 \Rightarrow$$

$$E_n = \frac{n^2h^2}{8mL^2},\ n = 0,1,2,3\ldots$$



- Κβάντωση της ενέργειας και αρχή της αντιστοιχίας.

$$\Delta \mathrm{E}_n = \mathrm{E}_{n+1} - \mathrm{E}_n = \left[(n+1)^2 - n^2\right]\frac{h^2}{8mL^2} =$$

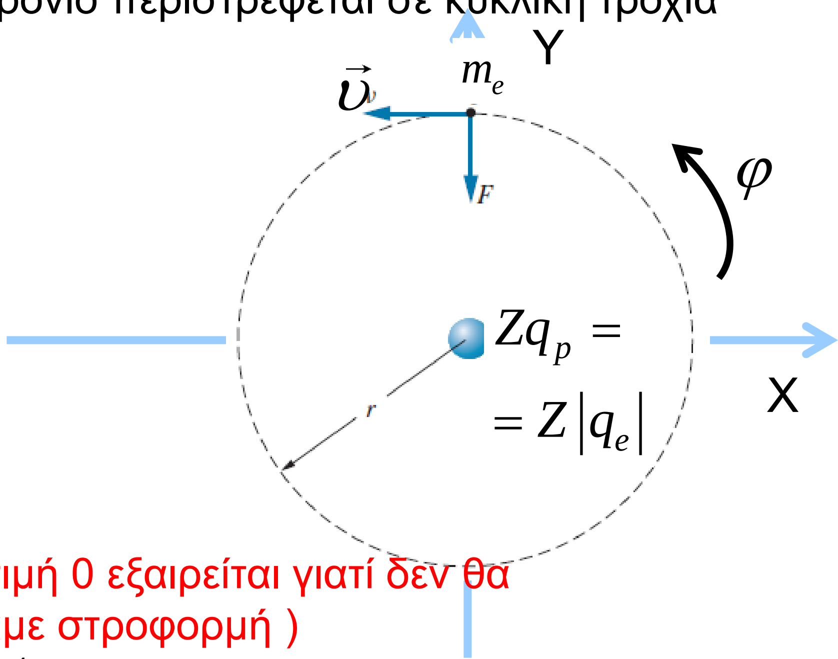
$$= (2n+1)\frac{h^2}{8mL^2} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

$$\frac{\Delta \mathrm{E}_n}{E_n} = \frac{\mathrm{E}_{n+1} - \mathrm{E}_n}{\mathrm{E}_n} = \frac{(2n+1)}{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Παρατηρούμε ότι η σχετική ενεργειακή διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών ενεργειακών σταθμών εκμηδενίζεται πρακτικά για μεγάλες τιμές του κβαντικού αριθμού n. Το σωματίδιο στην περίπτωση αυτή συμπεριφέρεται κλασικά (συνεχές ενεργειακό φάσμα), σύμφωνα με την αρχή της αντιστοιχίας.

Παρατηρούμε ότι η ενεργειακή διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών ενεργειακών σταθμών εκμηδενίζεται πρακτικά όταν h→0 .Το σωματίδιο στην περίπτωση αυτή συμπεριφέρεται κλασικά (συνεχές ενεργειακό φάσμα), σύμφωνα με την αρχή της αντιστοιχίας.

Εφαρμογή 2 (Το μονοηλεκτρονιακό άτομο): Το ηλεκτρόνιο περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά γύρω από τον πυρήνα. Εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση.



Στην περίπτωση θα έχουμε ότι:

$$q = \varphi$$

$$p_q = p_\varphi = L_\varphi = L$$

$$\oint L d\varphi = nh \Rightarrow L \int_0^{2\pi} d\varphi = nh \Rightarrow$$

$$L 2\pi = nh \Rightarrow L = \frac{nh}{2\pi} \Rightarrow L = n\hbar,\ n = 1, 2, 3..$$

(Η τιμή 0 εξαιρείται γιατί δεν θα είχαμε στροφορμή)

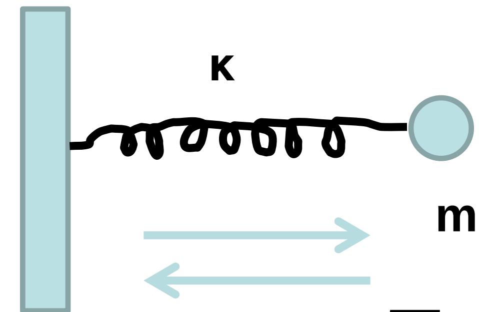
από όπου καταλήξαμε στην έκφραση: $E_n = -\frac{Z^2 m_e q_e^4}{8\varepsilon_0{}^2 h^2 n^2},\ n = 1, 2, 3..$

- Κβάντωση της ενέργειας και αρχή της αντιστοιχίας.

$$\Delta \mathrm{E}_n = \mathrm{E}_{n+1} - \mathrm{E}_n = \left[-\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n^2} \right] \frac{Z^2 m_e q_e^4}{8\varepsilon_0{}^2 h^2} = \frac{2n+1}{n^2 (n+1)^2} \frac{Z^2 m_e q_e^4}{8\varepsilon_0{}^2 h^2}$$

$$\frac{\Delta \mathrm{E}_n}{E_n} = \frac{\mathrm{E}_{n+1} - \mathrm{E}_n}{\mathrm{E}_n} = \frac{2n+1}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Εφαρμογή 3 (Ο μικροσκοπικός κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής):



$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$

Θα έχουμε ότι:

$$q = x, \quad p_q = p_x$$

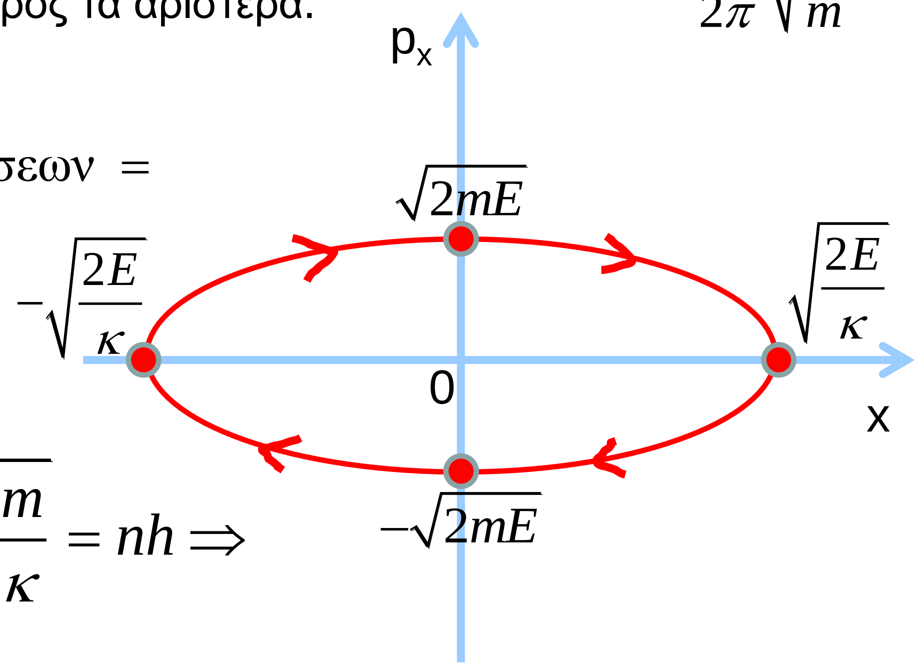
$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}\kappa x^2 \Rightarrow p_x = \pm\sqrt{2m\left(E - \frac{1}{2}\kappa x^2\right)}$$

Το (+) για κίνηση προς τα δεξιά, το (-) για κίνηση προς τα αριστερά.

1ος τρόπος:

$$\oint p_x dx = \text{ εμβαδό έλλειψης στον χώρο των φάσεων } =$$

$$= \pi ab = \pi\sqrt{\frac{2E}{\kappa}}\sqrt{2mE} = \pi\sqrt{\frac{4mE^2}{\kappa}}$$



$$\oint p_x dx = nh \Rightarrow \pi\sqrt{\frac{4mE^2}{\kappa}} = nh \Rightarrow 2\pi E\sqrt{\frac{m}{\kappa}} = nh \Rightarrow$$

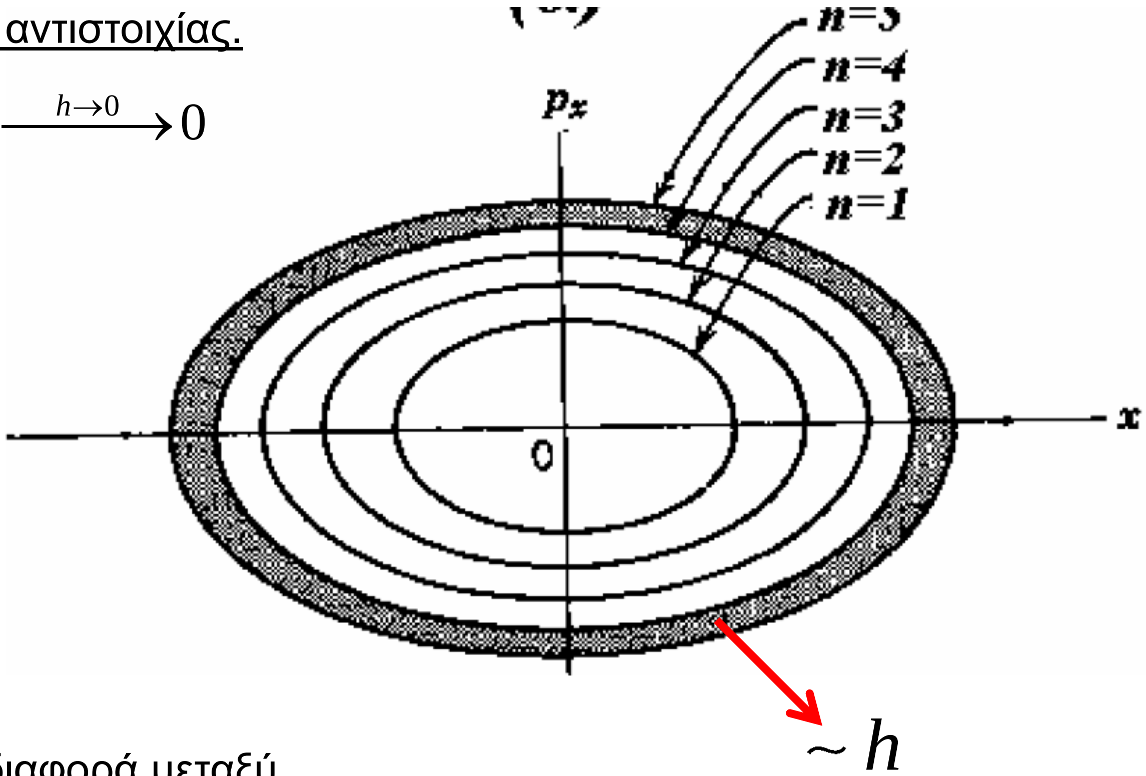
$$E_n = nh\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{m}} \Rightarrow E_n = nhf\,, n = 0,1,2,3,..$$

Διαφορά με τον Planck !

● Κβάντωση της ενέργειας και αρχή της αντιστοιχίας.

$$\Delta \mathrm{E}_n = \mathrm{E}_{n+1} - \mathrm{E}_n = \left[n+1-n\right]hf = hf \xrightarrow{h\to 0} 0$$

Παρατηρούμε ότι η διαφορά εμβαδού μεταξύ δύο διαδοχικών ελλείψεων στον φασικό χώρο ισούται με τα σταθερά του Planck. Έτσι όταν h→0 δεν έχουμε κβάντωση της ενέργειας, αλλά συνεχές ενεργειακό φάσμα κλασικού αρμονικού ταλαντωτή.



$$\frac{\Delta \mathrm{E}_n}{E_n} = \frac{\mathrm{E}_{n+1} - \mathrm{E}_n}{\mathrm{E}_n} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Παρατηρούμε ότι η σχετική ενεργειακή διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών ενεργειακών σταθμών εκμηδενίζεται πρακτικά για μεγάλες τιμές του κβαντικού αριθμού n. Το σωματίδιο στην περίπτωση αυτή συμπεριφέρεται κλασικά (συνεχές ενεργειακό φάσμα), σύμφωνα με την αρχή της αντιστοιχίας.

2^{ος} τρόπος:

$$\oint p_x dx = nh \Rightarrow 4\int_0^{\sqrt{\frac{2E}{\kappa}}} \sqrt{2m\left(E-\frac{1}{2}\kappa x^2\right)}dx = nh \Rightarrow 4\sqrt{2m}\int_0^{\sqrt{\frac{2E}{\kappa}}} \sqrt{E-\frac{1}{2}\kappa x^2}\,dx = nh \Rightarrow$$

$$4\sqrt{2m}\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\int_0^{\sqrt{\frac{2E}{\kappa}}} \sqrt{\frac{2E}{\kappa}-x^2}\,dx = nh \Rightarrow 4\sqrt{m\kappa}\int_0^{\sqrt{\frac{2E}{\kappa}}} \sqrt{\left(\sqrt{\frac{2E}{\kappa}}\right)^2 - x^2}\,dx = nh$$

Όμως: $\int\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{\alpha^2-x^2}+\frac{\alpha^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right)$

$$4\sqrt{m\kappa}\int_0^{\sqrt{\frac{2E}{\kappa}}} \sqrt{\left(\sqrt{\frac{2E}{\kappa}}\right)^2 - x^2}\,dx = nh \Rightarrow 4\sqrt{m\kappa}\left[\frac{x}{2}\sqrt{\left(\sqrt{\frac{2E}{\kappa}}\right)^2 - x^2}+\frac{E}{\kappa}\sin^{-1}\left(\frac{x}{\frac{2E}{\kappa}}\right)\right]_0^{\sqrt{\frac{2E}{\kappa}}} = nh \Rightarrow$$

$$4\sqrt{m\kappa}\,\frac{E}{\kappa}\left[\sin^{-1}(1)-\sin^{-1}(0)\right] = nh \Rightarrow 4\sqrt{m\kappa}\,\frac{E}{\kappa}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = nh \Rightarrow$$

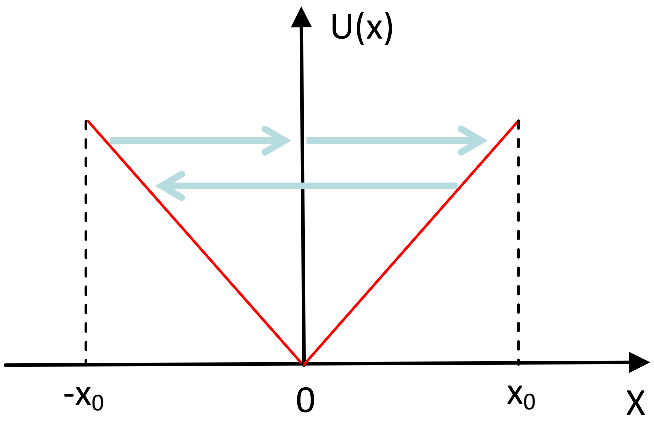
$$2\sqrt{\frac{m}{\kappa}}\pi E = nh \Rightarrow 2\frac{1}{\omega}\pi E = nh \Rightarrow 2\pi\frac{1}{2\pi f}E_n = nh \Rightarrow E_n = nhf = n\hbar\omega,\ n = 0,1,2,3..$$

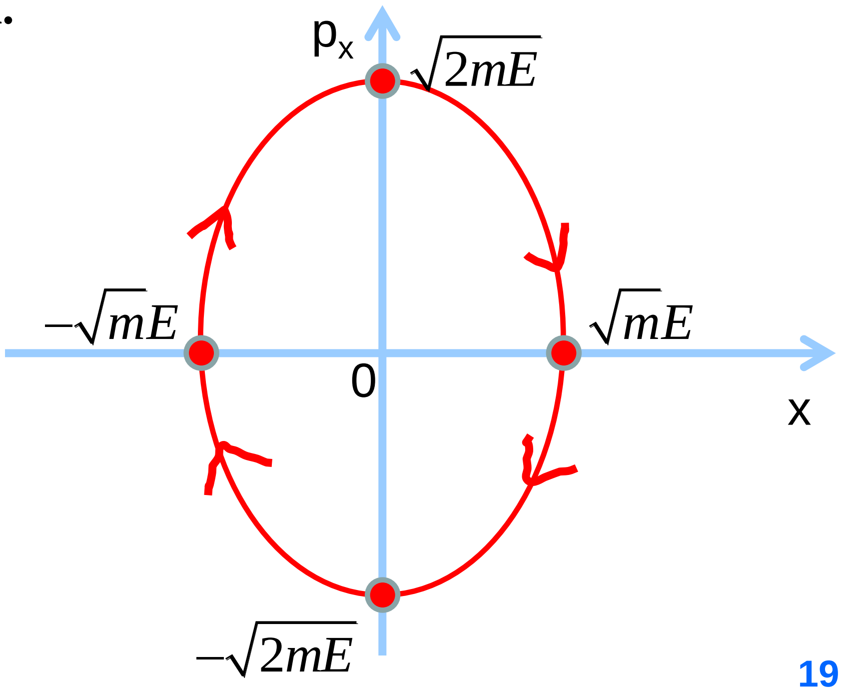
Γενική Παρατήρηση: Σε κάποιες από τις εφαρμογές προηγήθηκαν οι κανόνες κβάντωσης Wilson-Sommerfeld προβλέπουν μηδενική ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης του φυσικού συστήματος. Αυτό έρχεται καταρχήν σε αντίθεση με το αποτέλεσμα του Planck.
Αυτή η θεμελιώδης διαφορά θα αναλυθεί στα επόμενα…..

<u>Παράδειγμα 22:</u> (Λύθηκε στο Μάθημα) Σωμάτιο μάζας m κινείται σε περιοχή του χώρου όπου η δυναμική ενέργεια δίδεται από την έκφραση:

$$U(x) = \frac{|x|}{\sqrt{m}}$$

Να κατασκευαστεί το φασικό του διάγραμμα και να υπολογιστεί η ενέργειά του (το ενεργειακό του φάσμα) με βάση τους κανόνες κβάντωσης Wislon-Sommerfeld.

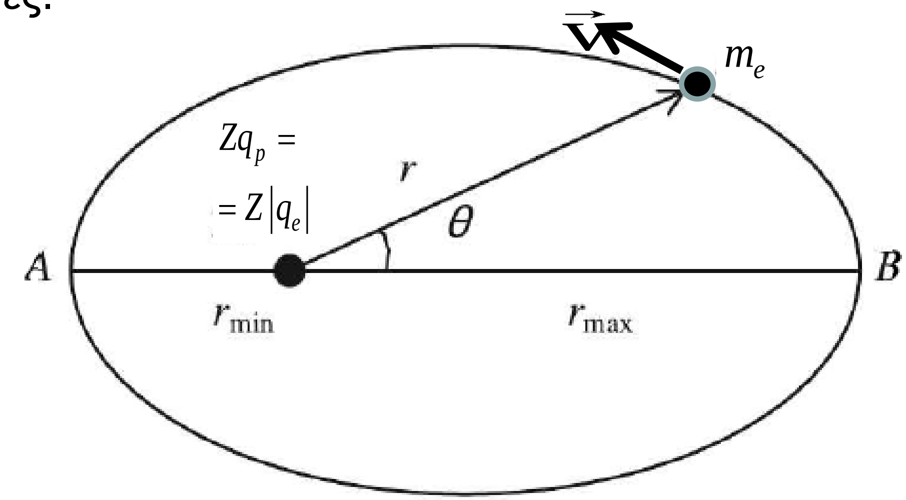




V. ΤΟ ΑΤΟΜΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΤΟΥ SOMMERFELD 1916 (ΕΦΑΡΜΟΓΗ)

Σαν μία εφαρμογή στους κανόνες κβάντωσης που διατύπωσε, ο Sommerfeld το 1916 παρουσίασε το δικό του ατομικό πρότυπο για τα μονοηλεκτρονιακά άτομα επαναφέροντας στο προσκήνιο τις ελλειπτικές τροχιές του ηλεκτρονίου που είχε προτείνει ο Rutherford (πλανητικό πρότυπο). Ο πυρήνας δεν είναι στο κέντρο της έλλειψης. Εδώ η απόσταση ηλεκτρονίου –πυρήνα είναι μεταβλητή και έχουμε δύο γενικευμένες συντεταγμένες.

$$q = r,\ p_q = p_r \qquad q = \theta,\ p_q = p_\theta = L$$



$$\vec{v} = \left(\frac{dr}{dt}\right)\hat{r} + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{\theta}$$

$$p_r = m_e\frac{dr}{dt} \qquad L = m_e r^2\frac{d\theta}{dt}$$

$$E = K + U = \frac{1}{2}m_e \mathrm{v}^2 - \frac{ZK_e q_e^2}{r} \Rightarrow E = \frac{1}{2}m_e\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] - \frac{ZK_e q_e^2}{r} \Rightarrow$$

$$E = \frac{p_r^2}{2m_e} + \frac{L^2}{2m_e r^2} - \frac{ZK_e q_e^2}{r} \Rightarrow p_r = \pm\sqrt{2m_e\left(E + \frac{ZK_e q_e^2}{r} - \frac{L^2}{2m_e r^2}\right)} \quad (1)$$

$$\oint L d\theta = n_\theta h \Rightarrow L\int_0^{2\pi} d\theta = n_\theta h \Rightarrow \boxed{L = n_\theta \hbar,\ n_\theta = 1,2,3....,\ (2)}$$

Το “0” εξαιρείται γιατί θα είχαμε ευθεία τροχιά που θα διέρχονταν από τον πυρήνα

$$\oint p_r dr = n_r h \Rightarrow 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2m_e\left(E + \frac{ZK_e q_e^2}{r} - \frac{L^2}{2m_e r^2}\right)}dr = n_r h \Rightarrow$$

$$2\pi\left(\frac{Zq_e^2}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m_e}{-2E}} - L\right) = n_r h \Rightarrow \boxed{\frac{Zq_e^2}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m_e}{-2E}} - L = n_r\hbar,\quad n_r = 0,1,2,3,......,\quad (3)}$$

Από (2) και (3) έχουμε:

$$\frac{Zq_e^2}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m_e}{-2E}} = \left(n_r + n_\theta\right)\hbar = n\hbar,\ \ n = 1,2,3.......(4)$$

Από (3) και (4) έχουμε:

Bohr!!

$$\boxed{E_n = -\frac{Z^2 m_e q_e^4}{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 2\left(n_r + n_\theta\right)^2 \hbar^2} = -\frac{Z^2 m_e q_e^4}{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 2n^2\hbar^2},\ n_r + n_\theta = n = 1,2,3.......(5)}$$

Στα σημεία A($r=r_{min}$) και B ($r=r_{max}$) θα έχουμε ότι dr/dt=0 και $p_r=0$. Επομένως από την (1) έχουμε:

$$E+\frac{ZK_e q_e^2}{r}-\frac{L^2}{2m_e r^2}=0 \Rightarrow r^2+\frac{Zq_e^2}{4\pi\varepsilon_0 E}r-\frac{L^2}{2m_e E}=0$$

Το άθροισμα των ριζών της είναι:

$$r_{\min}+r_{\max}=-\frac{Zq_e^2}{4\pi\varepsilon_0 E}=2a \quad (6)$$

Επομένως από (5) και (6):

Για Z=1 συμπίπτει με τη γνωστή ακτίνα Bohr στο άτομο του H…

$$\boxed{a=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{Zm_e q_e^2}\left(n_r+n_\theta\right)^2=\left(n_r+n_\theta\right)^2\alpha_0=n^2\alpha_0 \qquad (7)}$$ (μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης)

Επίσης αποδεικνύεται ότι ο μικρός ημιάξονας της έλλειψης είναι:

$$\boxed{b=a\frac{n_\theta}{n_r+n_\theta}=a\frac{n_\theta}{n} \qquad (8)}$$

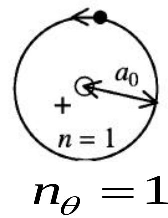
Στο πρόβλημα εμφανίζονται δύο κβαντικοί αριθμοί. Ο αριθμός **n** λέγεται **κύριος κβαντικός αριθμός και καθορίζει την ενέργεια και τον μεγάλο ημιάξονα της τροχιάς.**

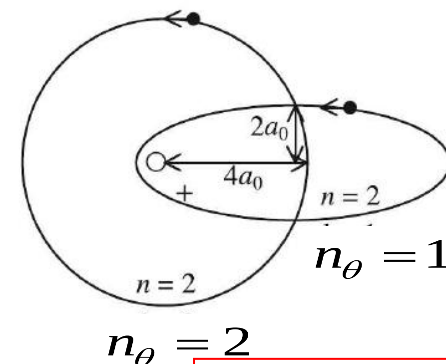
Ο αριθμός $\mathbf{n_\theta}$ ονομάζεται **αζιμουθιακός κβαντικός αριθμός** κβαντικός αριθμός και καθορίζει τη στροφορμή και τον μικρό ημιάξονα της έλλειψης.

Ο αζιμουθιακός κβαντικός αριθμός για κάθε τιμή του n παίρνει τις τιμές $\mathbf{n_\theta = 1,2, \ldots, n}$.

Η τροχιά που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη δυνατή τιμή του αζιμουθιακού κβαντικού αριθμού, για δεδομένη τιμή του κύριου κβαντικού αριθμού, είναι κύκλος.

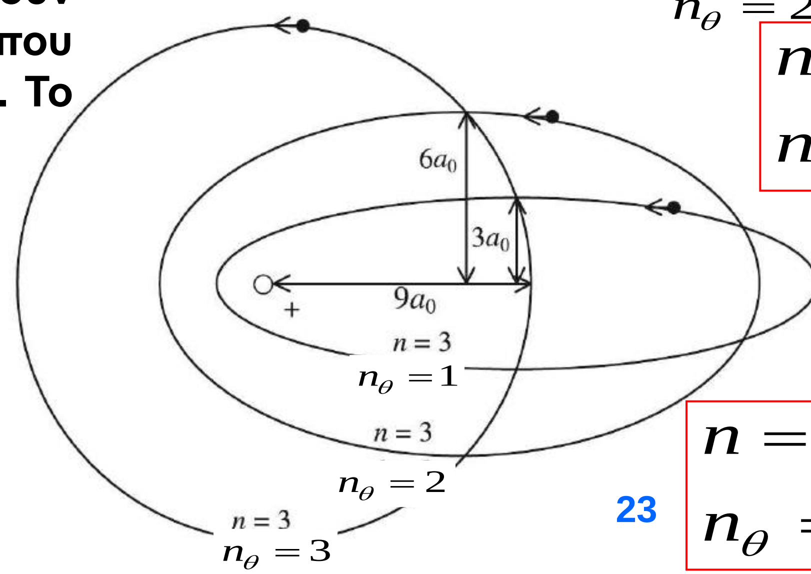
$$n = 1 \qquad n_\theta = 1$$





$$n = 2 \qquad n_\theta = 1, 2$$

Παρατηρούμε ότι σε κάθε τιμή της ενέργειας (καθορίζεται από το n) αντιστοιχούν περισσότερες της μίας τροχιές που αντιστοιχούν σε διαφορετική στροφορμή. Το φαινόμενο αυτό καλείται εκφυλισμός.



$$n = 3 \qquad n_\theta = 1, 2, 3$$

ΤΙ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΕΤΕ ΠΡΟΣΕΚΤΙΚΑ

Η ύλη της Ενότητας αυτής δεν βρίσκεται στον Krane και στον Serway. Τόσο αναλυτικά δεν βρίσκεται ούτε σε βιβλία υψηλότερου επιπέδου. Θα την διαβάσετε πολύ καλά μόνο από τον Οδηγό Μελέτης.

Θα ξέρετε «από έξω» την έκφραση του κανόνα κβάντωσης Wilson-Sommerfeld.

Θα θεωρήσετε τις εφαρμογές στις σελίδες 12-17 της παρούσας Ενότητας του Οδηγού Μελέτης πολύ καλά σαν λυμένα παραδείγματα.

Το ατομικό πρότυπο του Sommerfeld δεν εξετάζεται.