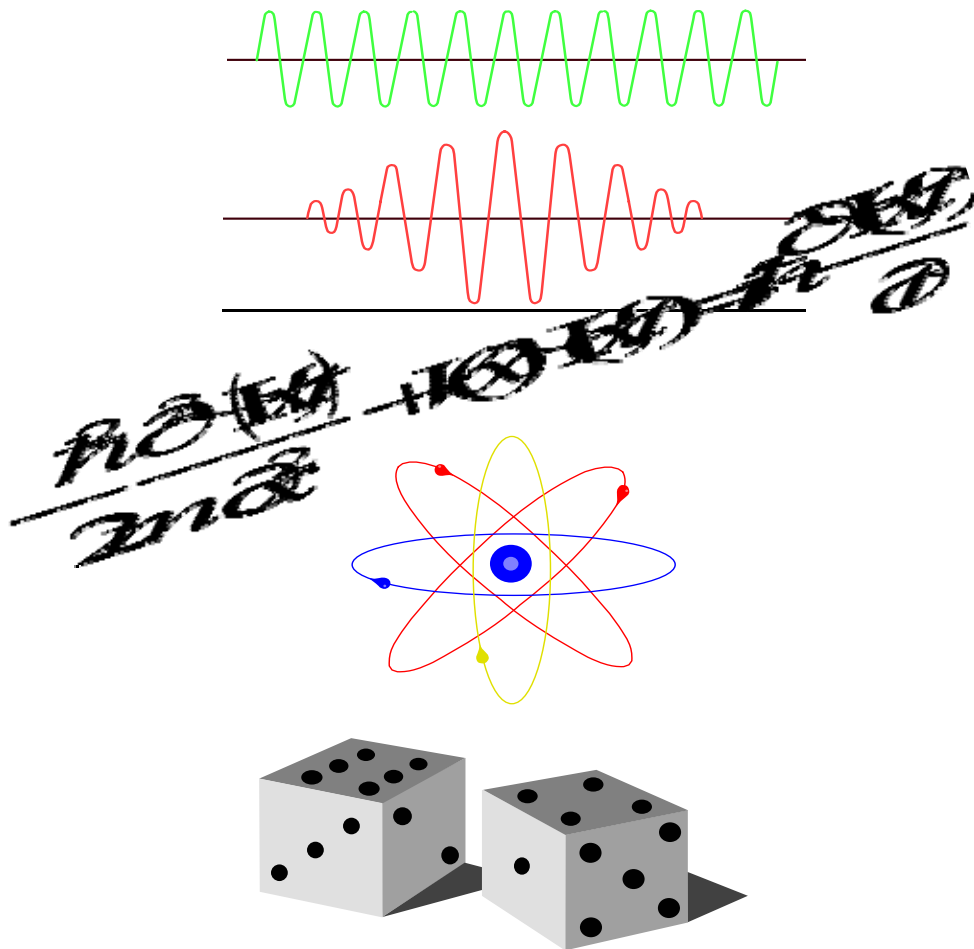


Αριστείδης Ζδέτσης

**ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ
ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ**



Πανεπιστήμιο Πατρών

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

Παλαιά Κβαντική Θεωρία

Κεφάλαιο 1 *Ιστορική και Εννοιολογική Εισαγωγή*



Εισαγωγή

Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί μια γενική εισαγωγή στην θεματική ενότητα της Κβαντικής Θεωρίας και ιδιαίτερα στο κομμάτι της παλαιάς Κβαντικής Θεωρίας. Αρχίζουμε με μια σύντομη ιστορική και εννοιολογική αναδρομή η οποία περιγράφει τα όρια και τα περιεχόμενα της «Σύγχρονης Φυσικής», μέσα στην οποία περιέχεται η κβαντική θεωρία, καθώς και τη σχέση της με την «Κλασική Φυσική». Συνεχίζουμε με την γενική περιγραφή των στόχων και της μεθοδολογίας του μαθήματος, και τελειώνουμε με μια επιλεγμένη γενική βιβλιογραφία για παραπέρα μελέτη. Η βιβλιογραφία, η οποία περιγράφεται στο Α μέρος θεωρείται προαπαιτούμενο (1-3) και συνέχεια (4-5) αυτού του τόμου. Θα ήταν χρήσιμη μια γρήγορη (αλλά προσεκτική) επανάληψη και ανακεφαλαίωση της ύλης που αντιστοιχεί στις παραπομπές 1-3

1.1 Τι είναι «Κλασική» και τι «Σύγχρονη Φυσική» .

Μια Σύντομη Ιστορική και Εννοιολογική Αναδρομή

Στο τέλος του 19^{ου} αιώνα η Φυσική της εποχής εκείνης, την οποία σήμερα ονομάζουμε **Κλασική Φυσική**, εθεωρείτο εδραιωμένη και ακλόνητη. Οι Φυσικοί

πίστευαν τότε¹ πως ΟΛΑ τα θεμελιώδη προβλήματα είχαν λυθεί κατ' αρχήν . Η μελέτη συγκεκριμένων φαινομένων ήταν μονάχα ζήτημα κάποιας επί μέρους εφαρμογής των γνωστών θεμελιωδών αρχών και επίλυσης των γνωστών διαφορικών εξισώσεων² που εκφράζουν τους θεμελιώδεις νόμους της Φύσης . Την πεποίθηση αυτή είχαν ενισχύσει , εκτός από τις μεγάλες επιτυχίες της Κλασικής Μηχανικής στη μελέτη των ουρανίων σωμάτων , και οι άλλοι κλάδοι της Φυσικής . Η κινητική θεωρία για παράδειγμα ενοποίησε την Στατιστική Μηχανική με την Θερμοδυναμική . Όμοια , η Ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell ενοποίησε τα ηλεκτρικά και μαγνητικά φαινόμενα με τα οπτικά φαινόμενα , δείχνοντας ότι το φως δεν είναι τίποτα άλλο παρά Ηλεκτρομαγνητική Ακτινοβολία . Στο τέλος όμως του 19^{ου} αιώνα και στην αρχή του 20^{ου} , προέκυψαν πειραματικά αποτελέσματα που δεν ήταν δυνατό να ερμηνευθούν με την εφαρμογή των γνωστών βασικών αρχών . Χρειάστηκε τότε να αναθεωρηθούν αυτές οι ίδιες οι βασικές αρχές και αυτό οδήγησε σε δυο διαφορετικές “επαναστάσεις” στη φυσική : Τη **θεωρία της σχετικότητας** (Ειδική και αργότερα Γενική) και τη **θεωρία των Κβάντα** (που αργότερα διαμορφώθηκε στην Κβαντομηχανική) . Πραγματικά η θεωρία της σχετικότητας και η θεωρία των Κβάντα δεν ήταν απλώς δύο (τρεις , αν μετρήσουμε χωριστά την Γενική θεωρία της Σχετικότητας) νέες θεωρίες . Ήταν ειρηνικές επαναστάσεις που επέφεραν ριζικές αλλαγές στον τρόπο που αντιλαμβανόμαστε και περιγράφουμε τον φυσικό κόσμο . Οι αλλαγές αυτές που σήμερα είναι στη βάση όλης της σύγχρονης φυσικής, δεν ήταν εύκολο να παρατηρηθούν επειδή γίνονται αισθητές σε συνθήκες μακριά από την καθημερινή εμπειρία . Οι αλλαγές που εισάγει η ειδική θεωρία της σχετικότητας αρχίζουν να γίνονται αισθητές για μεγάλες ταχύτητες που προσεγγίζουν την ταχύτητα του φωτός στο κενό ,

$$c \approx 300.000 \text{ km/sec}$$

Οι συνέπειες της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας

γίνονται αισθητές για πάρα πολύ μεγάλα (σε σχέση με το γήινο) πεδία βαρύτητας . Οι «αλλαγές» που εισάγει η κβαντική θεωρία – Κβαντομηχανική αφορούν μικροσκοπικά αντικείμενα με τυπικές διαστάσεις μερικών Ångstrom , Å (1Å =10⁻¹⁰ m) και μικρότερες . Σαν κλασικό μέτρο σύγκρισης αναφέρουμε την ακτίνα του ατόμου του υδρογόνου a_0 , που έχει μέγεθος $a_0 \approx 0.52 \text{ Å}$. Στο όριο των μικρών (ως προς το c) ταχυτήτων και μεγάλων (ως προς το μέγεθος του ατόμου , $\gg 0.52 \text{ Å}$) διαστάσεων η κλασική περιγραφή είναι ικανοποιητική . Στην Κβαντική Θεωρία η απαίτηση για σύμπτωση της

¹ Σήμερα κάποιοι Φυσικοί θέλουν να πιστεύουν κάτι παρόμοιο ...

κλασικής και κβαντικής περιγραφής σε κάποιο όριο είναι γνωστή ως « αρχή της αντιστοιχίας ». Αυτή η αρχή έχει γόνιμες εφαρμογές, όπως, για παράδειγμα, στην περιγραφή του ατόμου του υδρογόνου, που θα δούμε αργότερα.

Θα πρέπει να σημειώσουμε πως ενώ η θεωρία της σχετικότητας άλλαξε ριζικά βασικούς νόμους και έννοιες της κλασικής φυσικής, **η κβαντική θεωρία άλλαξε επιπλέον επαναστατικά τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε και περιγράφουμε τη Φύση**. Από αυτή λοιπόν τη σκοπιά, τόσο η γενική όσο και η ειδική θεωρία της σχετικότητας, θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι βρίσκονται πλησιέστερα στην κλασική φυσική από την κβαντική θεωρία. Έτσι θα μπορούσαν να ενταχθούν από κοινού σε κάποιο γενικότερο πλαίσιο. Η κλασική φυσική και η θεωρία της σχετικότητας (γενική και ειδική) αποτελούν από κοινού τη λεγόμενη « **Φυσική χωρίς το \hbar** »³. Ο όρος προέρχεται από την θεμελιώδη φυσική σταθερά \hbar που η κβαντική θεωρία εισάγει στην περιγραφή όλων των φυσικών φαινομένων. Η σταθερά \hbar για την Κβαντική Θεωρία έχει ρόλο εξ ίσου θεμελιώδη με το ρόλο της σταθεράς c (ταχύτητα του φωτός) στην θεωρία της Σχετικότητας. Η σταθερά \hbar συνδέεται με την περίφημη **σταθερά του Planck** $h = 6.625 \times 10^{-34}$ J sec, με τη σχέση $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ και η αριθμητική τιμή της είναι :

$$\hbar = 1.0546 \times 10^{-34} \text{ J sec}$$

Η πολύ μικρή τιμή αυτής της σταθεράς είναι υπεύθυνη για το ότι τα κβαντικά φαινόμενα δεν παρατηρούνται συνήθως σε σώματα μακροσκοπικών διαστάσεων. Επειδή η ακτίνα του ατόμου του υδρογόνου, καθώς και των άλλων ατόμων, εξαρτάται από την σταθερά του Planck, το κριτήριο για την αρχή της αντιστοιχίας ($d \gg a_0$) βασισμένο στο μέγεθος της ακτίνας του ατόμου του υδρογόνου ($a_0 \approx 0.52 \text{ \AA}$) συνδέεται με το μέγεθος αυτής της σταθεράς (\hbar). Όπως θα δούμε αργότερα, η διατύπωση της αρχής της αντιστοιχίας με βάση την σταθερά \hbar είναι πολύ πιο γενική και ακριβής, γιατί υπάρχουν μερικά χαρακτηριστικά κβαντικά φαινόμενα, όπως η υπεραγωγιμότητα, τα οποία

² Βλέπε την εισαγωγική συζήτηση στο Κεφάλαιο 1 για τους θεμελιώδεις νόμους της Κλασικής Φυσικής και την μαθηματική έκφρασή τους μέσω Διαφορικών Εξισώσεων.

³ Ο αγγλικός όρος είναι « Non \hbar physics ».

εκδηλώνονται σε μακροσκοπική κλίμακα και τα οποία δεν είναι δυνατόν να περιγραφούν από την κλασική φυσική.

Η Κβαντική θεωρία, που ξεκίνησε την ίδια περίπου εποχή με την ειδική θεωρία της σχετικότητας (1905), εξελίχθηκε και ολοκληρώθηκε διαδοχικά σε **Κβαντομηχανική, Σχετικιστική Κβαντομηχανική και Κβαντική Θεωρία Πεδίου**. Η κβαντική θεωρία από τις αρχές του 20ου αιώνα μέχρι την πλήρη θεμελίωση της **Κβαντομηχανικής** εικοσιπέντε περίπου χρόνια αργότερα, είναι γνωστή ως **παλαιά Κβαντική Θεωρία**. Η παλαιά Κβαντική θεωρία περιέχει ένα πολύ μεγάλο μέρος από τη Φυσική και τον πλούτο των ιδεών της Κβαντομηχανικής, χωρίς τον σύνθετο μαθηματικό φορμαλισμό της τελευταίας. Για το λόγο αυτό, η παλαιά Κβαντική Θεωρία θα μας απασχολήσει για ένα σχετικά μεγάλο μέρος (Κεφάλαια 2 και 3), στις αρχές του μαθήματος. Αυτή η κάπως εκτεταμένη συζήτηση της παλαιάς κβαντικής θεωρίας θα επιφέρει και ένα πρόσθετο κέρδος επειδή θα διευκολύνει την παρακολούθηση της ιστορικής διαδρομής και της εξέλιξης των ιδεών της θεωρίας των Κβάντα.

Σήμερα, κάτω από το γενικό όρο **“Κβαντική Θεωρία”** (ή, ορθότερα, “Κβαντικές Θεωρίες”) περιλαμβάνονται:

Η (μη σχετικιστική) κβαντομηχανική, που αποτελεί, όπως είδαμε, την ώριμη, θεμελιωμένη μορφή της “παλαιάς κβαντικής θεωρίας”. Η κβαντομηχανική είναι μια σχετικά πλήρης φυσική θεωρία για την περιγραφή σωματιδίων του μικρόκοσμου (δηλαδή σωματιδίων με “διάμετρο” d μικρότερη από 1\AA , $d < 1\text{\AA}$) που κινούνται με ταχύτητες πολύ μικρότερες από την ταχύτητα c του φωτός.

Η σχετικιστική κβαντομηχανική, η οποία συνδυάζει τις βασικές αρχές της κβαντομηχανικής και της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας. Η θεωρία αυτή δημιουργήθηκε για την περιγραφή σωματιδίων του μικρόκοσμου με ταχύτητες (μικρότερες βέβαια, αλλά) όχι αμελητέες ως προς τη c .

Η κβαντική θεωρία πεδίου, που χρησιμεύει κυρίως για την περιγραφή αλληλεπιδράσεων μεταξύ σωματιδίων του μικρόκοσμου κατά τις οποίες μεταβάλλεται η φύση ή/και το πλήθος των σωματιδίων. Κατά τις αλληλεπιδράσεις αυτές συμβαίνουν μετατροπές ενέργειας σε ύλη και αντιστρόφως (όπως προβλέπει η ειδική θεωρία της σχετικότητας) και επομένως η πρακτικά χρησιμότερη μορφή της θεωρίας αυτής είναι σχετικιστική. Η μεγάλη επιτυχία της κβαντικής θεωρίας πεδίου είναι η **ακριβέστατη** κβαντική περιγραφή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και της αλληλεπίδρασης των

ηλεκτρονίων μ' αυτό . Το μέρος αυτό της κβαντικής θεωρίας πεδίου ονομάζεται **κβαντική ηλεκτροδυναμική** .

Η κβαντική βαρύτητα , η οποία συνδυάζει τη γενική θεωρία της σχετικότητας με την κβαντική θεωρία πεδίου . Η θεωρία αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην κοσμολογία για την περιγραφή των αρχικών σταδίων στην εξέλιξη του σύμπαντος .

Σ' αυτό το βιβλίο θα ασχοληθούμε κυρίως με τις πρώτες μορφές της κβαντικής Θεωρίας (παλαιά κβαντική θεωρία και μη σχετικιστική κβαντομηχανική) . Έτσι , από εδώ και στο εξής “ **ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ** “ για μας πρακτικά σημαίνει : **παλαιά κβαντική θεωρία και μη σχετικιστική κβαντομηχανική**. Όπου και όταν χρειάζεται, θα περιλάβουμε «διορθώσεις» που απορρέουν από την θεωρία της Σχετικότητας. Ευτυχώς, η ποικιλία και ο πλούτος των φαινομένων που μπορούμε έτσι να εξετάσουμε είναι πάρα πολύ μεγάλος και καλύπτει όλη την γκάμα της Σύγχρονης Φυσικής και Χημείας. Στο διάγραμμα [1.1] συνοψίζεται η εννοιολογική διαίρεση της σύγχρονης φυσικής καθώς και η λογική και η ιστορική σύνδεση μεταξύ των μερών της.

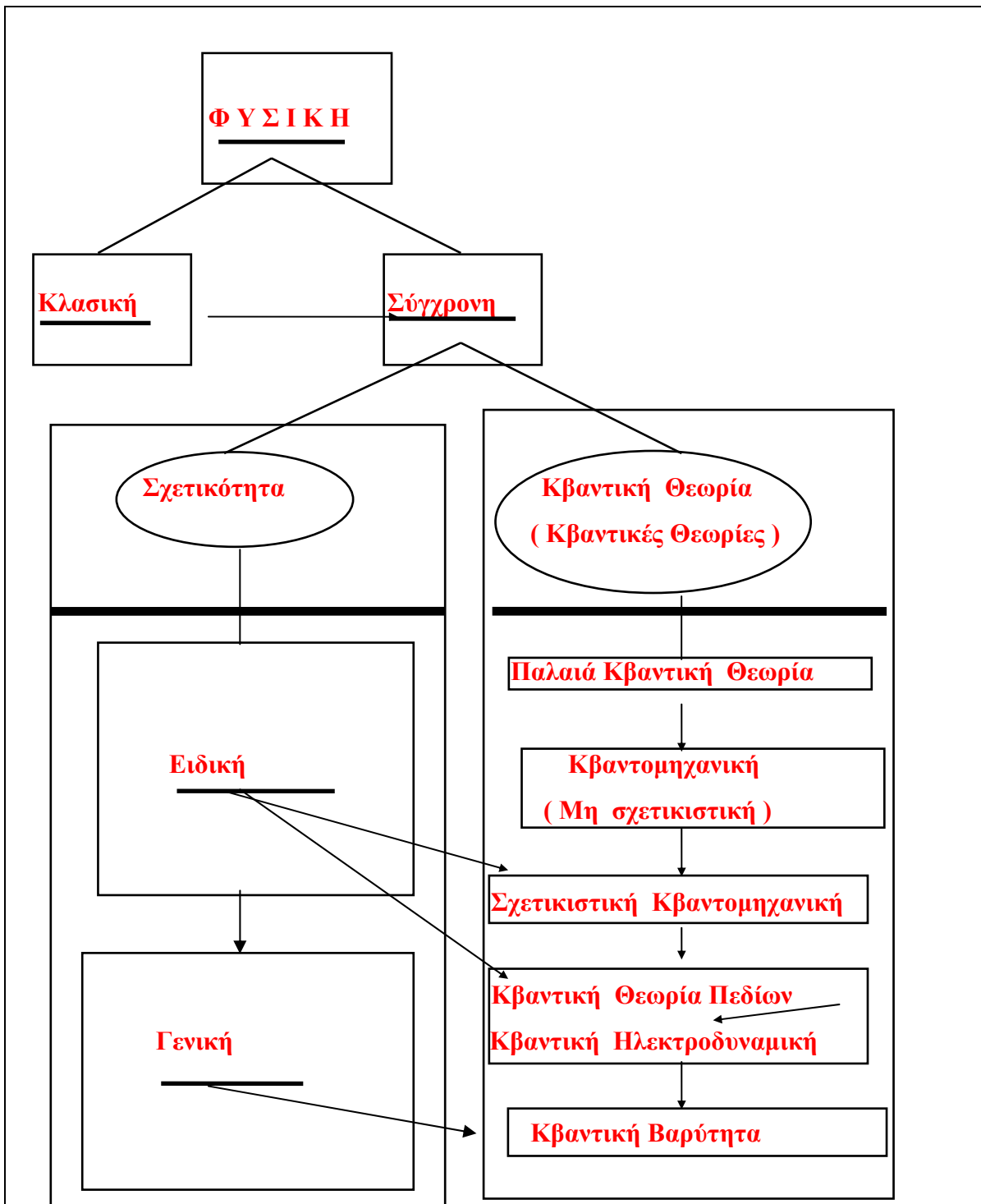
1.2 Στόχοι και μεθοδολογία του μαθήματος

Ο πρώτος σημαντικός στόχος του μαθήματος είναι να εισαγάγει και θεμελιώσει την Κβαντική Θεωρία και Κβαντομηχανική σε ικανοποιητικό επίπεδο γι' αυτό τον κύκλο σπουδών . Θα μπορούσαμε , σ' αυτό τον στόχο, να βάλουμε την επικεφαλίδα « **Η Κβαντική Θεωρία Αυτή Καθεαυτή** ». Ο δεύτερος εξ ίσου ή και περισσότερο σημαντικός στόχος είναι η δυνατότητα και ευχέρεια εφαρμογής της Κβαντικής περιγραφής σε μια μεγάλη ποικιλία φαινομένων της Φυσικής και της Χημείας . Με άλλα λόγια , η επικεφαλίδα σ' αυτό τον στόχο είναι : « **Η Κβαντική Θεωρία ως εργαλείο** ». Η επιτυχία καθενός από τους δύο αυτούς στόχους αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση και ταυτόχρονα κριτήριο για την επιτυχία του άλλου. Η χρήση και εφαρμογή της Κβαντομηχανικής στην περιγραφή του Φυσικού Κόσμου θα αρχίσει εδώ και θα επεκταθεί στο υπόλοιπο αυτού του κύκλου σπουδών, αφού **η Κβαντομηχανική είναι η καρδιά και το πλαίσιο ΟΛΗΣ της Σύγχρονης Φυσικής** . Έτσι, εκτός των δύο άλλων στόχων, το μάθημα θα χρησιμεύσει και ως βασική υποδομή για τα υπόλοιπα μαθήματα αυτού του κύκλου. Πολλές φορές δίνεται έμφαση σε **εκτιμήσεις τάξης μεγέθους**, βασικών ποσοτήτων που προκύπτουν με πολύ λίγο κόπο. Εκτιμήσεις αυτού του είδους πέρα από την διαστατική ανάλυση, που είδαμε στο κεφάλαιο 6 του τόμου «Μια σύγχρονη

ματιά στην Κλασική Φυσική» βασίζονται στην ευρηματική χρήση της «**αρχής της αβεβαιότητας**» καθώς και άλλες μεθόδους, περισσότερο ή λιγότερο «αυστηρές»⁴.

⁴Συγκρίνετε για παράδειγμα την μέθοδο της Διαστατικής Ανάλυσης, όπως την περιγράψαμε νωρίτερα στο δεύτερο κεφάλαιο του τόμου «Από την Κλασική στη Σύγχρονη Φυσική» για να βρούμε την κλασική συνάρτηση φασματικής κατανομής του μέλανος σώματος ή την κλασική ακτίνα του ατόμου του υδρογόνου, με την κβαντική εκτίμηση της ατομικής ακτίνας, όπως θα περιγραφεί αργότερα σ' αυτόν τον τόμο. Η κβαντική εκτίμηση βασίζεται στην ευρηματική, αλλά όχι κατ' ανάγκην αυστηρή, χρήση της αρχής της αβεβαιότητας για ποσοτικές και ποιοτικές εκτιμήσεις.

Το επίθετο «αυστηρές» σημαίνει ότι κάθε έννοια είναι ακριβώς ορισμένη και κάθε βήμα προκύπτει με λογική αναγκαιότητα από τα προηγούμενα. Σε μια «μη αυστηρή» μέθοδο χρησιμοποιούμε, εκτός από τη λογική, και τη διαίσθηση και τη φαντασία μας και γι αυτό τα συμπεράσματα είναι επισφαλή. Αν τα συμπεράσματα αυτά επιβεβαιωθούν πειραματικά τότε, σε μια πιο ώριμη μορφή της Θεωρίας, επιδιώκουμε να πάρουμε τα ίδια (ή τα ίδια περίπου) συμπεράσματα με μία «αυστηρή» διαπραγμάτευση. Για όσους έχουν ακόμη αμφιβολία για το τι σημαίνει «μη αυστηρή περιγραφή» συνιστάται το ανέκδοτο της επομένης υποσημείωσης.



Διάγραμμα 1.1

Διαίρεση της Σύγχρονης Φυσικής .

Οι γραμμές με βέλη δείχνουν τι προήλθε από τι κατά την ιστορική εξέλιξη της Φυσικής , ενώ οι γραμμές χωρίς βέλη δείχνουν τι υπάρχει που και συνθέτουν ένα σχήμα ταξινόμησης των διαφόρων κλάδων . Το αριστερό μέρος του διαγράμματος αποτελεί την

Φυσική χωρίς το \hbar .

Σε αρκετές περιπτώσεις τέτοιου είδους εκτιμήσεις και συμπεράσματα μπορεί να αποτελούν το 70-80% της πληροφορίας που επιθυμούμε, ενώ για το υπόλοιπο 20-30% να απαιτείται δυσανάλογα μεγάλος όγκος υπολογισμών. Η κλίμακα «ποσόν κόπου» - «ποσόν αποτελέσματος» δεν είναι γραμμική αλλά μάλλον λογαριθμική!..

Αξίζει να αναφερθεί πως αυτές οι τελευταίες, λίγο-πολύ χιουμοριστικές, προτάσεις παραπάνω, αποτελούν τυπικό παράδειγμα μη αυστηρής διατύπωσης, δεδομένου ότι γεννούν εύλογα ερωτήματα (που δεν έχουν απάντηση) όπως π.χ. Πως προσδιορίζουμε ένα ποσοστό πληροφορίας; Με ποιο αριθμό και σε τι μονάδες εκφράζεται ένα «ποσόν κόπου» και ένα «ποσόν αποτελέσματος»; Τέτοιες μη αυστηρές προτάσεις, όταν κάποιος τις χρησιμοποιεί στον προφορικό λόγο χρειάζεται πολλές φορές να τις συνοδεύει και με κατάλληλες κινήσεις των χεριών του με κίνδυνο να χαρακτηριστεί ως «μη-gentleman» κατά το γνωστό ανέκδοτο⁵. Παρ' όλα αυτά, τέτοιου είδους επιχειρήματα, είναι πολλές φορές πολύ χρήσιμα από παιδαγωγικής τουλάχιστον άποψης, επειδή αναδεικνύουν εύκολα και γρήγορα σύνθετες και δύσκολες έννοιες. Αρκεί βέβαια να υπάρχει προειδοποίηση. Κάνοντας χρήση (με χιουμοριστικό τρόπο και αυτή τη φορά) μιας τέτοιου είδους επεξηγήσεως, θα μπορούσαμε ίσως να διατυπώσουμε μια ακόμη αρχή αβεβαιότητας άλλου τύπου. Η αρχή αυτή σε πολύ ελεύθερη διατύπωση θα μπορούσε να λέει ότι «όσο περισσότερο κερδίζουμε σε ευκολία κατανόησης τόσο περισσότερο μπορεί να χάνουμε σε ακριβολογία και γενικότητα»!... Είναι πάντως προφανές, ότι η ακριβέστερη σαφέστερη και περιεκτικότερη περιγραφή δίνεται στη μαθηματική γλώσσα, όταν η γνώση των αναγκαίων μαθηματικών τεχνικών είναι επαρκής, και όταν έχει γίνει απόλυτα κατανοητή η αντιστοιχία μεταξύ μαθηματικών συμβόλων και φυσικής πραγματικότητας. Αυτές οι προϋποθέσεις δεν είναι πάντα εύκολο να πληρούνται, ιδίως στα πρώτα έτη σπουδών. Όμως, σε περιπτώσεις επαναλήψεων και ανασκοπήσεων όπου η φυσική πραγματικότητα και το μαθηματικό υπόβαθρο είναι ήδη γνωστά από προηγούμενα μαθήματα, η έμφαση μπορεί να μετατοπίζεται κατά τι προς την ακριβέστερη και γενικότερη μαθηματική διατύπωση των θεμελιωδών σχέσεων. Τα συγγράμματα *«Μια σύγχρονη ματιά στην Κλασική Φυσική»* και *«Μαθηματική Σύνοψη και Συμπλήρωμα»* του υποφαινομένου προσπαθούν να καλύψουν εν μέρει αυτά τα κενά γι αυτό και προηγούνται θεωρούμενα

σαν προαπαιτούμενα σ' αυτόν τον τόμο. Το ίδιο συμβαίνει, σε μικρότερο ίσως βαθμό, με τον τόμο **«Κοσμική Φυσική και Ταλαντώσεις με στοιχεία Γεωμετρικής Οπτικής»**, ο οποίος προετοιμάζει (ιδιαίτερα με τα κεφάλαια 4-6) την κυματική εξίσωση του Schrodinger. Στο πρώτο τόμο της σειράς, δηλαδή το πρώτο μέρος της Κβαντικής Φυσικής (παλαιά Κβαντική θεωρία) καταβάλλεται μια ιδιαίτερη προσπάθεια ώστε το μαθηματικό επίπεδο να είναι όσο γίνεται απλό και γενικό, με ταυτόχρονη έμφαση στο φυσικό περιεχόμενο και την βαθύτερη κατανόησή του .

Στα περισσότερα κεφάλαια περιλαμβάνονται **πίνακες με την μορφή λογικών διαγραμμάτων** (όπως το διάγραμμα [1.1] του προηγούμενου εδαφίου) που στόχο έχουν να περιγράφουν συνοπτικά την αλληλουχία και να συσχετίζουν εννοιολογικά τα περιεχόμενα των αντιστοίχων κεφαλαίων . Σε μελλοντικές εκδόσεις του βιβλίου σε ηλεκτρονική μορφή τα διαγράμματα αυτά θα χρησιμεύσουν επιπλέον για να διευκολύνουν την (ηλεκτρονική) αναζήτηση. Στο ίδιο πνεύμα, σε αρκετά υποκεφάλαια και ενότητες, υπάρχουν λογικά διαγράμματα που σκιαγραφούν τα λογικά (ή μαθηματικά) βήματα στη παρουσίαση (ή στην απόδειξη) σύνθετων και σημαντικών φαινομένων (ή σχέσεων).

Είναι πολύ πιθανόν ότι αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο, με τις γενικότητες που περιέχει, θα δημιουργήσει περισσότερες ερωτήσεις παρά απαντήσεις. Αυτή η περίπτωση δεν θα πρέπει να μας ανησυχεί ιδιαίτερα μια που ο στόχος μας ήταν ακριβώς αυτός: Να βοηθήσει στον σχηματισμό και στην κατάλληλη διατύπωση δημιουργικών ερωτημάτων. Άλλωστε πρέπει να είναι γνωστό πως ο ΔΡΟΜΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΟΦΙΑ ΞΕΚΙΝΑΕΙ ΜΕ ΑΠΟΡΙΕΣ ΚΑΙ (ΚΑΤΑΛΛΗΛΕΣ) ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ⁶ .

Πίνακας 1.1 ΤΑΞΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ : (1) Μήκος L

	Χαρακτηριστικά μήκη σε μέτρα m
10^{26}	"Ακτίνα του ορατού Σύμπαντος" Απόσταση από τη γη του πιο απομακρυσμένου (κβάζαρ)
10^{25}	Απόσταση από τη γη του πιο απομακρυσμένου Γαλαξία
10^{22}	Απόσταση από τη γη του πιο κοντινού Γαλαξία (Ανδρομέδα)

⁵Σύμφωνα με το παλιό αυτό ανέκδοτο «Gentleman» είναι κάποιος που μπορεί να περιγράψει την Σοφία Λόρεν χωρίς να χρησιμοποιήσει τα χέρια του. Μοντέρνες παραλλαγές εξαρτώνται από προσωπικές προτιμήσεις .

⁶ Οι Απαντήσεις είναι άλλο θέμα ! ...

10^{20}	Μέγεθος του Γαλαξία μας (μέση διάμετρος)
10^{16}	Απόσταση του πλησιέστερου απλανούς αστέρος
10^{11}	Απόσταση Γης - Ηλίου
10^9	Ακτίνα του Ηλίου
10^7	Ακτίνα της Γης
10^2	Μέγεθος ενός γηπέδου ποδοσφαίρου
10^0	Ύψος ανθρώπου
10^{-2}	Διάμετρος συνηθισμένου κέρματος
10^{-4}	Μέγεθος μικροσκοπικών κόκκων σκόνης
10^{-5}	Μέγεθος κυττάρων των ζωντανών οργανισμών
10^{-6}	Μέγεθος βακτηριδίων
10^{-7}	Μήκος κύματος ορατών οπτικών κυμάτων (φως)
10^{-8}	Μέγεθος συνηθισμένων ιών (μικροβίων)
10^{-10}	Διάμετρος του ατόμου υδρογόνου
10^{-15}	Διάμετρος του ατομικού πυρήνα
10^{-19}	Διάμετρος του Κουάρκ;

Πίνακας 1.2 ΤΑΞΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ: (2) Χρόνος t

	Χαρακτηριστικοί χρόνοι σε sec
10^{18}	Ηλικία του Σύμπαντος
10^{17}	Ηλικία της Γης
10^{11}	Χρόνος από την γέννηση του Χριστού
10^9	Χρόνος ζωής του ανθρώπου
10^7	Ένα έτος
10^5	Μια ημέρα

10^0	Χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών κτύπων της καρδιάς του ανθρώπου
10^{-3}	Περίοδος ακουστικών κυμάτων (ακουστών από τον άνθρωπο)
10^{-6}	Περίοδος ραδιοφωνικών κυμάτων
10^{-15}	Περίοδος ορατών οπτικών κυμάτων
10^{-13}	Περίοδος ταλάντωσης ατόμων σε μόρια
10^{-23}	Χρόνος ζωής των πιο βραχύβιων υποατομικών σωματιδίων που ονομάζονται "συντονισμοί"

Πίνακας 1.3 ΤΑΞΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ: (3) Μάζα m

Χαρακτηριστικές μάζες σε Kgr	
10^{52}	Μάζα του σύμπαντος
10^{42}	Μάζα του Γαλαξία μας
10^{30}	Μάζα του Ηλίου
10^{25}	Μάζα της Γης
10^{23}	Μάζα της Σελήνης
10^8	Μάζα του Υπερωκεανίου Τιτανικός
10^2	Μάζα Ανθρώπου
10^{-2}	Μάζα ενός κέρματος
10^{-15}	Μάζα βακτηριδίου
10^{-27}	Μάζα Πρωτονίου
10^{-31}	Μάζα ηλεκτρονίου

Πίνακας 1.4 ΤΑΞΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ : (4) Ενέργεια E

Τυπικές Ενέργειες :		
Joule	eV	
10^{47}	10^{66}	Ενέργεια που αντιστοιχεί στη μάζα του Ηλίου
10^{35}	10^{54}	Συνολική ετήσια θερμική ακτινοβολία του Ηλίου

10^{17}	10^{36}	Ενέργεια που αποδίδει η σχάση 1Kgr Ουρανίου
10^{10}	10^{29}	Ενέργεια που αποδίδει η καύση ενός τόνου πετρελαίου
10^7	10^{26}	Ημερήσια Εργασία ενός εργάτη οικοδομής
10^3	10^{22}	Ημερήσια Εργασία ενός φοιτητή
10^0	10^{19}	Ανύψωση 1kgf κατά 1m
10^{-3}	10^{16}	Φτερούγισμα μιάς μέλισσας
10^{-9}	10^{10}	Ενέργεια που αποδίδει η σχάση ενός ατόμου ουρανίου
10^{-13}	10^6	Ενέργεια ενός φωτονίου ακτίνων γ
10^{-18}	10^1	Ενέργεια ιονισμού του ατόμου του υδρογόνου
10^{-19}	10^0	Ηλεκτροστατική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου σε δυναμικό 1Vol t Μεταβολή ενέργειας ανά άτομο σε συνήθειες χημικές αντιδράσεις Ενέργεια ενός φωτονίου ορατής ακτινοβολίας
10^{-21}	10^{-2}	Θερμική ενέργεια που αντιστοιχεί σε θερμοκρασία 20° C
10^{-23}	10^{-4}	Θερμική ενέργεια που αντιστοιχεί σε θερμοκρασία 1° K
10^{-26}	10^{-7}	Ενέργεια ενός φωτονίου που αντιστοιχεί στα ραδιοφωνικά κύματα FM

Κάτι που δεν θα έπρεπε ίσως να αφήσουμε ασχολίαστο , παρατηρώντας τους πίνακες 1.1 και 1.2 , είναι το σχετικό μέγεθος και ο σχετικός χρόνος ζωής του ανθρώπου . Βλέπουμε, πως ενώ σε διαστάσεις είμαστε κάπου παρακάτω από τα μισά της (λογαριθμικής) κλίμακας μήκους, ο χρόνος ζωής μας βρίσκεται πολύ παραπάνω από τα μισά της κλίμακας χρόνου .

Σε σχέση με τα στοιχειώδη σωματίδια το σχετικό μέγεθος μας είναι πολύ μεγάλο , της τάξεως του 10^{15} , ενώ σε σχέση με την ακτίνα του σύμπαντος το σχετικό μέγεθος μας είναι πάρα πολύ μικρό , της τάξεως του 10^{-26} . Δηλαδή , η ακτίνα του σύμπαντος μετρούμενη σε ανθρώπινο ύψος είναι πολύ μεγαλύτερη από το ύψος του ανθρώπου μετρούμενο σε ακτίνες των στοιχειωδών σωματιδίων . Με άλλα λόγια , είμαστε πολύ

πιο μικροί από το σύμπαν σε σχέση με το πόσο πιο μεγάλοι είμαστε από τα στοιχειώδη σωματίδια .

Αντίθετα στην κλίμακα του χρόνου είμαστε από τα μακροβιότερα σχετικά «σώματα» . Σε σχέση με τα πιο «βραχύβια σωματίδια ο σχετικός χρόνος της ζωής μας είναι $10^9/10^{-23} = 10^{32}$ φορές μεγαλύτερος , ενώ σε σχέση με την ηλικία του σύμπαντος ο χρόνος ζωής μας είναι μόνο (!) ένα δισεκατομμύριο φορές μικρότερος (σχετική ηλικία 10^{-9}) . Έτσι , η ηλικία του σύμπαντος μετρούμενη σε ανθρώπινες ζωές είναι κατά πολύ μικρότερη από την δική μας ηλικία μετρούμενη σε «σωματιδιακές» ζωές . Δεν είμαστε , λοιπόν τόσο εφήμεροι όσο νομίζαμε .

Ίσως αυτή η διαπίστωση μας κάνει να ατενίζουμε με μεγαλύτερη αισιοδοξία το μέλλον

1.3 ΜΕΡΙΚΕΣ ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ ΓΙΑ ΠΑΡΑΠΕΡΑ ΜΕΛΕΤΗ⁷

Α. Από τα έργα του ιδίου συγγραφέα :

1) *«Μια σύγχρονη ματιά στην Κλασική Φυσική», ΕΑΠ (2002)*

(εν συντομία Κλασική Φυσική ή ΣΚΦ)

2) *«Κυματική Φυσική και Ταλαντώσεις με στοιχεία Γεωμετρικής Οπτικής», ΕΑΠ (2002).*

(εν συντομία Κυματική-Ταλαντώσεις)

3) *«Μαθηματική Σύνοψη και Συμπλήρωμα», ΕΑΠ (2002)*

(εν συντομία Μαθηματικό Συμπλήρωμα)

4) *«Κβαντική Φυσική II» , ΕΑΠ (2003)*

(εν συντομία Κβαντική II)

5) *«Κβαντική Δομή της Ύλης» ΕΑΠ (2003)*

(εν συντομία Κβαντική III)

Β. Στην Ελληνική γλώσσα:

Β.α) Διδακτικά φοιτητικά βιβλία

⁷ Όπως αναφέρεται και παρακάτω ο γενικός αυτός κατάλογος δεν είναι πλήρης. Όπου απαιτείται, θα υπάρχει επιμέρους ειδικότερη βιβλιογραφία για κάποιο συγκεκριμένο κεφάλαιο, στο τέλος του κεφαλαίου.

6) **R.A.Serway**, «*Physics for Scientists and Engineers*», **ΤΟΜΟΣ IV, ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΦΥΣΙΚΗ**. Απόδοση στα ελληνικά: **Α. Κ. Ρεσβάνης (1993)**. Η ύλη της Κβαντικής Θεωρίας αρχίζει από το τέταρτο κεφάλαιο και μετά.

7) **K.W.Ford**, «*Classical and Modern Physics*», **Κλασική και Σύγχρονη Φυσική**», **ΤΟΜΟΣ ΤΡΙΤΟΣ**. Μετάφραση: **Γ.Θεοδώρου-Α.Θεοδώρου**. Εκδότης: **Γ. Πνευματικός, Αθήνα (1980)**. Από το κεφάλαιο 23 και μετά .

8) **H.D.Young**, «*University Physics*», **Πανεπιστημιακή Φυσική**», **ΤΟΜΟΣ Β**, Απόδοση στα ελληνικά: **Ε. Αναστασάκης κ.α**. Μόνο το τμήμα της Σύγχρονης Φυσικής - Κβαντικής Θεωρίας.

Τα πανεπιστημιακά συγγράμματα 1 , 2 και 3 αποτελούν σειρές που καλύπτουν όλη την προπτυχιακή Γενική Φυσική .

9) **R.A. Serway, C.M. Moses, C.A. Moyer** «*Σύγχρονη Φυσική*» Απόδοση στα ελληνικά, **Σ. Παπαδόπουλος κ.α**. **Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2000**. Σχετικά πρόσφατο σύγγραμμα στην ελληνική γλώσσα . Το πρώτο κεφάλαιο καλύπτει συνοπτικά την Θεωρία της σχετικότητας.

10) **Σ. Τραχανάς**, « **ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ I**», **Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Πέμπτη Έκδοση (1991)**. , και

11) **Σ. Τραχανάς**, « **ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ II , III** », **Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης** .

Γλαφυρά και καλογραμμένα και τα τρία βιβλία είναι ιδιαίτερα κατάλληλα και για κατ' ιδίαν μελέτη . Σχεδόν κλασικά στο είδος για την ελληνική βιβλιογραφία.

12) **Χρ. Γ. Γεωργαλά**, «*Εισαγωγή στην Κβαντομηχανική*» **Τόμος α και β , Πάτρα**. Από τα πρώτα καλά πανεπιστημιακά συγγράμματα Κβαντομηχανικής στην ελληνική γλώσσα .

B.β)Βιβλία με ελάχιστο ή καθόλου μαθηματικό φορμαλισμό :

13) **L.Epstein** «*Στις γειτονίες της Φυσικής, με απαντήσεις*», **Τόμος Β, ΚΑΤΟΠΤΡΟ, Αθήνα, (1988)**. Το κεφάλαιο 8 είναι το κομμάτι που ασχολείται με την Κβαντομηχανική. Όμως, και τα υπόλοιπα κεφάλαια καθώς και ο πρώτος τόμος, είναι πολύ χρήσιμα και ταυτόχρονα διασκεδαστικά

14) **P.G.Hewitt**, «*Conceptual Physics*». **Οι Έννοιες της Φυσικής**». **β τόμος**. **Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο (1992)**.

Στην ίδια κατηγορία με το προηγούμενο (7) . Αν και ο δεύτερος τόμος έχει τη μεγίστη επικάλυψη με την ύλη του μαθήματος, θα συνιστούσα θερμά και τον πρώτο τόμο.

16) T. Hey & P. Walters «Το Κβαντικό Σύμπαν» , εκδόσεις Κάτοπτρο, Αθήνα (1990)

Καλύπτει με απλό και περιεκτικό τρόπο όλα τα «θεαματικά» φαινόμενα και αποτελέσματα της Κβαντικής θεωρίας , χωρίς καθόλου ή με ελάχιστα μαθηματικά.

17) E. N. Οικονόμου, «Η ΦΥΣΙΚΗ ΣΗΜΕΡΑ Ι. ΤΑ ΘΕΜΕΛΙΑ». Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο (1992). Αν και το Μέρος Β ασχολείται με την «Κβαντική Αναδόμηση» ολόκληρο το βιβλίο συνιστάται θερμά. Στο τέλος υπάρχει και εκτενής κατάλογος γενικής βιβλιογραφίας.

18) R. Feynman, «Ο χαρακτήρας του φυσικού νόμου», Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο (1990). Παρουσίαση των βασικών χαρακτηριστικών των φυσικών νόμων, από ένα μεγάλο επιστήμονα και δάσκαλο

Για πολύ μικρά και πολύ μεγάλα παιδιά :

19) R. Stannard, «Ο Θεός Αλβέρτος και ο κόσμος των Κβάντων», Εκδόσεις Κάτοπτρο, Αθήνα (1995). Είναι γραμμένο για μικρά παιδιά, υπό μορφή παραμυθιού του τύπου «Η Αλίκη στη χώρα των θαυμάτων» χωρίς βέβαια τη λογοτεχνική αξία και συμβολισμό του αρχικού αριστουργήματος. Μπορεί να είναι διασκεδαστικό και χρήσιμο ίσως και για μεγαλύτερα παιδιά. Υπάρχουν παρόμοιοι τίτλοι από τον ίδιο συγγραφέα εξ ίσου διασκεδαστικοί και για άλλα θέματα της σύγχρονης φυσικής

20) Τζώρτζ Γκάμοφ, «Οι Περιπέτειες του κ. Τόμπκινς», Εκδόσεις Διάυλος, Αθήνα (1995) Καλύπτει «ζωντανά» με εντυπωσιακό τρόπο, σε μυθιστορηματική μορφή την Θεωρία της Σχετικότητας και την Κβαντική Θεωρία. Διδακτικό και διασκεδαστικό.

Γ. Στην Αγγλική γλώσσα

Στον κατάλογο των ξενόγλωσσων βιβλίων δεν περιλαμβάνονται όσα έχουν μεταφρασθεί στα ελληνικά και έχουν αναφερθεί ήδη

21) R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, «The Feynman Lectures on Physics», Volumes I, II, III. Addison-Wesley, Reading (1965).

Ο τρίτος τόμος περιέχει την ύλη της Κβαντικής Φυσικής. Όμως, και οι τρεις τόμοι είναι απαραίτητοι και αναντικατάστατοι για μία πλήρη , εννοιολογική και εις βάθος περιγραφή της Φυσικής. Η έμφαση είναι στη φυσική κατανόηση. Όλα τα θέματα, από τα απλούστερα μέχρι και τα πιο σύνθετα αναπτύσσονται με ένα μοναδικό γλαφυρό ύφος και κριτικό πνεύμα από έναν πολύ μεγάλο δάσκαλο και επιστήμονα, τιμημένο με το βραβείο Nobel

Φυσικής (το 1965). Πιστεύω, ότι δεν θα πρέπει να λείπει από τη βιβλιοθήκη κανενός φυσικού.

22) **R.Eisberg R.Resnick, «QUANTUM PHYSICS of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles» John Wiley Sons, New York (1974).** Από τα παλαιότερα «κλασικά» βιβλία του είδους. Πιθανόν να υπάρχουν πολύ νεώτερες εκδόσεις.

23) **A.P.French and E.F.Taylor, «An Introduction to Quantum Physics». The M.I.T. Introductory Physics Series. W.W.Norton Company, Inc. New York (1978).** Μέρος μίας γενικότερης σειράς εισαγωγικής φυσικής ενός πολύ γνωστού πανεπιστημιακού ιδρύματος των Η.Π.Α. Τα πρώτα έξη κεφάλαια αντιστοιχούν στην ύλη της Κβαντικής Φυσικής και Κβαντομηχανικής αυτού του μαθήματος.

24) **R. Gautreau, W.Savin, «Schaum's Outline Series». Theory and problems of MODERN PHYSICS». McGraw-Hill Book Company. NewYork (1978).** Περιέχει αρκετά αντιπροσωπευτικά προβλήματα.

25) **D. Brandt ,J. Hiller , M. Moloney , « Modern Physics Simulations. The Consortium for Upper-Level Physics Software ». . John Wiley & Sons , Inc NewYork (1995) .** Περιέχει δισκέτα με εύχρηστα και αντιπροσωπευτικά προγράμματα μαζί με μια συνοπτική περιγραφή της θεωρίας. Συνιστάται Ανεπιφύλακτα σαν συμπλήρωμα καθώς και τα υπόλοιπα βιβλία της σειράς.

26) **J. Hiller , I. Johnston , D. Styer , « Quantum Mechanics Simulations. The Consortium for Upper-Level Physics Software ». . John Wiley & Sons , Inc NewYork (1995) .** Περιέχει δισκέτα με εύχρηστα και αντιπροσωπευτικά προγράμματα μαζί με μια συνοπτική περιγραφή της θεωρίας , όπως και το (16) . Ανήκει στην ίδια σειρά . Συνιστάται Ανεπιφύλακτα σαν συμπλήρωμα .

27) **M.Jammer, «The Conceptual Development of Quantum Mechanics». Mc. Graw-Hill, New York (1966).** Κλασικό βιβλίο στο είδος του. Περιγράφει την εννοιολογική και ιστορική διαδρομή της Κβαντικής Θεωρίας. «Συμπλήρωμα» αυτού του βιβλίου, από τον ίδιο συγγραφέα, είναι το «THE PHILOSOPHY OF QUANTUM MECHANICS». *The Interpretations of Quantum Mechanics in Historical Perspective*. John Willy Sons, New York (1974).

Το Μαθηματικό υπόβαθρο και στα δύο βιβλία δεν είναι τόσο απλό όσο οι τίτλοι, ενδεχομένως, αφήνουν να εννοηθεί.

Θα πρέπει να τονισθεί ότι ο παραπάνω κατάλογος βιβλίων, πέρα από τα ειδικά για εξ αποστάσεως διδασκαλία συγγράμματα του Ε.Α.Π., τα οποία προηγούνται ή έπονται αυτού

του τόμου (παραπομπές 1-5) ούτε πλήρης είναι ούτε κατ' ανάγκη αντιπροσωπευτικός. Αντανακλά μερικές από τις προσωπικές προτιμήσεις του συγγραφέα και τους περιορισμούς που τίθενται εκ των πραγμάτων. Οι περιορισμοί αυτοί, πέρα από τους προφανείς περιορισμούς χώρου και χρόνου απορρέουν από τρία επιπλέον κριτήρια:

- α) Προτίμηση σε ελληνόγλωσση βιβλιογραφία
- β) Προτίμηση σε βιβλία που μπορούν εύκολα να βρεθούν .

γ) Προτίμηση σε όσο το δυνατόν αντιπροσωπευτικά βιβλία

διαφόρων τάσεων και επιπέδων .

και δ) Προτίμηση σε βιβλία που έχουν κάποια (σημαντική) επικάλυψη με την ύλη, τους στόχους και τη μεθοδολογία αυτού του βιβλίου .

Όσον αφορά την τελευταία προτίμηση, σε συνδυασμό και με τις α) και β), οι έξι πρώτες παραπομπές από την κατηγορία Β.α, δηλαδή οι παραπομπές 6-11, είναι πάρα πολύ ικανοποιητικές .

Ας έχουμε πάντως υπόψη πως η πραγματική μελέτη δεν τελειώνει ποτέ. Ούτε σ' ένα εξάμηνο, ούτε με ένα - δύο ή έστω και περισσότερα βιβλία. Αντίθετα, στο άλλο άκρο, οι ελάχιστες απαιτήσεις του μαθήματος και της αντίστοιχης θεματικής ενότητας (που προφανώς είναι άλλο πράγμα) ικανοποιούνται με ενεργό μελέτη αυτού του βιβλίου (και των άλλων βιβλίων της θεματικής ενότητας) καθώς και με την συστηματική μελέτη και λύση των ασκήσεων. Θέλω να ελπίζω πως, ανάμεσα στα δύο άκρα, ο αναγνώστης θα βρει για τον εαυτό του την χρυσή τομή

Περίληψη

Το εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο:

1^ο) Περιγράφει το περιεχόμενο της θεματικής ενότητας ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ. Στο Διάγραμμα [1.1], το περιεχόμενο αυτό αντιστοιχεί στα λογικά τετράγωνα της Παλαιάς Κβαντικής Θεωρίας και της (μη σχετικιστικής) Κβαντομηχανικής .

Η ύλη της θεματικής ενότητας συμπίπτει σε μεγάλο βαθμό με την ύλη συνηθισμένων βιβλίων :

(α) ΣΥΓΧΡΟΝΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ (Βλέπε γενικές παραπομπές 6-9) .

και (β) ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ και ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ (βλέπε γενικές παραπομπές 10 και 11) .

2^{ον}) Περιγράφει επίσης τους μακροπρόθεσμους στόχους και την μεθοδολογία του βιβλίου και της αντίστοιχης θεματικής ενότητας.

Στόχοι μας είναι η κατανόηση της Κβαντικής Θεωρίας σαν ΓΝΩΣΗ και σαν ΕΡΓΑΛΕΙΟ .

Η μεθοδολογία που ακολουθείται προσπαθεί να δώσει έμφαση στην Φυσική εικόνα με όσο το δυνατόν απλά επιχειρήματα.

& 3^{ον}) Καταγράφει μια επιλεγμένη γενική βιβλιογραφία (προαπαιτούμενη, επόμενη και συμπληρωματική) στην ελληνική και την αγγλική γλώσσα.

Ασκήσεις

2) Συμπληρώστε τα κενά στο παρακάτω κείμενο :

Η ----- ΘΕΩΡΙΑ που περιγράφεται σ' αυτή τη θεματική ενότητα αντιστοιχεί στην ----- κβαντική θεωρία και μη σχετικιστική ----- και είναι μέρος της ----- Φυσικής . Ένας στόχος της θεματικής ενότητας είναι η εκμάθηση της Κβαντικής ----- . Ο δεύτερος εξ ίσου σημαντικός στόχος είναι η ----- της Κβαντικής περιγραφής σε μια μεγάλη ποικιλία φαινομένων της Φυσικής και της ----- . Ένας απότερος, αλλά όχι λιγότερο σημαντικός, στόχος της θεματικής ενότητας είναι να αναδείξει την ----- εικόνα των προβλημάτων δίνοντας μεγάλη έμφαση στην ----- και στη διαφάνεια των επιχειρημάτων και αποδείξεων , αποφεύγοντας στο όριο του εφικτού τον πυκνό και αυστηρό μαθηματικό -- ----- .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΠΟΥ ΕΚΑΝΑΝ ΑΝΑΓΚΑΙΑ ΤΗΝ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

**Θεέ μου , Χάρισέ μου ΥΠΟΜΟΝΗ για να δέχομαι τα πράγματα που δεν μπορώ να αλλάξω , ΚΟΥΡΑΓΙΟ για να αλλάξω τα πράγματα που μπορώ, και ΣΟΦΙΑ για να γνωρίζω την διαφορά .
(Προσευχή , Αγνώστου)**

Εισαγωγή

Όπως είδαμε και στην εισαγωγή αυτού του βιβλίου , στις αρχές του 20ου αιώνα συνέβησαν δύο (τρεις αν περιλάβουμε χωριστά την Γενική θεωρία της σχετικότητας) επιστημονικές «επαναστάσεις» που συγκλόνισαν τα θεμέλια της Κλασικής Φυσικής :

Η θεωρία της σχετικότητας (ειδική και γενική) και η κβαντική θεωρία .

(ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ :

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι κατά μια συντηρητική ίσως άποψη η θεωρία της σχετικότητας, σε αντίθεση με την κβαντική θεωρία, δεν ήταν επανάσταση αλλά Ενοποίηση. Η μεν ειδική θεωρία της Σχετικότητας μπορεί να θεωρηθεί ως ενοποίηση της κλασικής Μηχανικής και του Ηλεκτρομαγνητισμού, η δε γενική θεωρία της Σχετικότητας ως ενοποίηση της κλασικής Μηχανικής με τη θεωρία της Βαρύτητας . Παρόμοια ενοποίηση είχε παλαιότερα επιφέρει η ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell , η οποία είχε ενοποιήσει τον ηλεκτρομαγνητισμό με την Οπτική . Τέλος , ένα άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα υπήρξε η ενοποίηση της Θερμοδυναμικής και της Στατιστικής Φυσικής μέσω της χαρακτηριστικής εξίσωσης του Boltzmann (σχέση 1.19) . Έτσι λοιπόν , η Θεωρία της Σχετικότητας (Ειδική και Γενική) θα μπορούσε να ενταχθεί με την ευρύτερη έννοια στο γενικό πλαίσιο της Κλασικής Φυσικής . Κάτι τέτοιο , δεν θα μπορούσε να γίνει με κανένα τρόπο για την κβαντική θεωρία η οποία από κάθε σκοπιά υπήρξε μια αληθινή επανάσταση που άλλαξε ριζικά τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε και περιγράφουμε τα φυσικά φαινόμενα . Έτσι έχουμε τον διαχωρισμό , που περιγράψαμε στην εισαγωγή , σε « Φυσική χωρίς το \hbar » και σε Κβαντική Φυσική .)

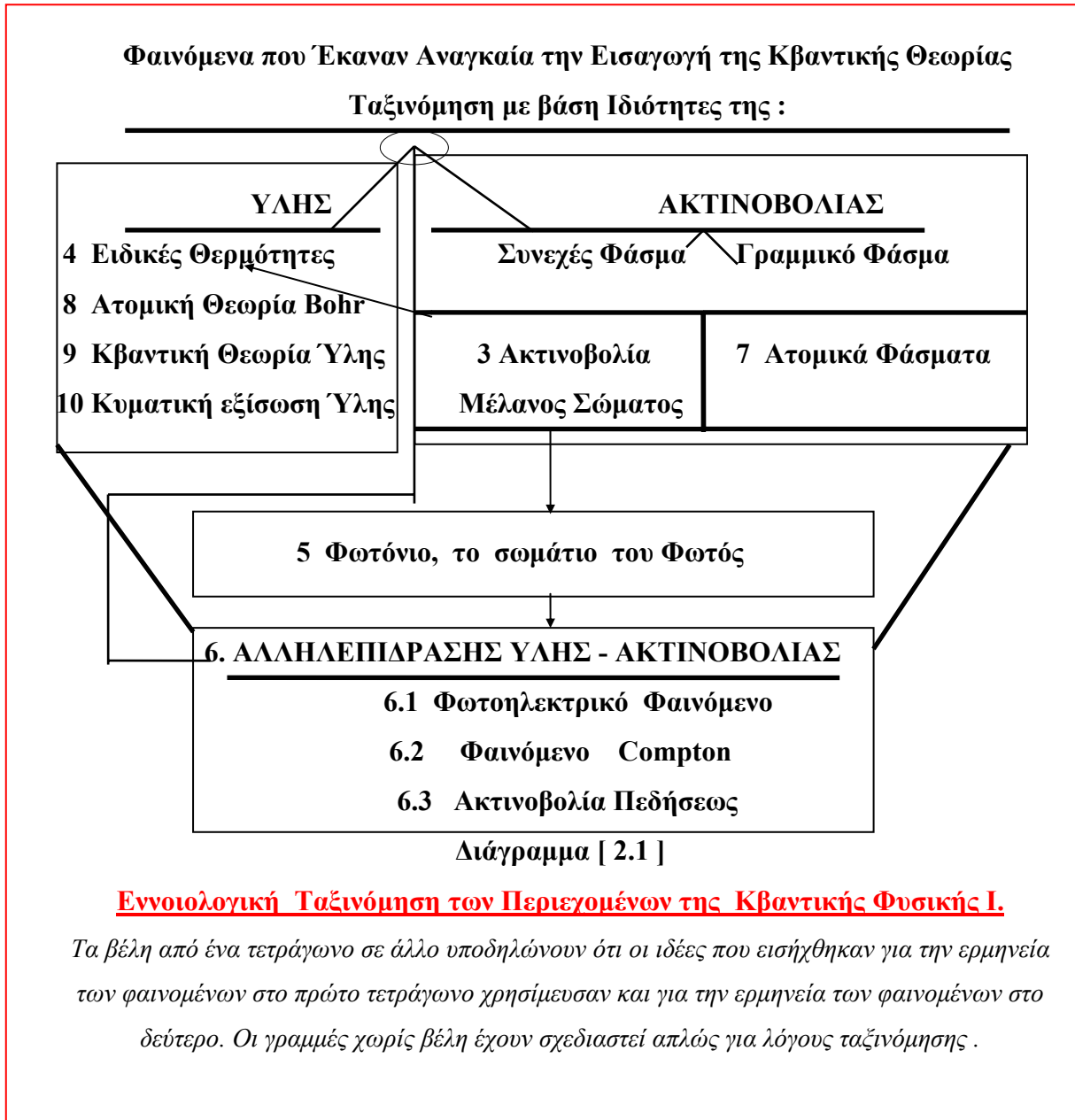
Σ' αυτό το κεφάλαιο θα περιγράψουμε περιληπτικά τα περισσότερα από τα φαινόμενα, που δεν ήταν δυνατό να ερμηνευθούν με βάση την κλασική φυσική και έτσι έγιναν αφορμή για την εισαγωγή της Κβαντικής θεωρίας. **Ουσιαστικά, στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται σε συμπτυκνωμένη, απλή και περιληπτική μορφή η ύλη ολόκληρου του βιβλίου.** Πολλά από τα φαινόμενα αυτά έχουν σχέση με την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία και την αλληλεπίδραση της με την ύλη. Δεσπόζουσα θέση ανάμεσα σ' αυτά

τα φαινόμενα, από ιστορικής πλευράς, έχει η ακτινοβολία που εκπέμπεται από ένα «μέλαν» (=μαύρο) σώμα. Η βασική έννοια που εισάγει η κβαντική θεωρία για την περιγραφή και ερμηνεία αυτού του φαινομένου (και των άλλων φαινομένων της ακτινοβολίας) είναι η έννοια του «κβάντου», της «διάκριτης» ελάχιστης δεσμίδας ενέργειας. Αρχικά η ιδέα της «κβάντωσης», η οποία έδωσε το όνομα στην «Κβαντική Θεωρία», εθεωρείτο ότι καθορίζει μόνο την αλληλεπίδραση της ακτινοβολίας με την ύλη. Αργότερα η «κβάντωση» επεκτάθηκε και στην ακτινοβολία αυτή καθαυτή (και όχι μόνο στις αλληλεπιδράσεις της με την ύλη) αλλά και στα υλικά σώματα. Τα περιεχόμενα αυτού του τόμου υποδιαιρούνται εννοιολογικά με βάση το τρίπτυχο ύλη, ακτινοβολία, αλληλεπίδραση ύλης-ακτινοβολίας, όπως περιγράφονται σχηματικά στο διάγραμμα 2.1 Όπως είναι προφανές, τα περιεχόμενα του διαγράμματος 2.1 καλύπτουν όλη την «παλαιά Κβαντική Θεωρία». Έτσι, ένας εναλλακτικός τίτλος αυτού του κεφαλαίου και ολόκληρου του τόμου θα μπορούσε κάλλιστα να είναι "τα νηπιακά χρόνια της κβαντικής θεωρίας".

ΑΣ ΘΥΜΗΘΟΥΜΕ ΑΠ' ΤΑ ΠΑΛΙΑ :

Σ' αυτό το σημείο ίσως, προτού ξεκινήσουμε τη μελέτη αυτού του βιβλίου, χρήσιμο είναι να υπενθυμίσουμε ότι οι παραπομπές 1-3 είναι αναγκαία προαπαιτούμενα αυτού του τόμου. Καλό θα ήταν να «φρεσκάρουμε» και να ξεκαθαρίσουμε όσες από τις θεωρούμενες «γνωστές» έννοιες κλειδιά δεν έχουμε ακόμη αρκετή ευχέρεια μαζί τους. Έτσι, πριν προχωρήσουμε στην μελέτη αυτού του λίγο-πολύ εισαγωγικού κεφαλαίου, θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμο να κάνουμε μια σύντομη επανάληψη με βάση τα βιβλία των παραπομπών 1-3. Ιδιαίτερα :

- 1) **Από Κλασική Φυσική .** Από α) την Θερμοδυναμική – Στατιστική Φυσική: Στατιστική *Maxwell-Boltzmann*, Θεώρημα *Ισοκατανομής*, *Γραμμομοριακή Θερμοχωρητικότητα*. Από τον Ηλεκτρομαγνητισμό (β): *Εξισώσεις Maxwell*, *Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα*, *ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία (από επιταχυνόμενα ηλεκτρικά φορτία)*. Και (δ) Διαστατική Ανάλυση .
- 2) **Ταλαντώσεις -Κύματα.** *Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης (κεφάλαια 4-5)* , *Στάσιμα Κύματα*, *Κυματική εξίσωση (κεφάλαια 1,6)* , *Θερμική ακτινοβολία.*



2.1 Ταξινόμηση με βάση το τρίπτυχο :

Ύλη, Ακτινοβολία, Αλληλεπίδραση Ύλης – Ακτινοβολίας.

Όπως είδαμε στις εισαγωγικές σημειώσεις αυτού του κεφαλαίου , τα περιεχόμενά του και τα παραδείγματα έχουν να κάνουν με μερικά από τα βασικά φαινόμενα που προετοίμασαν την εισαγωγή της κβαντικής θεωρίας . Ταυτόχρονα όμως αποτελούν στο μεγαλύτερο μέρος τους εισαγωγή στην κβαντική θεωρία της ακτινοβολίας. Ο όρος υποδηλώνει την κβαντική θεωρία των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων , σε αντιδιαστολή με την κβαντική θεωρία των υλικών σωματιδίων, που θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο .

Αυτός ο διαχωρισμός βασίζεται στην κλασική διάκριση σωματιδίων και κυμάτων ως των δύο μοναδικών φορέων μέσω των οποίων μπορεί να μεταφερθεί ενέργεια και ορμή μεταξύ δύο διαφορετικών σημείων του χώρου. Όταν η μεταφορά γίνεται μέσω ενός **σωματιδίου**, η ενέργεια και ορμή που μεταφέρεται είναι, σε κάθε χρονική στιγμή κατά τη διάρκεια της μεταφοράς, **εντοπισμένη** σε ένα σημείο ή σε μια μικρή περιοχή του χώρου που συμπίπτει με τη θέση που κατέχει τη στιγμή αυτή το σωματίδιο. Όταν η μεταφορά γίνεται μέσω ενός **κύματος** η μεταφερόμενη ενέργεια και ορμή είναι, σε κάθε χρονική στιγμή κατά τη διάρκεια της μεταφοράς, **«απλωμένη»** σε όλο το χώρο στον οποίο διαδίδεται το κύμα (**μη - εντοπισμένη**). Αξίζει να αναφερθεί πως αυτή η διάκριση (σε εντοπισμένη και μη εντοπισμένη μεταφορά ενέργειας και ορμής) δεν είναι πάντα εύκολο να γίνει με σαφήνεια σε περιπτώσεις που το υλικό μέσο είναι εκτεταμένο (όπως π.χ. ένα κρυσταλλικό στερεό σώμα⁸) ή το κύμα περιορισμένο (όπως π.χ. ένα κυματοπακέτο⁹)

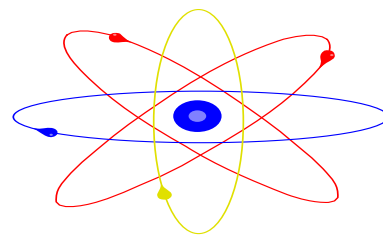
Φαινόμενα και πειράματα που σαφώς αναφέρονται σε ιδιότητες κλασικών υλικών σωματιδίων (όπως τα άτομα και τα ηλεκτρόνια) θα συζητηθούν σε επόμενα κεφάλαια (κεφάλαιο 8). Στο κεφάλαιο 4, θα περιλάβουμε κάποια «συγγενή» πειραματικά αποτελέσματα που αναφέρονται σε ιδιότητες (εκτεταμένων) υλικών σωμάτων. Ενώ στο κεφάλαιο 6 περιγράφονται φαινόμενα που περιλαμβάνουν αλληλεπίδραση σωματιδίων (ύλης) και ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (ακτινοβολίας). Η διάκριση αυτή δεν είναι πάντοτε σαφής και στερεότυπη αφού στην ουσία όλα τα φυσικά φαινόμενα παράγονται από τις αλληλεπιδράσεις της ενέργειας (μορφή της οποίας είναι η ακτινοβολία) και της ύλης. Βλέπουμε την ύλη χάρη στην ακτινοβολία (φως). Αντιλαμβανόμαστε την παρουσία του φωτός χάρη στα υλικά αντικείμενα που παρεμβάλλονται στην πορεία του.

Εννοιολογικά λοιπόν, η διάταξη της ύλης αυτού του κεφαλαίου (και, όπως ήδη έχει αναφερθεί, του βιβλίου ολόκληρου) πέρα από την ιστορική σειρά (όπου είναι εφικτό) ακολουθεί το τρίπτυχο:

Ιδιότητες της ύλης, της ακτινοβολίας και της αλληλεπίδρασης ύλης - ακτινοβολίας, αλλά όχι κατ' ανάγκη μ' αυτή τη σειρά. Ακολουθεί μία σύντομη εισαγωγική αναφορά σ' αυτά τα φαινόμενα.

⁸ Τα άτομα (οι δομικοί λίθοι) στα κρυσταλλικά στερεά βρίσκονται σε περιοδική διάταξη με κανονικότητα.

⁹ Βλέπε σχετική συζήτηση στην *Κυματική-Ταλαντώσεις*.



2.2 Ιδιότητες της Ύλης

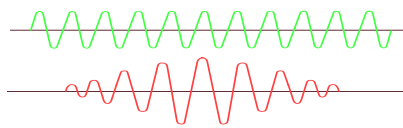
α) Ειδικές Θερμότητες (κεφάλαιο 4) Ένα από τα πιο παλιά άλυτα προβλήματα της κλασικής φυσικής, ήταν η ερμηνεία των πειραματικών τιμών για τις **ειδικές θερμότητες των αερίων και των στερεών**. Ο ίδιος ο Maxwell , που ήταν ο πρωτεργάτης της κινητικής θεωρίας των αερίων, είχε επισημάνει ότι η πειραματική τιμή της γραμμοχωρητικότητας (δηλαδή της Θερμοχωρητικότητας – της ειδικής θερμότητας πολλαπλασιασμένης επί την μάζα - ενός γραμμομορίου) των διατομικών αερίων δεν συμφωνούσε με τη θεωρητική πρόβλεψη. Ενώ η προβλεπόμενη τιμή ήταν $7/2 R$, όπου R είναι η παγκόσμια σταθερά των αερίων ($R \approx 2 \text{ cal/mol} \cdot ^\circ K$), η πειραματική τιμή ήταν μόνο $5/2 R$. Η αιτία του λάθους παρά τις επισταμένες προσπάθειες ήταν αδύνατον να βρεθεί κλασικά.

Προβλήματα εμφανίσθηκαν επίσης και με τη γραμμομοριακή χωρητικότητα των στερεών, ιδίως στις χαμηλές θερμοκρασίες. Ο κλασικός νόμος των Dulong και Petit , η ερμηνεία του οποίου αποτέλεσε τον θρίαμβο της κλασικής κινητικής θεωρίας , προβλέπει για όλα τα στερεά την τιμή των $6 \text{ cal / mol } ^\circ K$ περίπου (δηλαδή $3R$). Αυτή η τιμή είχε επιβεβαιωθεί πειραματικά για αρκετά υλικά ¹⁰. Αργότερα όμως με τη βελτίωση των πειραματικών τεχνικών εμφανίσθηκαν προβλήματα ιδίως στις χαμηλές θερμοκρασίες , όπου βρέθηκαν σημαντικές αποκλίσεις από την τιμή των $6 \text{ cal / mol } ^\circ K$. Μέχρι την εμφάνιση και εδραίωση της κβαντικής θεωρίας δεν υπήρχε καμία εξήγηση γι' αυτές τις αποκλίσεις της γραμμομοριακής χωρητικότητας των αερίων και των στερεών.

β) Σταθερότητα των ατόμων (κεφάλαιο 8) Ιστορικά, το πρώτο κλασικό ατομικό μοντέλο οφείλεται στον J.J. Thomson. Σύμφωνα με το μοντέλο του Thomson, το άτομο αποτελείται από ένα ομοιογενώς φορτισμένο σφαιρικό πυρήνα με θετικό φορτίο μέσα στον οποίο είναι κατανεμημένα, επίσης ομοιογενώς, τα σημειακά αρνητικά φορτία. Το μοντέλο του Thomson έχει σοβαρά προβλήματα, όπως έδειξε η πειραματική εργασία ενός

¹⁰ Στο κεφάλαιο 4 δίνεται ο πίνακας 1.2 που περιέχει σύγχρονα πειραματικά αποτελέσματα για την γραμμομοριακή θερμοχωρητικότητα μερικών υλικών σε δύο θερμοκρασίες. Συγκρίνετε για θερμοκρασίες δωματίου τις τιμές για το Αργίλιο και τον Χαλκό με την προβλεπόμενη τιμή των $6 \text{ cal / mol } ^\circ K$ (Θυμηθείτε ότι $1 \text{ cal} = 4.19 \text{ Joule}$). Τι γίνεται όμως στην θερμοκρασία $30 ^\circ K$; Τι συμβαίνει με άλλα υλικά; Που οφείλονται οι αποκλίσεις; Προφανώς, στην κβάντωση. Υπομονή...

πρώην μαθητή του, του Rutherford. Ο Rutherford, ο οποίος ασχολήθηκε με πειράματα σκεδάσεως σωματίων α από άτομα, έδειξε ότι από τα πειράματα του προκύπτει ότι όλο το θετικό φορτίο του ατόμου είναι συγκεντρωμένο σε μια πάρα πολύ μικρή περιοχή στο κέντρο του ατόμου και δεν είναι απλωμένο σ' όλο το άτομο. Υιοθέτησε λοιπόν ο Rutherford ένα «πλανητικό» ατομικό πρότυπο, το οποίο καθιερώθηκε και σύμφωνα με το οποίο το άτομο αποτελείται από έναν θετικά φορτισμένο πυρήνα, γύρω από τον οποίο περιστρέφονται τα ηλεκτρόνια. Όμως, τα περιστρεφόμενα ηλεκτρόνια εκπέμπουν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία λόγω της κεντρομόλου επιτάχυνσης (ως επιταχυνόμενα φορτία) και χάνουν ενέργεια. Κατά συνέπεια θα πρέπει η ακτίνα της τροχιάς τους συνεχώς να μικραίνει μέχρι μηδενισμού. Τα άτομα λοιπόν, σύμφωνα με το κλασικό πρότυπο θα έπρεπε να είναι ασταθή και να εκπέμπουν συνεχές φάσμα ακτινοβολίας μέχρι να συρρικνωθούν τελείως. Κάτι που έρχεται σε πλήρη αντίθεση με το πείραμα. Η κλασική Φυσική δεν μπορούσε να εξηγήσει ούτε την σταθερότητα ούτε την «γραμμικότητα»¹¹ του φάσματος των ατόμων. Μια πρώτη εξήγηση, όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 8, έδωσε ο Bohr υιοθετώντας την κβάντωση της ατομικής τροχιάς, η οποία δεν επιτρέπει την συρρίκνωση του ατόμου. Αυτή η κβαντική υπόθεση εξηγεί ταυτόχρονα και το γεγονός ότι τα ατομικά φάσματα είναι γραμμικά.



2.3 Ιδιότητες της Ακτινοβολίας

Μία μεγάλη κατηγορία φαινομένων και νόμων που θα συζητήσουμε πολύ πιο διεξοδικά (και που δεν φαίνεται τουλάχιστον εκ πρώτης όψεως να έχει κάποια σχέση με τις ειδικές θερμότητες) αφορούν την **ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία** . Το εύρος της περιοχής συχνοτήτων της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που έχει παρατηρηθεί είναι εξαιρετικά μεγάλο. Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα του σχήματος 2.1 το συνολικό φάσμα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας καλύπτει περί τις είκοσι τάξεις μεγέθους. Σ' αυτή την πολύ μεγάλη περιοχή, το οπτικό φάσμα (δηλαδή η περιοχή συχνοτήτων που είναι ορατή) καλύπτει μόνο ένα ελάχιστο μέρος¹². Η συχνότητα (ή το μήκος κύματος) και το πλάτος (το οποίο ως γνωστόν καθορίζει την ένταση), χαρακτηρίζουν τις μονοχρωματικές πηγές (πηγές που εκπέμπουν σε μία μόνο συχνότητα). Στη γενική περίπτωση χρειάζονται πολύ περισσότερες πληροφορίες για την περιγραφή της

¹¹ Εάν δεν είστε αρκετά εξοικειωμένοι με τα φάσματα, δείτε την έννοια του γραμμικού φάσματος, στο επόμενο εδάφιο 2.3

¹² Η ορατή περιοχή του φάσματος, σε μεγέθυνση, φαίνεται καλύτερα στο σχήμα 2.3

ακτινοβολίας. Στη μεγάλη πλειοψηφία των φαινομένων που συνδέονται με την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα δεν έχουν μία μόνο συχνότητα, αλλά περιλαμβάνουν ένα ολόκληρο **φάσμα**¹³ (σύνολο) συχνοτήτων. Για την πλήρη περιγραφή τέτοιων φαινομένων, απαιτείται η λεπτομερής μορφή του φάσματος. Η πειραματική διάταξη με την οποία συνήθως παρατηρείται το φάσμα της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας μιας φωτεινής πηγής φαίνεται παραστατικά στο σχήμα 2.2. Η βασική διάταξη περιλαμβάνει κάποιο διάφραγμα με μία σχισμή μέσα από την οποία η ακτινοβολία (το φως) της πηγής προσπίπτει σ' ένα σύστημα διαχωρισμού συχνοτήτων, το οποίο συνήθως αποτελείται από ένα πρίσμα (ή ένα οπτικό φράγμα). Το πρίσμα, ως γνωστόν, εκτρέπει κατά διαφορετική γωνία το φως διαφορετικών συχνοτήτων. Έτσι, οι διάφορες συνιστώσες του φωτός που χαρακτηρίζονται από διάφορες συχνότητες, μετά την έξοδο από το πρίσμα, οδεύουν προς διαφορετικές διευθύνσεις και προσπίπτουν σε διαφορετικές θέσεις πάνω σε μια φωτογραφική πλάκα (ή φιλμ). Η πλάκα είναι κατάλληλα τοποθετημένη για να αποτυπώσει το φάσμα.

Τα οπτικά φάσματα με βάση την μορφή τους μπορούν να διακριθούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες: **τα συνεχή** και **τα γραμμικά** φάσματα. Τα συνεχή φάσματα περιέχουν όλες τις συχνότητες που περιλαμβάνονται σ' ένα (πεπερασμένο ή άπειρο) διάστημα (v_{\min} , v_{\max}). Με άλλα λόγια, κάθε συχνότητα v με $v_{\min} < v < v_{\max}$ ανήκει στο φάσμα. Αντίθετα, τα γραμμικά φάσματα περιέχουν ορισμένες μόνο συχνότητες v_1, v_2, v_3, \dots και μεταξύ δύο διαδοχικών συχνοτήτων (π.χ. μεταξύ του v_1 και του v_2) δεν παρεμβάλλεται άλλη συχνότητα που να ανήκει στο φάσμα. Λόγω του σχήματος της σχισμής, το φως με συχνότητες v_1, v_2, v_3, \dots σχηματίζει **λεπτές φωτεινές γραμμές** πάνω στην φωτογραφική πλάκα. Κάθε τέτοια γραμμή αντιστοιχεί σε μια από τις συχνότητες v_1, v_2, v_3, \dots του φάσματος. Σ' αυτές τις χαρακτηριστικές γραμμές, που διακρίνονται στο σχήμα 2.2 και φαίνονται καθαρά στο σχήμα 2.3, οφείλεται και ο όρος γραμμικό φάσμα ενώ θα ήταν ίσως ορθότερος ο όρος **διάκριτο φάσμα**. Ο πιο συνήθης τρόπος περιγραφής ενός φάσματος είναι υπό μορφή διαγράμματος, **της έντασης I ως συνάρτησης της συχνότητας v** (για ένα διάκριτο φάσμα) ή της **φασματικής κατανομής της έντασης $\rho(v)$** (για ένα συνεχές φάσμα).

Η έννοια της έντασης και της κατανομής της έντασης ανά περιοχή συχνότητας χρειάζεται κάποια παραπέρα επεξήγηση:

¹³ Φάσμα συχνοτήτων = σύνολο συχνοτήτων

Ως γνωστόν, οποιαδήποτε ακτινοβολία (και γενικότερα οποιοδήποτε κύμα) μεταφέρει κάποια ενέργεια (που εξαρτάται από το τετράγωνο του πλάτους του κύματος) . Ορίζουμε ως **ένταση**, I , της ακτινοβολίας το πηλίκο της ενέργειας που, ανά μονάδα χρόνου, διαπερνά μια επιφάνεια κάθετη στη διεύθυνση διαδόσεως της ακτινοβολίας δια του εμβαδού της επιφάνειας αυτής. Αν το φάσμα της ακτινοβολίας είναι συνεχές, τότε για την περιγραφή του απαιτείται η κατανομή της έντασης στις διάφορες στοιχειώδεις περιοχές συχνοτήτων. Εάν ονομάσουμε dI την ένταση του μέρους εκείνου της ακτινοβολίας που αντιστοιχεί σε συχνότητες μεταξύ ν και $\nu+d\nu$, τότε η στοιχειώδης ένταση dI είναι ανάλογη της περιοχής συχνοτήτων $d\nu$: $dI = \rho(\nu)d\nu$ (2.1).

Η ποσότητα $\rho(\nu)$, η οποία ορίζεται ως $\rho(\nu) \equiv dI/d\nu$, αντιστοιχεί στην πυκνότητα που εισαγάγαμε για την περιγραφή της μάζας σε συνεχή μέσα (δείτε για παράδειγμα την αρχή και την πρώτη υποσημείωση του κεφαλαίου 9 στο *μαθηματικό συμπλήρωμα*). Θα μπορούσε λοιπόν η $\rho(\nu)$, κατ' αναλογία, να ονομασθεί *φασματική πυκνότητα*. Αντ' αυτού, έχει επικρατήσει ο όρος **φασματική κατανομή (της έντασης)**, επειδή ο όρος *πυκνότητα* αναφέρεται συνήθως σε χωρική πυκνότητα. Η ολική ένταση $I_{ολ}$ (δηλαδή η ολική ισχύς που διαπερνά μια μοναδιαία επιφάνεια, ανεξάρτητα από τη συχνότητα) μπορεί να βρεθεί αθροίζοντας όλες τις στοιχειώδεις εντάσεις dI και δίνεται από το

$$I_{ολ} = \int_0^{\infty} dI = \int_0^{\infty} \rho(\nu)d\nu \quad (2.2).$$

Κάθε συνεχές φάσμα λοιπόν χαρακτηρίζεται από μια συνάρτηση $\rho(\nu)$, που περιγράφει την κατανομή της έντασης του φάσματος της ακτινοβολίας στις διάφορες περιοχές συχνοτήτων. Επειδή οι συχνότητες της ορατής (και μη) ακτινοβολίας είναι πάρα πολύ μεγάλες και δύσκολες στην μέτρηση (βλέπε πίνακα του σχήματος 1) ενώ τα μήκη κύματος μπορούν να μετρηθούν σχετικά εύκολα (με οπτικά φράγματα, για παράδειγμα) είναι πολύ συνηθισμένο να περιγράφονται τα οπτικά φάσματα με βάση το μήκος κύματος λ αντί της συχνότητας ν . Σ' αυτή την περίπτωση, εισάγουμε αντί της κατανομής $\rho(\nu)$, την κατανομή $\rho(\lambda)$ από την σχέση: $dI = \rho(\lambda)d\lambda$ (2.3),

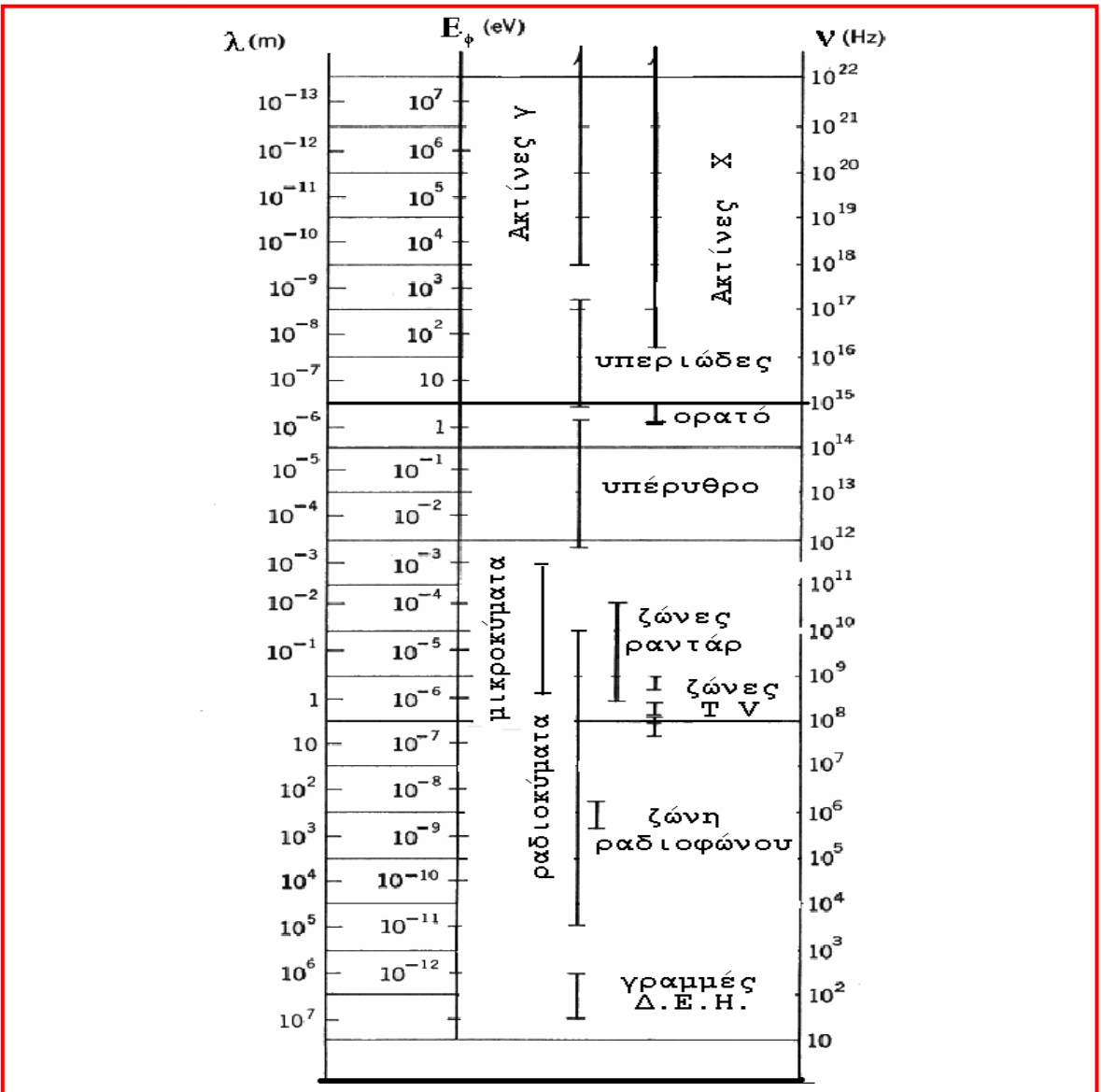
$$\text{οπότε η αντίστοιχη με την (2.2) σχέση γράφεται: } I_{ολ} = \int_0^{\infty} \rho(\lambda)d\lambda \quad (2.4).$$

$$\text{Συγκρίνοντας τις σχέσεις 2.2 και 2.4 βλέπουμε ότι: } \rho(\nu)d\nu = \rho(\lambda)d\lambda \quad (2.5).$$

Στην παραπάνω σχέση έχουμε χρησιμοποιήσει το σύμβολο της απόλυτης τιμής, επειδή τα πρόσημα των διαφορικών $d\lambda$ και $d\nu$ είναι αντίθετα, αφού όταν αυξάνεται το μήκος

κύματος ελαττώνεται η συχνότητα ν . Ως γνωστόν, το μήκος κύματος συνδέεται με την συχνότητα μέσω της ταχύτητας c του φωτός: $\nu \lambda = c$ (2.6).

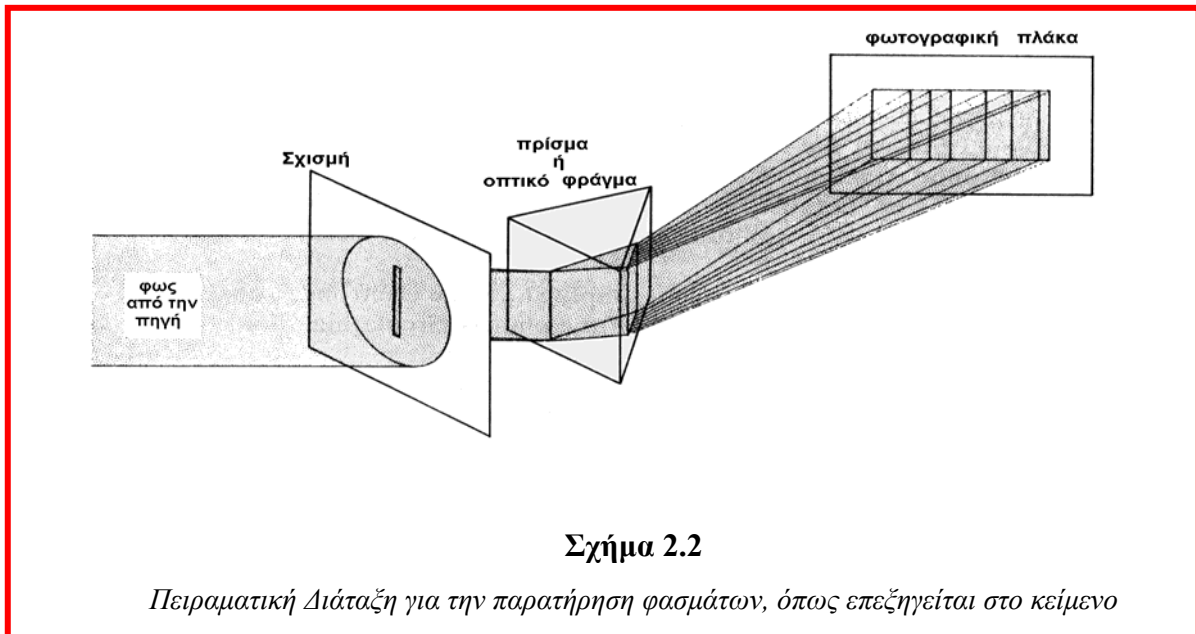
Μπορούμε, λοιπόν, να βρούμε την **φασματική συνάρτηση κατανομής της έντασης ως προς το μήκος κύματος**, $\rho(\lambda)$, όταν γνωρίζουμε την συνάρτηση κατανομής ως προς τη συχνότητα $\rho(\nu)$. (Βλέπε και άσκηση 2.3). Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι ο όρος ένταση χαρακτηρίζει μια φωτεινή δέσμη. Εάν αντί φωτεινής δέσμης θεωρήσουμε μια φωτεινή πηγή, τότε, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, το χαρακτηριστικό μέγεθος



Σχήμα 2.1

Σχηματική παράσταση του φάσματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας σε όλη του την ευρύτητα. Παρουσιάζονται οι κλίμακες μήκους κύματος και συχνότητας καθώς και η κλίμακα της ενέργειας φωτονίου E_ϕ . Η τελευταία έννοια θα γίνει κατανοητή στο τέλος αυτού της ενότητας

αντί της έντασης είναι η *Αφεικτική Ικανότητα* και η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής ονομάζεται « συνάρτηση φασματικής κατανομής της αφεικτικής ικανότητας ».



Αξίζει, τέλος, να αναφέρουμε, χωρίς να επιμένουμε ιδιαίτερα, ότι μπορούμε να ενοποιήσουμε την μαθηματική περιγραφή των γραμμικών και συνεχών φασμάτων, εισάγοντας, όπως και στο κεφάλαιο 3 του μαθηματικού συμπληρώματος, γενικευμένες συναρτήσεις κατανομής που αποτελούν «ασυνεχείς» γενικεύσεις των συνηθισμένων συνεχών συναρτήσεων. Για τέτοιες γενικευμένες συναρτήσεις κατανομής, αυτό που συνήθως έχει σημασία είναι το ολοκλήρωμά τους που υπεισέρχεται στις σχέσεις 2.2 και 2.4 για να δώσει την ολική ένταση.

Όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 3 του μαθηματικού συμπληρώματος, κλασικό παράδειγμα τέτοιας γενικευμένης κατανομής αποτελεί η συνάρτηση δ του Dirac. Η γενικευμένη συνάρτηση $\delta(x)$ του Dirac ορίζεται ίση προς μηδέν για κάθε $x \neq 0$, και $\delta(x) \rightarrow \infty$ για $x=0$, με την ιδιότητα :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad . \quad (2.7)$$

Προφανώς, επειδή η συνάρτηση δ είναι παντού μηδέν εκτός από το $x=0$, τα όρια της ολοκλήρωσής μπορεί να είναι οποιαδήποτε αρκεί να περιλαμβάνουν το μηδέν.

Ερώτηση Πως μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά ένα γραμμικό φάσμα που αποτελείται από μία μόνο συχνότητα ν_0 με ένταση I_0 σαν συνεχές φάσμα με κάποια γενικευμένη συνάρτηση κατανομής ;

Απάντηση Εάν θέσουμε $\rho(\nu) = I_0\delta(\nu-\nu_0)$, βλέπουμε από την (2.7) θέτοντας $\nu-\nu_0 = x$, ότι :

$$I_{\text{ολ}} = I_0 \int_0^{+\infty} \delta(\nu - \nu_0) d\nu = I_0 \times 1 = I_0 . \text{ Έτσι δικαιώνεται η επιλογή μας για την } \rho(\nu) .$$

Χαρακτηριστικό παράδειγμα γραμμικού φάσματος είναι το **φάσμα εκπομπής** των ατόμων των στοιχείων. Το φάσμα αυτό λαμβάνεται όταν χρησιμοποιηθεί ως φωτεινή πηγή, το φως ηλεκτρικής εκκενώσεως μέσα σε ατμόσφαιρα αραιού αερίου του εν λόγω στοιχείου. Αυτό το ατομικό φάσμα είναι γενικά πολύπλοκο και περιλαμβάνει αρκετές συχνότητες που είναι χαρακτηριστικές για το συγκεκριμένο άτομο και αποτελούν την φασματική του «ταυτότητα».

Εάν το ίδιο άτομο εκτεθεί σε ακτινοβολία που περιέχει τις χαρακτηριστικές του συχνότητες , τότε θα απορροφήσει αυτές και μόνον αυτές τις συχνότητες , με αποτέλεσμα να εμφανισθούν σκοτεινές γραμμές στην ίδια θέση που θα είχαν οι αντίστοιχες γραμμές εκπομπής του . Το φάσμα που λαμβάνεται μ' αυτό τον τρόπο ονομάζεται **φάσμα απορροφήσεως** . Έτσι λοιπόν , ενώ το φάσμα εκπομπής ενός στοιχείου , π.χ. του υδρογόνου , αποτελείται από ένα χαρακτηριστικό σύνολο φωτεινών γραμμών πάνω σ' ένα σκοτεινό υπόβαθρο, το φάσμα απορροφήσεως του ίδιου στοιχείου (του Η) αποτελείται από ένα αντίστοιχο σύνολο σκοτεινών γραμμών πάνω σ' ένα φωτεινό υπόβαθρο . Στο σχήμα 2.3 φαίνεται το γραμμικό φάσμα εκπομπής και απορροφήσεως του ατόμου του Υδρογόνου . Σ' αυτή την περίπτωση , το φωτεινό υπόβαθρο (στο φάσμα απορροφήσεως) που χαρακτηρίζει την φωτεινή πηγή, δεν είναι τίποτα άλλο από **το συνεχές φάσμα της ηλιακής ακτινοβολίας** στην ορατή περιοχή . Έτσι το σχήμα (2.3α) δείχνει επίσης την ορατή περιοχή του φάσματος με όλες τις χρωματικές της συνιστώσες . Οι χρωματικές αυτές συνιστώσες αντιστοιχούν στα διάφορα μήκη κύματος (ή συχνότητες) του φάσματος που είναι σημειωμένα στον οριζόντιο άξονα¹⁴ σε μονάδες Å (1 Å= 10⁻¹⁰ m). Η κλασική θεωρία, όπως ήδη αναφέρθηκε στο εδάφιο 2.3 και όπως θα δούμε και

¹⁴ Ο κατακόρυφος άξονας δεν παριστάνει τίποτα . Αν όμως για κάθε περιοχή συχνοτήτων μετρούσαμε την αντίστοιχη ένταση της ακτινοβολίας , θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον κατακόρυφο άξονα ακριβώς γι' αυτή την ποσότητα .

Η μορφή αυτή του διαγράμματος , με οριζόντιο άξονα μήκος κύματος λ ή συχνότητα ν και κατακόρυφο άξονα την ένταση της ακτινοβολίας ή την κατανομή της έντασης σε μια μοναδιαία περιοχή συχνότητας είναι πολύ συνηθισμένη για συνεχή φάσματα

παρακάτω στο κεφάλαιο 7, δεν ήταν σε θέση να προβλέψει ούτε τη μορφή (γραμμικό αντί συνεχές) ούτε και, πολύ περισσότερο, τις λεπτομέρειες (το πλήθος και τις συχνότητες των γραμμών) αυτού του φάσματος. Παρ' όλα αυτά κάποιοι εμπειρικοί τύποι, ανεξήγητοι από την κλασική θεωρία, υπήρχαν ήδη από το 1885 για το άτομο του υδρογόνου. Μία πρώτη λεπτομερής εξήγηση του φάσματος του ατόμου του υδρογόνου δόθηκε από τον Bohr πολύ αργότερα, το 1913 με βάση την κβαντική θεωρία.

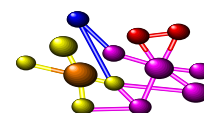
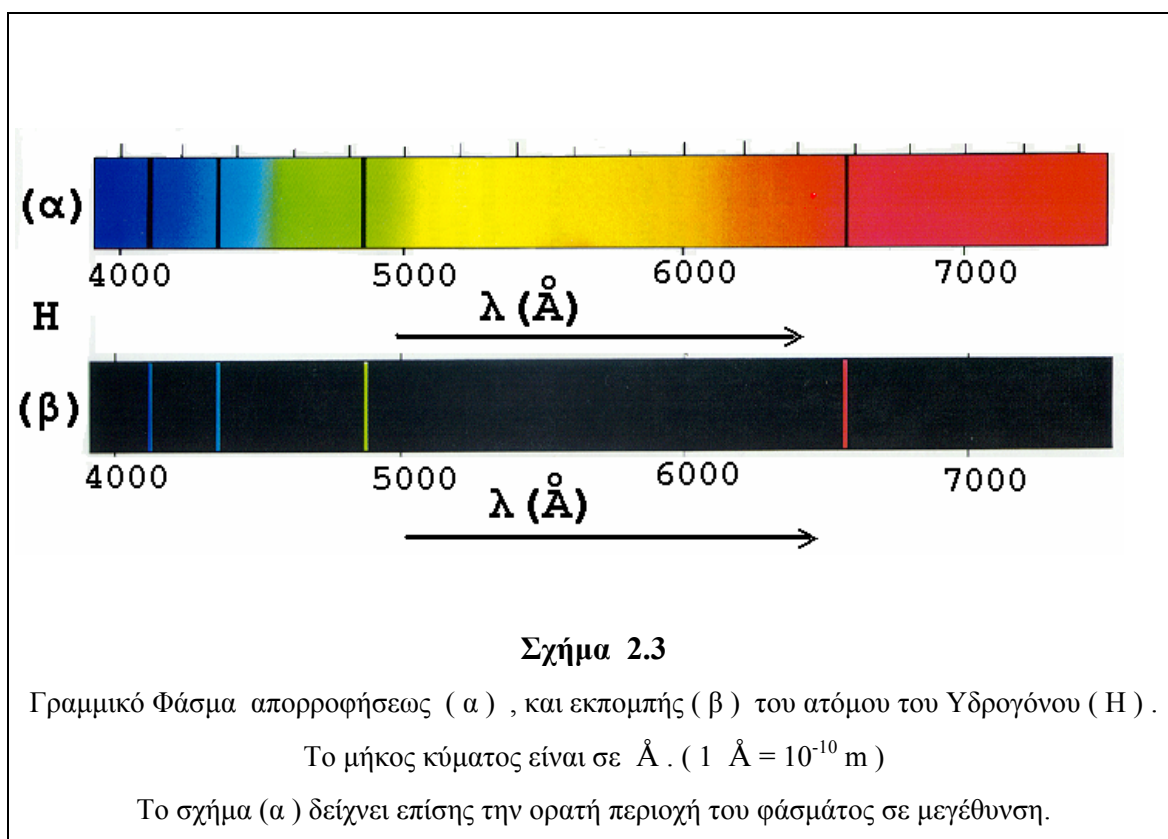
Χαρακτηριστικό παράδειγμα συνεχούς φάσματος αποτελεί το φάσμα της ακτινοβολίας των πολύ θερμών σωμάτων (όπως του Ηλίου που φαίνεται στο υπόβαθρο του σχήματος 2.3.α) , το οποίο εξαρτάται κυρίως από την θερμοκρασία και πολύ λιγότερο από τη φύση του συγκεκριμένου σώματος . Η μαθηματική μορφή αυτού του συνεχούς φάσματος χαρακτηρίζεται , όπως είδαμε και πριν , από την συνάρτηση $\rho(\nu)$, που περιγράφει την κατανομή της έντασης ($dI(\nu)$) σε κάθε φασματική περιοχή ($d\nu$) .

Ανάμεσα στα θερμά σώματα, **το μέλαν σώμα**, το οποίο ορίζεται σαν ένα σώμα, το οποίο απορροφά ολόκληρη την ακτινοβολία που δέχεται στην επιφάνειά του, κατέχει ιδιαίτερη σημασία . Ένα τέτοιο συνεχές φάσμα στη μορφή διαγράμματος $\rho = \rho(\nu)$ βρίσκεται στο σχήμα 3.1 του επόμενου εδαφίου. Στην περίπτωση του μέλανος σώματος , επειδή η συνάρτηση $\rho(\nu)$ εξαρτάται και από την θερμοκρασία , έχουν σχεδιασθεί στο σχήμα 3.1 τρεις γραφικές παραστάσεις της $\rho(\nu)$ που αντιστοιχούν σε τρεις διαφορετικές θερμοκρασίες . Η θεωρητική ερμηνεία της ακτινοβολίας του "μέλανος σώματος" ήταν ένα από τα πιο πολυσυζητημένα προβλήματα της θεωρητικής φυσικής του 19ου αιώνα που είχε προσελκύσει το ενδιαφέρον πολλών από τους πιο εξέχοντες θεωρητικούς φυσικούς της εποχής. Στις αρχές του 20^{ου} αιώνα, η ακτινοβολία του μέλανος σώματος εξακολουθούσε να είναι **"καυτό"** επιστημονικό θέμα της εποχής (όπως θα λέγαμε σήμερα σε γλώσσα σύγχρονης τηλεοπτικής δημοσιογραφίας) λόγω της παγκοσμιότητας¹⁵ του φάσματος της ακτινοβολίας του, που εξαρτάται μόνο από την **θερμοκρασία** και δεν εξαρτάται από το υλικό και την υφή της επιφανείας του .

Η κλασική περιγραφή του φάσματος του μέλανος σώματος οδηγούσε σε θεμελιώδη ασυμφωνία με τις πειραματικές παρατηρήσεις, και προέβλεπε ότι η $\rho(\nu)$ έπρεπε να τείνει στο άπειρο για πολύ μεγάλες συχνότητες ($\nu \rightarrow \infty$), πράγμα αφύσικο . Η τελευταία αυτή πρόβλεψη είναι γνωστή σαν **«υπεριώδης καταστροφή»**, επειδή από την υπεριώδη

¹⁵ Στη Φυσική χαρακτηρίζουμε « παγκόσμια » (universal) κάποια σταθερά που δεν εξαρτάται από τίποτα (π.χ. τα h , c , R είναι παγκόσμιες σταθερές, ενώ η ακτίνα του ατόμου του Υδρογόνου , a_0 , δεν είναι) ή κάποια ιδιότητα των υλικών που είναι η ίδια για όλα τα υλικά (ανεξάρτητη από τη φύση του υλικού) .

περιοχή του φάσματος αρχίζει ουσιαστικά το όριο των «μεγάλων» συχνοτήτων¹⁶. Η πλήρης ερμηνεία του φαινομένου, όπως θα δούμε αμέσως μετά με τρόπο αυθαίρετο και «εμπειρικό»¹⁷ αλλά πρωτοποριακό έγινε από τον Max Planck σε μία κλασική εργασία του, το 1900. Αυτή η θεμελιώδης εργασία με την οποία ο Planck ερμήνευσε την μορφή της συνάρτησης $\rho(\nu)$ για το μέλαν σώμα, ήταν η αφετηρία της Κβαντικής θεωρίας. Πρώτος ο Einstein ήταν εκείνος που αναγνώρισε, γενίκευσε και επέβαλε την κβαντική υπόθεση του Planck.



2.4 Αλληλεπίδραση Ύλης - Ακτινοβολίας

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα φαινομένου το οποίο βασίζεται στην αλληλεπίδραση ύλης ακτινοβολίας και το οποίο έβαλε σε σοβαρή δοκιμασία την κλασική φυσική στην

¹⁶ Ας σημειωθεί ότι την εποχή εκείνη δεν ήταν γνωστό όλο το εύρος του φάσματος της ακτινοβολίας, του σχήματος 2.1.

¹⁷ Ο Planck χαρακτήρισε αργότερα την ερμηνεία που πρότεινε σαν «πράξη απελπισίας».

προσπάθεια ερμηνείας του είναι το **φωτοηλεκτρικό φαινόμενο**. Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο βασίζεται στην παρατήρηση πως όταν υπεριώδες φως φωτίζει την επιφάνεια μερικών μετάλλων, ηλεκτρόνια εκπέμπονται από την επιφάνεια. Το σοβαρό πρόβλημα ήταν, ότι αντίθετα από τις προβλέψεις της κλασικής φυσικής, ακτινοβολία ισχυρότερης έντασης δεν έδινε μεγαλύτερη κινητική ενέργεια στα ηλεκτρόνια που εκπέμπονταν, ενώ αυτό συνέβαινε όταν η συχνότητα της ακτινοβολίας μεγάλωνε. Η κβαντική εξήγηση του φαινομένου δόθηκε αργότερα (γύρω στα 1905) από τον Einstein. Μάλιστα δε, η απονομή του βραβείου Nobel στον Einstein το 1921 δεν έγινε για τη θεωρία (θεωρίες) του της σχετικότητας αλλά «για την εξήγηση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου και για τις υπηρεσίες του προς την Θεωρητική Φυσική».

Το βασικό και ριζικά επαναστατικό συστατικό της κβαντικής θεωρίας που παρακάμπει τα προβλήματα της κλασικής θεωρίας της ακτινοβολίας και της αλληλεπίδρασης της με την ύλη, είναι η σωματιδιακή υφή της ακτινοβολίας με τη μορφή «**φωτονίων**». Αυτή η σωματιδιακή υφή, όπως θα συζητήσουμε παρακάτω δεν υποκαθιστά τελείως την κυματική υφή της ακτινοβολίας. Αντίθετα, θα μπορούσαμε να πούμε πως η σωματιδιακή περιγραφή **συμπληρώνει την κυματική εικόνα**.

Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι ο εννοιολογικός χωρισμός των προβλημάτων ακτινοβολίας και αλληλεπίδρασης ύλης - ακτινοβολίας είναι ουσιαστικά τεχνητός και γίνεται για παιδαγωγικούς λόγους. Τα φάσματα απορροφήσεως καθώς και η ακτινοβολία του μέλανος σώματος (που, όπως θα δούμε βασίζεται στην θερμοδυναμική ισορροπία της ακτινοβολίας με την ύλη των τοιχωμάτων του) είναι στην πραγματικότητα φαινόμενα αλληλεπίδρασεως ακτινοβολίας - ύλης.

Άλλα χαρακτηριστικά φαινόμενα αλληλεπίδρασης ύλης και ακτινοβολίας, που δεν μπορούν να ερμηνευθούν από την κλασική θεωρητική φυσική, και που θα συζητήσουμε σ' αυτό το κεφάλαιο, είναι το **φαινόμενο Compton** και η **ακτινοβολία πεδήσεως**¹⁸. Το φαινόμενο Compton περιγράφει την μη ελαστική σκέδαση της ακτινοβολίας (ακτίνων X) από ελεύθερα ηλεκτρόνια. Αυτή η σκέδαση συνοδεύεται και από αλλαγή του μήκους κύματος της σκεδαζομένης ακτινοβολίας, κάτι που μόνο η κβαντική θεωρία της ακτινοβολίας μπορεί να εξηγήσει. Η ακτινοβολία πεδήσεως οφείλεται στην πέδηση φορτισμένων ατόμων (ιόντων) όταν συγκρούονται με μεγάλη ταχύτητα με κάποια (μεταλλική) επιφάνεια. Η εκπομπή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από ηλεκτρικά

¹⁸ Πέδη = φρένο . Πέδηση = φρενάρισμα .

φορτία που επιταχύνονται (ή επιβραδύνονται¹⁹) προβλέπεται , ως γνωστόν , από τον κλασικό ηλεκτρομαγνητισμό . Όμως , η λεπτομερής μορφή του φάσματος αυτής της ακτινοβολίας (το οποίο είναι συνεχές) μπορεί να εξηγηθεί μόνο με την κβαντική θεωρία. Ας κλείσουμε τώρα αυτή την εισαγωγή , υπενθυμίζοντας πως το διάγραμμα [2.1] συνοψίζει τα περιεχόμενα αυτού του κεφαλαίου καθώς και της εισαγωγής ,που μόλις ολοκληρώσαμε.

Ασκήσεις:

2.1 Συμπληρώστε τα κενά στο παρακάτω κείμενο :

Τα κυριότερα πειραματικά αποτελέσματα που προετοίμασαν την ----- θεωρία έχουν να κάνουν με : (α) το φάσμα της ακτινοβολίας του ----- Σώματος , (β) Τα ατομικά φάσματα , (γ) Τις τιμές των ----- θερμοτήτων αερίων και των στερεών (ιδιαίτερα στις ----- Θερμοκρασίες) , (δ) το ----- φαινόμενο , και (ε) το ----- Compton .

2.2 Δείξτε ότι ένα γραμμικό φάσμα που αποτελείται από δύο συχνότητες ν_1 και ν_2 με εντάσεις I_1 και I_2 αντίστοιχα μπορεί να παρασταθεί από μια συνάρτηση κατανομής έντασης , $\rho(\nu)$, της μορφής : $\rho(\nu) = I_1 \delta(\nu-\nu_1) + I_2 \delta(\nu-\nu_2)$.

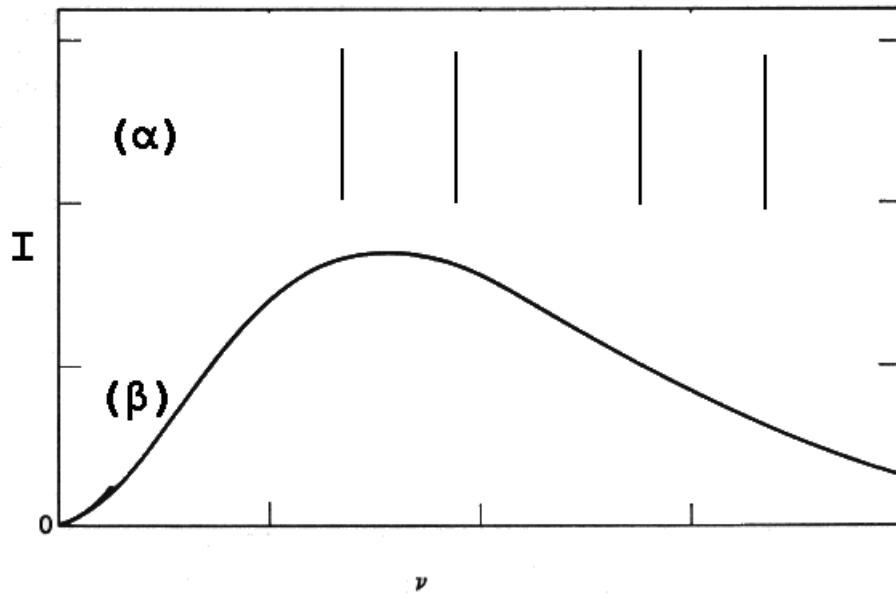
Υπόδειξη : Δείτε το παράδειγμα 2.1.

2.3 Δείξτε ότι οι συναρτήσεις φασματικής κατανομής $\rho(\lambda)$ και $\rho(\nu)$ συνδέονται με τη σχέση: $\rho(\lambda) = \rho(\nu) \frac{c}{\lambda^2}$, όπου στο δεύτερο μέλος έχουμε αντικαταστήσει $\rho(\nu) = \rho(\frac{c}{\lambda})$

Υπόδειξη : Χρησιμοποιήστε κατάλληλα τις σχέσεις 2.5 και 2.6 .

2.4 Στο σχήμα παρακάτω δίνονται σε κοινό διάγραμμα κατανομής έντασης / έντασης (I) σαν συνάρτηση της συχνότητας (ν) το γραμμικό φάσμα εκπομπής ενός υποθετικού στοιχείου (**α**) , και το συνεχές φάσμα μιας θερμής φωτεινής πηγής (**β**).

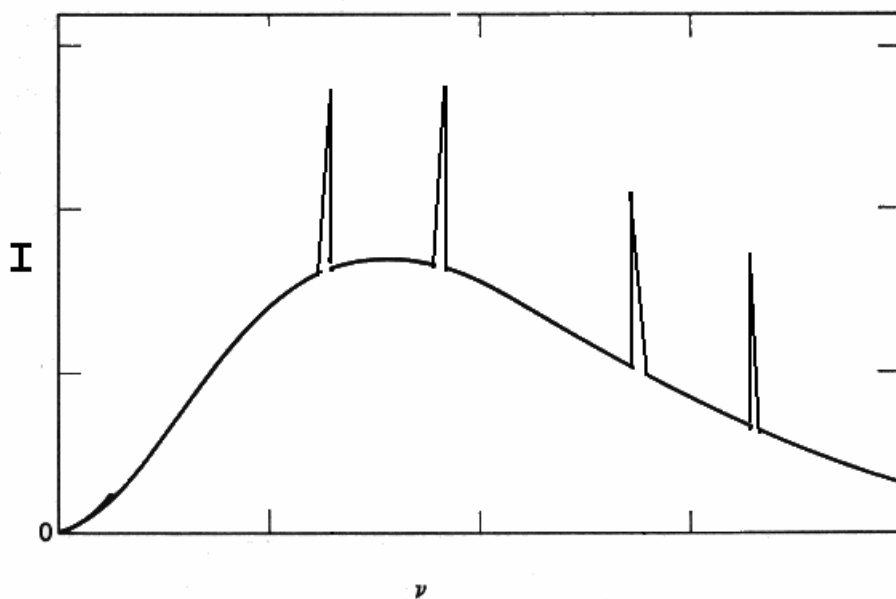
¹⁹ Επιβράδυνση = Αρνητική επιτάχυνση)



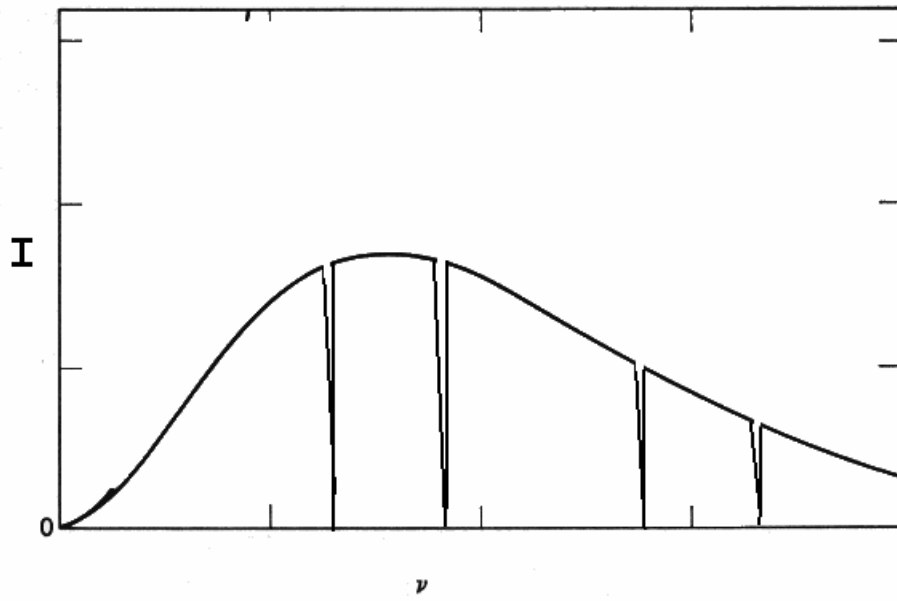
Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα παριστάνει το φάσμα απορρόφησης αυτού του υποθετικού στοιχείου, όταν « φωτίζεται » από την πηγή, που το φάσμα της φαίνεται στο (β) ;

(ΠΡΟΣΟΧΗ Το σύμβολο **I**, στα διαγράμματα παρακάτω παριστάνει ταυτόχρονα την ένταση (για το γραμμικό φάσμα και την κατανομή της έντασης για το συνεχές και σύνθετο φάσμα, που νωρίτερα συμβολίσαμε με **ρ**)

A



Β



Γ

Τίποτα απ' όλα αυτά .

Κεφάλαιο 3 Ακτινοβολία του Μέλανος Σώματος



Εισαγωγή

Αυτό είναι ουσιαστικά το πρώτο κεφάλαιο στο οποίο εισάγεται η κβαντική ιδέα μετά από λεπτομερή παρουσίαση και συζήτηση του προβλήματος σύμφωνα με την κλασική Φυσική. Διερευνούμε με προσοχή τα αίτια της αποτυχίας της κλασικής περιγραφής και οδηγούμαστε με ευλογοφανή επιχειρήματα στην κβαντική υπόθεση του Planck. Αναλύουμε τις συνέπειες της κβαντικής υπόθεσης καθώς και τις συνθήκες κάτω από τις οποίες οι αποκλείσεις από την κλασική περιγραφή ελαχιστοποιούνται ή μεγιστοποιούνται.

Μοιραία λοιπόν, το κεφάλαιο αυτό το οποίο είναι αφιερωμένο απ' την αρχή μέχρι τέλους στην περιγραφή, ανάλυση και επίλυση (με την κβαντική υπόθεση) του προβλήματος της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος είναι (ίσως δυσανάλογα) εκτεταμένο. Στο κεφάλαιο αυτό:

- 1) Αναπτύσσουμε την έννοια του *Μέλανος Σώματος* και της ακτινοβολίας του.
- 2) Δείχνουμε λεπτομερώς τα όρια και τις αδυναμίες της κλασικής φυσικής να ερμηνεύσει το φάσμα της ακτινοβολίας του Μέλανος Σώματος.
- 3) Ακολουθώντας τον Planck, εισάγουμε την έννοια της **κβάντωσης** της ενέργειας και του «**κβάντου**» **φωτός**, και ερμηνεύουμε το φάσμα της ακτινοβολίας του Μέλανος Σώματος, βάζοντας ταυτόχρονα τα θεμέλια της ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ.

Τι μπορείτε να παραλείψετε σε πρώτη ανάγνωση:

Το υποκεφάλαιο 3.5

3.1 Η θερμική ακτινοβολία και η έννοια του Μέλανος Σώματος.

Η έννοια του μέλανος σώματος είναι συνυφασμένη με την έννοια της *θερμικής ακτινοβολίας* και τη μελέτη της. Με τον όρο **θερμική ακτινοβολία** εννοούμε την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που εκπέμπει ένα θερμό (δηλαδή $T > 0^0 \text{ K}$) σώμα λόγω

της θερμοκρασίας του. Όλα τα θερμά σώματα εκπέμπουν προς το περιβάλλον τους μία τέτοια θερμική ακτινοβολία, λόγω της θερμικής κίνησης των φορτισμένων δομικών τους λίθων²⁰. Όμως ταυτόχρονα απορροφούν και ανακλούν θερμική (και άλλη) ακτινοβολία από το περιβάλλον. Ένα σώμα που αρχικά είναι θερμότερο από το περιβάλλον του θα αρχίσει σιγά - σιγά να ψύχεται, ακόμα και αν δεν ανταλλάσσει με το περιβάλλον θερμότητα μέσω άλλων μηχανισμών (αγωγή, μεταφορά) επειδή ο ρυθμός με τον οποίο εκπέμπει ενέργεια δια της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερος από τον ρυθμό με τον οποίο απορροφά ενέργεια. Όταν τελικά επιτευχθεί θερμική ισορροπία ο ρυθμός εκπομπής και ο ρυθμός απορροφήσεως θα είναι ίσοι.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η ακτινοβολία που προέρχεται από την επιφάνεια ενός σώματος (σε οποιαδήποτε μη μηδενική απόλυτο θερμοκρασία) θα είναι ένα μίγμα εκπεμπόμενης και ανακλώμενης ακτινοβολίας

Εάν θέλουμε να μελετήσουμε αποκλειστικά την εκπεμπόμενη θερμική ακτινοβολία χρειαζόμαστε να ανακαλύψουμε ή να επινοήσουμε ένα ιδανικό σώμα για το οποίο δεν θα υπάρχει καθόλου ανακλώμενη ακτινοβολία, δηλαδή θα απορροφά όλη την ακτινοβολία που προσπίπτει στην επιφάνειά του. Ένα τέτοιο ιδανικό σώμα είναι το **μέλαν σώμα**.

Σαν **μέλαν σώμα** χαρακτηρίζεται κάθε σώμα που απορροφά τελείως όλη την ακτινοβολία που προσπίπτει στην επιφάνεια του ανεξάρτητα από την συχνότητά της. Ένα τέτοιο σώμα φαίνεται προφανώς μέλαν (μαύρο). Πράγματι, ένα σώμα φαίνεται π.χ. κόκκινο αν, από το φως που προσπίπτει επάνω του, ανακλά τις συχνότητες που αντιστοιχούν στο κόκκινο χρώμα και απορροφά όλες τις άλλες. Αν το σώμα απορροφά όλες τις συχνότητες και δεν αντανακλά καμία, δεν φτάνει στα μάτια μας ακτινοβολία προερχόμενη από το σώμα αυτό, οπότε το σώμα προκαλεί την ίδια οπτική εντύπωση που προκαλεί η έλλειψη φωτός. Το σώμα έχει τότε το ίδιο «χρώμα» με το σκοτάδι, δηλαδή μαύρο.

Ενώ λοιπόν ορίζουμε το μέλαν σώμα με βάση το ποσοστό της ακτινοβολίας που απορροφά (100%) αυτό που πραγματικά μας απασχολεί είναι η ακτινοβολία την οποία εκπέμπει, η οποία δεν έχει καμία σχέση με την προσπίπτουσα ακτινοβολία και της οποίας τα χαρακτηριστικά εξαρτώνται μόνο από την θερμοκρασία του μέλανος σώματος (θερμική ακτινοβολία). Σε συνήθεις θερμοκρασίες, ανεξάρτητα από οποιαδήποτε προσπίπτουσα ακτινοβολία (η οποία απορροφάται και δεν ανακλάται) η εκπεμπόμενη

²⁰ Όπως είναι γνωστό από τον Ηλεκτρομαγνητισμό, ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία εκπέμπεται από κινούμενα (επιταχυνόμενα) ηλεκτρικά φορτία.

ακτινοβολία εμπίπτει στην υπέρυθρη περιοχή του φάσματος και δεν είναι ορατή από τον ανθρώπινο οφθαλμό. Έτσι το μέλαν σώμα παραμένει μαύρο. Τι γίνεται όμως σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες ;

Θα επανέλθουμε αργότερα σ' αυτό το ερώτημα και στον ορισμό και σημασία του Μέλανος Σώματος, αφού πρώτα συζητήσουμε λίγο πιο εκτεταμένα μερικά χαρακτηριστικά της θερμικής ακτινοβολίας.

Όπως ήδη αναφέραμε, τα υλικά σώματα στην συμπυκνωμένη κατάσταση (στερεά και υγρά) εκπέμπουν από την επιφάνειά τους ένα **συνεχές φάσμα θερμικής ακτινοβολίας**. Η λεπτομερής μορφή αυτού του φάσματος εξαρτάται σχεδόν αποκλειστικά από την θερμοκρασία και δεν εξαρτάται σχεδόν καθόλου από τη φύση του συγκεκριμένου υλικού και της επιφανείας του. Η ασθενής εξάρτηση από λεπτομέρειες της επιφανείας και της φύσης του υλικού κυρίως οφείλεται στο ανακλώμενο τμήμα της ακτινοβολίας.

Το Μέλαν Σώμα, όπως είδαμε, αποτελεί μια εξιδανίκευση (ανάλογη με την περίπτωση του Ιδανικού Αερίου) δεδομένου ότι στην πραγματικότητα δεν υπάρχει σώμα που να απορροφά κατά 100 % την ακτινοβολία που προσπίπτει επάνω του. Όμως, όπως οι νόμοι των ιδανικών αερίων αποτελούν ικανοποιητικές προσεγγίσεις για αρκετά πραγματικά αέρια, έτσι και οι νόμοι των μελανών σωμάτων μπορούν να προσεγγίσουν σε αρκετές περιπτώσεις την θερμική ακτινοβολία πραγματικών σωμάτων. Τα μαύρα σώματα του πραγματικού κόσμου, για παράδειγμα, απορροφούν μεγάλο ποσοστό της προσπίπτουσας ακτινοβολίας και αποτελούν αρκετά καλές προσεγγίσεις για το ιδανικό «μέλαν σώμα». Επίσης, όπως θα δούμε στα επόμενα, η είσοδος μιας θερμής κοιλότητας μπορεί να αποτελέσει ακόμη καλύτερη προσέγγιση μέλανος σώματος. Παρά τη μη ύπαρξη πραγματικών μελανών σωμάτων, η εξιδανίκευση αυτή είναι θεωρητικά πολύ χρήσιμη, επειδή το **φάσμα της θερμικής ακτινοβολίας ενός (νοητού) μέλανος σώματος** είναι ΑΚΡΙΒΩΣ (και όχι περίπου) ανεξάρτητο από τη φύση του υλικού του σώματος και τις γεωμετρικές του ιδιότητες και **εξαρτάται ΜΟΝΟΝ από την Θερμοκρασία**. Επιπλέον, από πρακτικής σκοπιάς, οι νόμοι που διέπουν την ακτινοβολία του Μέλανος σώματος, εύκολα προσαρμόζονται (προσεγγιστικά) για πραγματικά σώματα, με την εισαγωγή ενός **συντελεστή εκπομπής** που περιέχει την εξάρτηση του φάσματος από τις ιδιότητες του συγκεκριμένου σώματος²¹

Για συνήθεις θερμοκρασίες ($T \sim 300-320 \text{ } ^\circ\text{K}$) ολόκληρο το φάσμα της θερμικής ακτινοβολίας που εκπέμπεται από την μεγάλη πλειοψηφία των σωμάτων βρίσκεται στην

βαθύτερη περιοχή του υπέρυθρου τμήματος του φάσματος της ακτινοβολίας (βλέπε σχήμα 2.1). Έτσι η συντριπτική πλειοψηφία των θερμών σωμάτων σε συνήθεις (αλλά και αρκετά υψηλές) θερμοκρασίες, δεν είναι ορατή λόγω της θερμικής ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας (φως) που εκπέμπουν, αλλά λόγω της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας (φως) που ανακλούν από τις επιφάνειες τους (είναι δηλαδή σώματα ετερόφωτα). Σε συνήθεις θερμοκρασίες τα περισσότερα σώματα είναι ετερόφωτα.

Καθώς η θερμοκρασία του σώματος αυξάνει, ένα ποσοστό της ακτινοβολουμένης ενέργειας μετατοπίζεται προς μεγαλύτερες συχνότητες (μικρότερα μήκη κύματος). Από κάποια μεγάλη θερμοκρασία και μετά καθώς αυξάνει το ποσοστό της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας²², που μετακινείται προς όλο και μεγαλύτερες συχνότητες, κάποια στιγμή εμφανίζονται παρατηρήσιμα (δια γυμνού οφθαλμού) ποσά ακτινοβολίας στο κάτω άκρο²³ της ορατής περιοχής του φάσματος. Όπως φαίνεται από το σχήμα 2.3.α, αυτές οι συχνότητες, τα αντίστοιχα μήκη κύματος, βρίσκονται στην κόκκινη περιοχή του φάσματος. Γι' αυτό και το σώμα αρχίζει τότε να φαίνεται με αμυδρό κόκκινο χρώμα. Σε ακόμη υψηλότερες θερμοκρασίες το σώμα εμφανίζεται με λαμπρό κόκκινο χρώμα. Τέλος σε πάρα πολύ υψηλές θερμοκρασίες, όπου συμμετέχουν ακόμη υψηλότερες συχνότητες προς το πάνω άκρο του ορατού φάσματος, το σώμα εμφανίζεται με λαμπρό μπλε - άσπρο χρώμα. Η αλλαγή χρώματος οφείλεται στο ότι από ολόκληρο το συνεχές φάσμα που εκπέμπεται, το μάτι κυρίως "βλέπει" το χρώμα που αντιστοιχεί στην περιοχή του φάσματος με την μέγιστη ένταση ακτινοβολίας. Θα πρέπει ακόμη να σημειώσουμε ότι ακόμη και σε θερμοκρασίες μερικών χιλιάδων βαθμών Kelvin (⁰K), περισσότερο από 90% της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας βρίσκεται στο υπέρυθρο. Έτσι, μόνο τα πολύ θερμά σώματα είναι αυτόφωτα (δηλαδή, σε αντίθεση με τα ετερόφωτα, γίνονται ορατά από το φως που εκπέμπουν) .

Μία μοναδική και χαρακτηριστική περίπτωση θερμικής ακτινοβολίας που θα βρισκόταν στην περιοχή των ακτίνων X και γ (μήκη κύματος από 10^{-9} m μέχρι και πέρα των 10^{-13} m) αποτελεί η **ακτινοβολία μέλανος σώματος από το ΣΥΜΠΛΗΡΟ ολόκληρο στα πρώτα στάδια (300.000-500.000 χρόνια) μετά τη Μεγάλη Έκρηξη**. Τα «απομεινάρια» αυτής της ακτινοβολίας στη σημερινή εποχή έχουν παρατηρηθεί για πρώτη φορά το 1965 από τους Penzias και Wilson, οι οποίοι τιμήθηκαν με το βραβείο Νόμπελ το 1978 για αυτή τους την ανακάλυψη. Αυτή η ακτινοβολία, η οποία τώρα αντιστοιχεί σε θερμοκρασία

²¹ Βλέπε ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ, εδάφιο 1.10. 3

²² με τον όρο «ποσοστό ακτινοβολίας» εννοούμε ποσοστό ακτινοβολουμένης ενέργειας

Μέλανος σώματος περίπου 3 K^0 , ονομάζεται **ακτινοβολία κοσμικού υποβάθρου** και συζητιέται παραπέρα στο Ειδικό Θέμα 3.1, στο τέλος αυτού του κεφαλαίου.

Απ' την άλλη μεριά, λιγότερο εξωτικά και περισσότερο συνηθισμένα παραδείγματα τέτοιων αυτόφωτων σωμάτων αποτελούν τα καυτά κάρβουνα, τα νήματα λαμπτήρων πυρακτώσεως και βέβαια ο Ήλιος. Καθ' ένα απ' αυτά τα διάπυρα σώματα εκπέμπει πολύ μεγάλα ποσά ακτινοβολουμένης ενέργειας ώστε το ποσοστό της προσπίπτουσας και ανακλώμενης σ' αυτά ακτινοβολίας από το περιβάλλον τους να μπορεί να θεωρηθεί σε μία ικανοποιητική προσέγγιση αμελητέο. Με άλλα λόγια, το σύνολο σχεδόν της ακτινοβολίας που διαφεύγει από την επιφάνειά τους δεν είναι ανακλώμενη ακτινοβολία αλλά οφείλεται αποκλειστικά στη θερμοκρασία τους. **Έτσι, τα μεμονωμένα διάπυρα σώματα γίνονται ορατά λόγω τις δικής τους ακτινοβολίας και μπορούν να χαρακτηρισθούν με πολύ καλή προσέγγιση σαν μέλανα σώματα.** Έχουμε λοιπόν μια « συνταγή κατασκευής » Μελανών Σωμάτων, παρά τον «ιδανικό» χαρακτήρα του όρου.

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, προκειμένου να περιγράψουμε ποσοτικά το φάσμα του μέλανος σώματος, όπως το παρατηρούμε στο πέτασμα της διατάξεως του σχήματος 2.2, μας χρειάζονται οι έννοιες της **έντασης I** και της **φασματικής κατανομής της έντασης, ρ** , της παρατηρούμενης δέσμης. Για την περιγραφή της ακτινοβολουμένης ισχύος (δηλαδή της ακτινοβολουμένης ενέργειας ανά μονάδα χρόνου) μιας πηγής που εκπέμπει από την επιφάνειά της ιστροπικά προς όλες τις διευθύνσεις χρησιμοποιείται η έννοια της **αφειτικής ικανότητας** και της **φωτεινότητας**.

Ερώτηση :

Η Ένταση (I) και η Αφειτική Ικανότης (A) χαρακτηρίζονται από το πηλίκο της ηλεκτρομαγνητικής Ισχύος δια της επιφανείας.

Υπάρχει κάποια διαφορά (και Ποία) μεταξύ Έντασης και Αφειτικής Ικανότητας ;

Απάντηση :

Η ένταση χαρακτηρίζει μια φωτεινή δέσμη ενώ η Αφειτική Ικανότητα μια φωτεινή πηγή. Για την μεν ένταση η επιφάνεια είναι μια πλάκα φωτογραφική ή ένα πέτασμα, που εμείς τοποθετούμε στον δρόμο της φωτεινής δέσμης, ενώ για την πηγή είναι η φωτοβολουσα επιφάνεια της πηγής.

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι η ακτινοβολία του μέλανος σώματος είναι **ιστροπική** (δηλαδή δεν εξαρτάται από την διεύθυνση) και **ομογενής**. Ο όρος «ομογενής» σημαίνει

²³ Δηλαδή στο άκρο που αντιστοιχεί στις χαμηλότερες ορατές συχνότητες.

πως αν φανταστούμε το μέλαν σώμα σαν μια κοιλότητα όγκου V (βλέπε εδάφιο 3.2), τότε η πυκνότητα της ενέργειας (η ενέργεια ανά μονάδα όγκου) της ακτινοβολίας είναι σταθερή μέσα στον όγκο V . Η φωτεινότητα ορίζεται σαν η (ισοτροπικά) ακτινοβολουμένη ισχύς μέσα σε μια στερεά γωνία Ω , διαιρεμένη με την στερεά γωνία Ω . Ο όρος **αφειτική ικανότητας (A)** χαρακτηρίζει την ισοτροπικά εκπεμπόμενη ισχύ, N , από την επιφάνεια εμβαδού, S , μιας φωτεινής πηγής, διαιρεμένη δια της επιφάνειας αυτής :

$$A = \frac{N}{S} \quad . \quad (3.1)$$

Εάν η φωτεινή πηγή (ή το αυτόφωτο θερμό σώμα) εκπέμπει ένα συνεχές φάσμα, όπως ένα μέλαν θερμοκρασίας T , τότε η κατανομή της αφειτικής ικανότητας στις διάφορες συχνότητες, $\rho_T(\nu)$, σε αναλογία με την κατανομή της έντασης στη 2.1, ορίζεται από την σχέση

$$dA = \rho_T(\nu) d\nu \quad . \quad (3.2)$$

Ο συντελεστής $\rho_T \equiv \frac{dA}{d\nu}$, που παριστάνει την κατανομή της αφειτικής

ικανότητας της φωτεινής πηγής (θερμού σώματος) ως προς την συχνότητα ν ²⁴, έχει επικρατήσει να ονομάζεται στην ελληνική βιβλιογραφία **φασματική κατανομή της αφειτικής ικανότητας**. Οι όροι ένταση και αφειτική ικανότητα χρησιμοποιούνται πολλές φορές, «ελαφρά τη καρδία», χωρίς διάκριση. Όπου και όποτε αυτό συμβαίνει, θα πρέπει να θυμόμαστε ότι ο όρος ένταση αναφέρεται στο πηλίκο της ενέργειας μια δέσμης που, ανά μονάδα χρόνου, διαπερνά μια επιφάνεια **κάθετη** στη διεύθυνση διαδόσεως της ακτινοβολίας δια του εμβαδού της επιφάνειας αυτής.

Κατ' αναλογία με την (2.2) μπορούμε να βρούμε την «ολική» Αφειτική Ικανότητα $A_{ολ}$, από το ολοκλήρωμα :

$$A_{ολ}(T) = \int_0^{\infty} \rho_T(\nu) d\nu \quad (3.3).$$

Η εξάρτηση από την θερμοκρασία, T , δηλώνεται ρητά στο $A_{ολ}$ και στο ρ .

²⁴ Η συνάρτηση $\rho_T(\nu)$ θα μπορούσε, ισοδύναμα, να παρασταθεί και ως συνάρτηση δύο μεταβλητών $\rho(T, \nu)$. Την τακτική αυτή θα ακολουθήσουμε για κάποια παρόμοια συνάρτηση u που θα εισάγουμε παρακάτω. Η χρήση του συμβόλου ρ θέλει να υπενθυμίσει ότι ουσιαστικά έχουμε μια γενικευμένη «πυκνότητα» ή «κατανομή» της έντασης I ως προς τη μεταβλητή ν , όμοια με αυτή της σχέσεως (2.1). Μια παρόμοια έννοια έχει χρησιμοποιηθεί νωρίτερα στην ΣΚΦ, στην *Κλασική Στατιστική*, και θα ξαναχρησιμοποιηθεί σύντομα παρακάτω στην θεωρητική ερμηνεία του φάσματος του Μέλανος Σώματος..

Για ένα μέλαν σώμα (μια φωτεινή πηγή) που έχει επιφάνεια εμβαδού S , η ολική ενέργεια που εκπέμπεται ανά μονάδα χρόνου, δηλαδή η ολική ισχύς $P_{ολ}$, θα δίνεται από τη σχέση:

$$P_{ολ}(T) = S \int_0^{\infty} \rho_T(\nu) d\nu \quad (3.4)$$

Στο σχήμα 3.1 απεικονίζεται η συνάρτηση $\rho_T(\nu)$ όπως προκύπτει πειραματικά για τρεις διαφορετικές θερμοκρασίες. Ισοδύναμα αντί της $\rho_T(\nu)$ το φάσμα μπορεί να περιγραφεί από την φασματική κατανομή²⁵ $\rho_T(\lambda)$, σε αναλογία με την (2.3), που ορίζεται από τη σχέση: $dA = \rho_T(\lambda) d\lambda$. (3.5)

Η ποσότητα $\rho_T(\lambda) d\lambda$ δίνει την αφετική ικανότητα που αντιστοιχεί σε μήκη κύματος μεταξύ λ και $\lambda+d\lambda$ και ονομάζεται, κατ' αντιστοιχία, **φασματική κατανομή της αφετικής ικανότητας ως προς το μήκος κύματος, λ** . Είναι φανερό, από τον ορισμό (3.1) πως εάν πάρουμε το ολοκλήρωμα της (3.5) από κάποιο μήκος κύματος λ_1 μέχρι το μήκος κύματος λ_2 και πολλαπλασιάσουμε επί το εμβαδόν S της επιφάνειας του μέλανος σώματος θα πάρουμε την εκπεμπόμενη ισχύ P της ακτινοβολίας, που αντιστοιχεί σε μήκη κύματος μεταξύ λ_1 και λ_2 , δηλαδή:

$$P(\lambda_1 \rightarrow \lambda_2) = S \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \rho_T(\lambda) d\lambda \quad (3.6)$$

Προφανώς το ολοκλήρωμα $P(0 \rightarrow \lambda_2) = S \int_0^{\lambda_2} \rho_T(\lambda) d\lambda$ δίνει την εκπεμπόμενη ισχύ σε όλα τα μήκη κύματος που είναι μικρότερα ή ίσα με λ_2 .

Εάν, τέλος, για μια δεδομένη θερμοκρασία T , θέλουμε την ολική εκπεμπόμενη ισχύ $P_{ολ}(T)$ σε όλα τα μήκη κύματος, θα πρέπει η συνάρτηση $\rho_T(\lambda)$, σε αναλογία με την (2.4) να ολοκληρωθεί πάνω σε όλα τα μήκη κύματος. Έτσι η ισχύς $P_{ολ}(T)$ θα ισούται με:

$$P_{ολ}(T) = S \int_0^{\infty} \rho_T(\lambda) d\lambda \quad (3.7)$$

Αυτό το ολοκλήρωμα, εάν έχουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $\rho_T(\lambda)$, όπως στο σχήμα 3.2, δίνεται από το ολικό εμβαδόν της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη $\rho_T(\lambda)$. Φυσικά το ίδιο ισχύει και για το ολοκλήρωμα στη (3.4) και το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη (καμπύλες) του σχήματος 3.1

²⁵ Κανονικά προς αποφυγή σύγχυσης θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικό σύμβολο από το ρ για τη συνάρτηση $\rho_T(\lambda)$, επειδή, εξ ορισμού έχει διαφορετικές διαστάσεις από τη $\rho_T(\nu)$. Ας ελπίσουμε πως αυτή η οικονομία συμβόλων δεν θα δημιουργήσει ιδιαίτερα προβλήματα.

Παράδειγμα 3.1 : Με βάση το σχήμα 3.1 εκτιμείστε τον λόγο της ολικής ισχύος ανά μονάδα επιφάνειας (του μέλανος σώματος) η οποία ακτινοβολείται από ένα μέλαν σώμα θερμοκρασίας 2000°K σε σχέση με ένα άλλο θερμοκρασίας 1000°

Απάντηση :

Όπως παρατηρούμε στο σχήμα 3.1 το ολικό εμβαδόν της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη, αυξάνεται δραματικά με την θερμοκρασία. Τοποθετώντας ένα διαφανές χιλιοστομετρικό χαρτί (χαρτί «μιλιμετρέ») πάνω στο σχήμα, βρίσκουμε ότι για τις θερμοκρασίες 2000°K και 1000°K ο λόγος των εμβαδών είναι πάρα πολύ κοντά στο 16. Βλέπουμε δηλαδή πως όταν η θερμοκρασία T διπλασιασθεί, η ολική εκπεμπόμενη ισχύς δεκαεξαπλασιάζεται (πολλαπλασιάζεται επί 16).

Ο νόμος των Stefan και Boltzmann, περιγράφει την ακριβή εξάρτηση της ολικής αφετικής ικανότητας $A_{ολ}$ από την θερμοκρασία ως εξής:

$$A_{ολ}(T) = \sigma T^4 \quad (3.8).$$

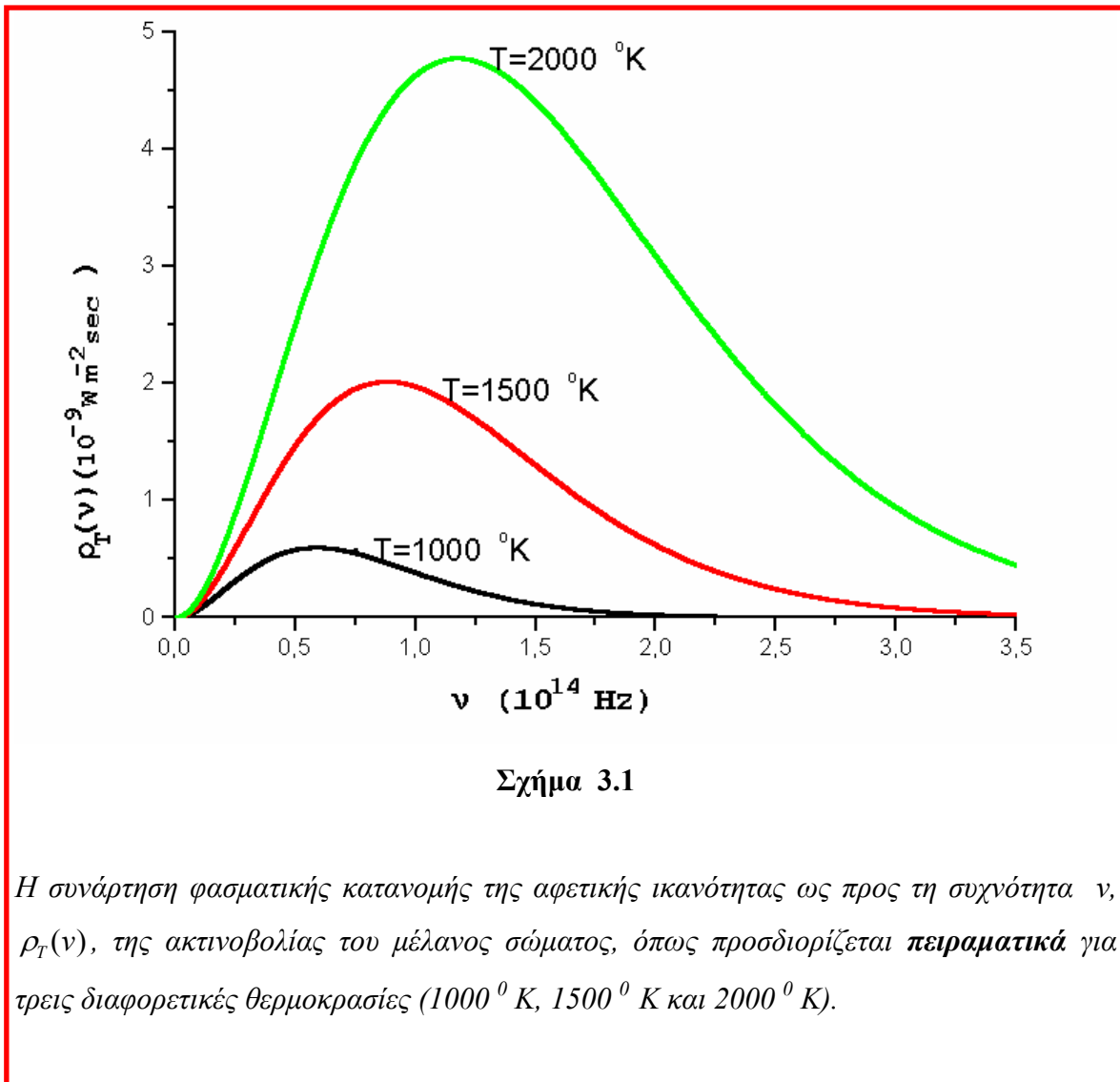
Η σταθερά σ στην παραπάνω σχέση είναι μία θεμελιώδης φυσική σταθερά και ονομάζεται σταθερά των Stefan και Boltzmann.

Η αριθμητική τιμή της έχει βρεθεί ίση προς :

$$\sigma = 5.6704 \times 10^{-8} \text{ W / m}^2 \text{ }^{\circ}\text{K}^4$$

Η ακτινοβολούμενη ολική ισχύς $P_{ολ}$ δίνεται από την 3.8, πολλαπλασιάζοντας επί την επιφάνεια S του μέλανος σώματος :

$$P_{ολ}(T) = \sigma S T^4 \quad (3.9).$$



Παράδειγμα 3.2: Εκτιμήστε την ολική ισχύ που ακτινοβολείται από ένα σώμα εμβαδού 1 m^2 , σε θερμοκρασία δωματίου ;

Απάντηση :

Αντικαθιστώντας στην (3.9) για $S = 1 \text{ m}^2$ και $T \approx 300 \text{ }^\circ\text{K}$, έχουμε :

$$P_{ολ} = 5.6704 \times 10^{-8} \text{ W / m}^2 \text{ }^\circ\text{K}^4 \times 1 \text{ m}^2 \times (3 \times 10^2 \text{ }^\circ\text{K})^4 \approx 460 \text{ W.}$$

Αυτό είναι ένα τεράστιο ποσό ενέργειας (460 Joule) που εκπέμπεται ανά δευτερόλεπτο, αν λάβουμε υπόψη ότι η μέση κινητική ενέργεια ενός σωματιδίου σε θερμοκρασία δωματίου είναι μερικά εκατοστά του eV, δηλαδή $\approx 10^{-20} \text{ Joule}$. Φυσικά το σώμα απορροφά το ίδιο ποσό ενέργειας σ' ένα δευτερόλεπτο, εφόσον βέβαια η θερμοκρασία του παραμένει σταθερά.

Στο σχήμα 3.1 επίσης παρατηρούμε την μετατόπιση της συχνότητας ν_{\max} , που αντιστοιχεί στο μέγιστο της $\rho_T(\nu)$, προς μεγαλύτερες συχνότητες με την αύξηση της θερμοκρασίας. Ο νόμος του Wien δίνει μια γραμμική εξάρτηση από τη θερμοκρασία T για τη συχνότητα ν_{\max} :

$$\nu_{\max} = A \cdot T, \text{ όπου } A \text{ σταθερά}, \quad (3.10)$$

της οποίας η τιμή, $A \cong 5.889 \times 10^{10} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1} \text{ Hz}$ καθορίζεται πειραματικά.

Μια πιο συνηθισμένη μορφή του νόμου του Wien περιέχει το μήκος κύματος αντί για τη συχνότητα. Γι' αυτό στο σχήμα 3.2 δίνουμε τη φασματική κατανομή της αφετικής ικανότητας ως προς το μήκος κύματος για τρεις θερμοκρασίες : (α) δωματίου ($300 \text{ } ^\circ\text{K}$), (β) μιας υψηλής θερμοκρασίας, $T = 1500 \text{ } ^\circ\text{K}$ και (γ) μιας πολύ υψηλής θερμοκρασίας $T = 5900 \text{ } ^\circ\text{K}$, που αντιστοιχεί στη θερμοκρασία της επιφάνειας του Ηλίου

Εάν λ_{\max} είναι το μήκος κύματος που αντιστοιχεί στο μέγιστο της καμπύλης $\rho_T(\lambda)$, ο νόμος του Wien γράφεται :

$$\lambda_{\max} = \frac{B}{T}, \quad (3.11\alpha)$$

όπου B μια σταθερά. Η τιμή της σταθεράς B προκύπτει πειραματικά :

$$B = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m } ^\circ\text{K}.$$

Η (3.11α) συνήθως γράφεται σε μια ισοδύναμη (και πιο γνωστή)

$$\text{μορφή : } \lambda_{\max} T = B = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m } ^\circ\text{K} \quad (3.11\beta)$$

Οι σχέσεις 3.10 – 3.11 εκφράζουν τον **νόμο μετατοπίσεως του Wien**.

Παράδειγμα 3.3 : Ποιο είναι το μήκος κύματος λ_{\max} , που αντιστοιχεί στη μέγιστη ένταση της ακτινοβολίας ενός Μέλανος Σώματος, σε συνήθεις θερμοκρασίες δωματίου ;

Απάντηση :

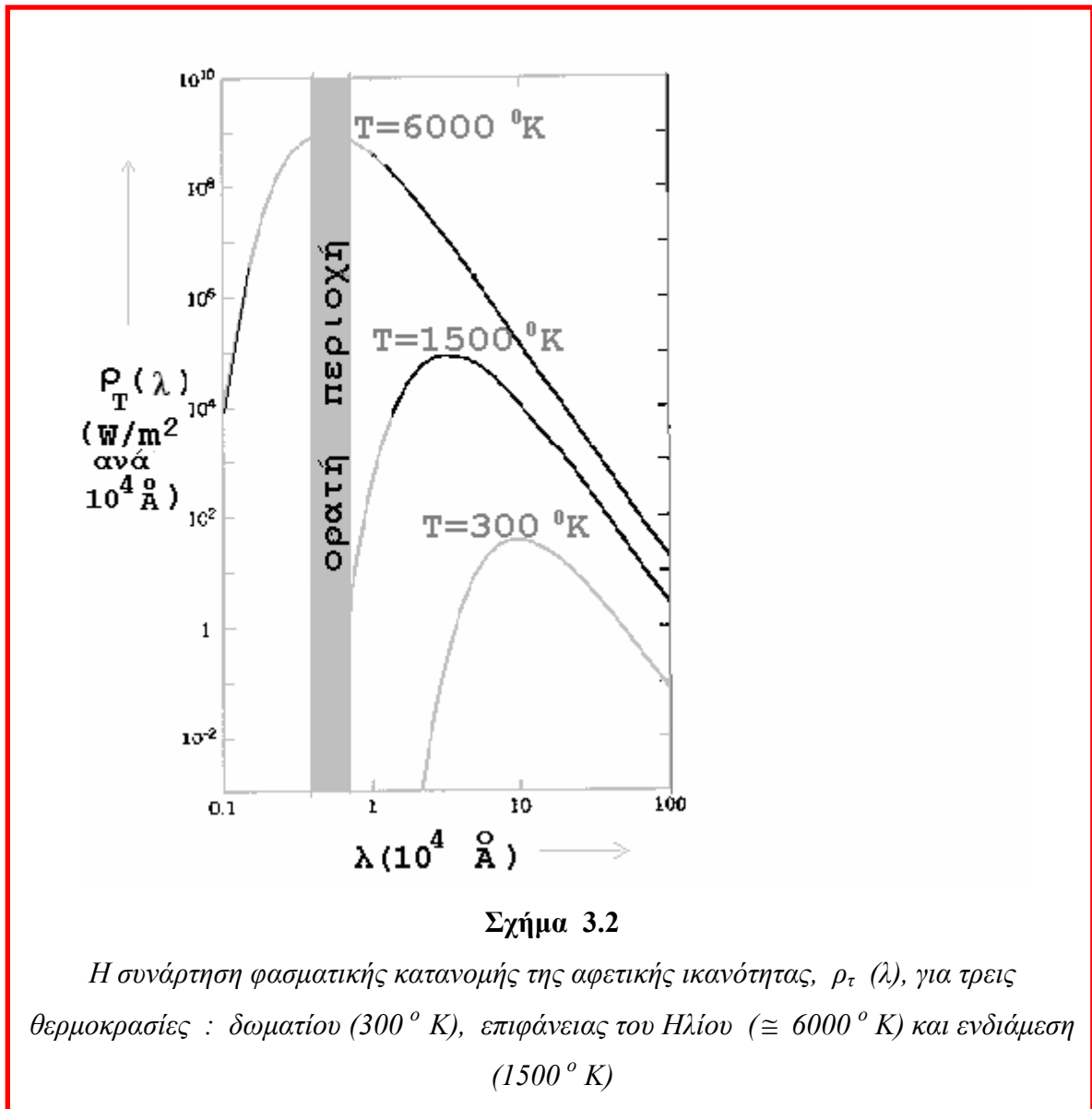
Σύμφωνα με τη σχέση 3.11, έχουμε : $\lambda_{\max} T = 0.2898 \times 10^{-2} \text{ m } ^\circ\text{K}$.

Για συνήθεις θερμοκρασίες δωματίου ($\Theta = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$) έχουμε $T = 293 \text{ } ^\circ\text{K}$. Έτσι :

$$\lambda_{\max} = \frac{2.898 \times 10^{-3} \text{ m } ^\circ\text{K}}{308 \text{ } ^\circ\text{K}} = 9.89 \text{ } \mu\text{m} \cong 10 \text{ } \mu\text{m} = 10^{-5} \text{ m} = 10^5 \text{ } \text{Å}, \text{ όπως φαίνεται και}$$

στο σχήμα 3.2. Βλέπουμε από το σχήμα 3.2 και από το διάγραμμα του σχήματος 3.1 ότι το μέγιστο της έντασης αντιστοιχεί στην υπέρυθρο περιοχή του φάσματος, και έτσι σε θερμοκρασίες δωματίου τα μελανά σώματα δεν είναι ορατά.

Σαν ένα δεύτερο παράδειγμα του εμπειρικού νόμου του Wien, ας θεωρήσουμε τον ήλιο ως μέλαν σώμα (σύμφωνα με ότι αναφέραμε πιο πάνω για τα διάχυρα αυτόφωτα σώματα) μπορούμε τότε να εκτιμήσουμε τη θερμοκρασία της επιφάνειας του μετρώντας



το λ_{\max} . Έχουμε για το μήκος κύματος $\lambda_{\max} = 5100 \text{ \AA}$, οπότε η θερμοκρασία της επιφάνειας του ηλίου προκύπτει ίση προς 5800°K , περίπου. Αυτή η θερμοκρασία συμβαδίζει με την μετρούμενη ποσότητα ηλιακής ενέργειας που φτάνει στην Γη ανά τετραγωνικό μέτρο σε ένα δευτερόλεπτο (δείτε άσκηση 3.6). Η ποσότητα αυτή της ενέργειας ανά τετραγωνικό μέτρο και δευτερόλεπτο, ονομάζεται ηλιακή σταθερά και είναι ίση προς 1350 W/m^2 . Στην θερμοκρασία των 5800°K , το μεγαλύτερο μέρος της ακτινοβολίας βρίσκεται μέσα στην ορατή περιοχή του φάσματος. Αυτό το γεγονός δικαιολογεί την υπόθεση ότι μέσα στη μακρά πορεία της ανθρώπινης εξέλιξης τα μάτια μας προσαρμόστηκαν ώστε από όλη τη «γκάμα» των μηκών κύματος του σχήματος 2.1, να είναι πιο ευαίσθητα στα μήκη κύματος ακτινοβολίας, στα οποία ο ήλιος εκπέμπει με

μεγαλύτερη ένταση. Σε αντιδιαστολή να παρατηρήσουμε πως για τον πολικό αστέρα π.χ. έχουμε $\lambda_{\max} = 3500 \text{ \AA}$, απ' όπου προκύπτει $T = 8300 \text{ }^{\circ}\text{K}$. Βέβαια, με τα ίδια δεδομένα θα μπορούσε να στηριχθεί και η αντίθετη επιχειρηματολογία για τη **βιολογική καταλληλότητα των φυσικών νόμων**²⁶. Στο πνεύμα της βιολογικής καταλληλότητας, η γένεση και επιβίωση του ανθρώπου με τα χαρακτηριστικά που γνωρίζουμε κατέστη δυνατή σ' αυτό το ηλιακό σύστημα (και όχι σε κάποιο άλλο) λόγω της καταλληλότητας των φυσικών συνθηκών. Αυτές οι δύο απόψεις αν και φαίνονται εκ διαμέτρου αντίθετες φιλοσοφικά, στην πραγματικότητα δεν είναι παρά συμπληρωματικές έννοιες μίας βαθύτερης ενότητας. Η αυστηρή προσήλωση στην μία από τις δύο, ή σε κάποια άλλη άποψη, είναι θέμα γενικότερων φιλοσοφικών πεποιθήσεων. Προφανώς η παραπέρα συζήτηση αυτού του θέματος είναι έξω από τα πλαίσια και τους σκοπούς αυτού του βιβλίου. Πριν κλείσουμε αυτή την ενότητα πρέπει να υπενθυμίσουμε πως οι καμπύλες του σχήματος 3.1 και 3.2, καθώς και οι νόμοι των Stefan - Boltzmann και του Wien, που περιγράψαμε μέχρι τώρα είναι πειραματικοί νόμοι, οι οποίοι, όπως θα δούμε παρακάτω, δεν μπορούν να εξηγηθούν με την κλασική θεωρητική φυσική.

Άσκησης:

3.1 Ποια η ολική ενέργεια που εκπέμπεται σε 10 δευτερόλεπτα από το μέλαν σώμα του παραδείγματος 3.2, το οποίο βρίσκεται σε θερμοκρασία περιβάλλοντος ;

Εάν το σώμα βρισκόταν σε θερμοκρασία $600 \text{ }^{\circ}\text{K}$, ποια θα ήταν τότε η ολική εκπεμπόμενη ενέργεια σε 10 δευτερόλεπτα ;

3.2 Με βάση το σχήμα 3.2 εκτιμήστε για ένα μέλαν σώμα, που έχει θερμοκρασία $6000 \text{ }^{\circ}\text{K}$ και επιφάνεια $S = 1 \text{ m}^2$, την ενέργεια που εκπέμπεται σε ένα δευτερόλεπτο στην ορατή περιοχή του φάσματος.

Πως αλλάζει η απάντησή σας όταν η θερμοκρασία του σώματος γίνει $1500 \text{ }^{\circ}\text{K}$;

3.3 Για το μέλαν σώμα της προηγούμενης ασκήσεως (στις 2 θερμοκρασίες) δώστε μια σχέση ή βρείτε ένα τρόπο να εκτιμήσετε: (α) την ολική εκπεμπόμενη ενέργεια σε ένα δευτερόλεπτο, (β) τον λόγο των δύο ενεργειών και (γ) την ενέργεια που εκπέμπεται σε ένα δευτερόλεπτο σε όλα τα μήκη κύματος μεταξύ μηδέν και του μήκους κύματος για το

²⁶ Βλέπε άρθρο του Σ.Τραχανά στην παραπομπή 9 με θέμα την βιολογική καταλληλότητα των φυσικών νόμων, καθώς και το εκλαϊκευμένο βιβλίο των ΚΑΡΛ ΣΑΓΚΑΝ και Ι.Σ. ΣΚΛΟΦΣΚΙ «Η Ζωή στο Σύμπαν», εκδόσεις ΩΡΩΡΑ

οποίο η συνάρτηση $u(v, T)$ είναι μέγιστη. Είναι αυτή η ενέργεια το μισό της ολικής ενέργειας;

3.4 Ποια η ένταση της ακτινοβολίας από μέλαν σώμα θερμοκρασίας $1000\text{ }^\circ\text{K}$ και επιφανείας 1 m^2 που προσπίπτει σε μία επιφάνεια 1 m^2 η οποία βρίσκεται σε απόσταση $L=10\text{ m}$;

Υπόδειξη: Θεωρείστε ότι το σώμα έχει σφαιρικό σχήμα ακτίνας $r_{\Sigma} \ll L$ και χρησιμοποιείτε το γεγονός ότι η ακτινοβολία εκπέμπεται ισοτροπικά, προς όλες τις διευθύνσεις.

3.5 Ποιο είναι το μήκος κύματος λ_{\max} , που αντιστοιχεί στη μέγιστη ένταση του ηλιακού φάσματος, δεδομένου ότι η θερμοκρασία της επιφανείας του ηλίου είναι περίπου $6000\text{ }^\circ\text{K}$;

3.6 Από τον νόμο του Wien έχει βρεθεί η θερμοκρασία της επιφανείας του ηλίου στους $6000\text{ }^\circ\text{K}$ περίπου ($5800\text{ }^\circ\text{K}$). Θεωρώντας τον ήλιο σαν ιδανικό μέλαν σώμα και λαμβάνοντας υπόψη ότι η ακτίνα του ηλίου είναι $6.96 \times 10^8\text{ m}$ και η απόσταση του από τη γη είναι $1.50 \times 10^{11}\text{ m}$, εκτιμήστε την ενέργεια ανά δευτερόλεπτο που προσπίπτει σε μια επιφάνεια ενός τετραγωνικού μέτρου στη γη. Αυτή η ποσότητα είναι γνωστή και σαν ηλιακή σταθερά.

3.7 Με βάση τα αποτελέσματα της προηγούμενης ασκήσεως και θεωρώντας τη γη σαν ιδανικό μέλαν σώμα που προσλαμβάνει όλη της την ενέργεια από τον ήλιο, εκτιμήστε την θερμοκρασία της γης. Σχολιάστε το αποτέλεσμα σας.

Ερώτηση 3.1 Κάτω από ποιες συνθήκες (εάν υπάρχουν) ένα μέλαν σώμα μπορεί να έχει χρώμα κόκκινο;

Ερώτηση 3.2 Αφού όλα τα σώματα εκπέμπουν ακτινοβολία, εξηγήστε γιατί δεν μπορούμε να δούμε τα αντικείμενα μέσα σ' ένα σκοτεινό δωμάτιο ;

Υπόδειξη :

Δείτε με προσοχή το σχήμα 3.2 και το παράδειγμα 3.3 παραπάνω.

3.2 Ένα πρότυπο μέλανος σώματος

Το ερώτημα που λογικά τώρα τίθεται, είναι « πού βρίσκουμε μέλανα σώματα ; » ή, με δεδομένη την πληροφορία ότι τέτοια σώματα δεν υπάρχουν, πως κατασκευάζουμε διατάξεις που προσεγγίζουν ικανοποιητικά το μέλαν σώμα; Πέρα από τα διάπυρα αυτόφωτα σώματα που έχουμε αναφέρει, μία κάπως ικανοποιητική προσέγγιση μέλανος σώματος μπορούμε να πάρουμε από οποιοδήποτε αντικείμενο καλύπτοντας την

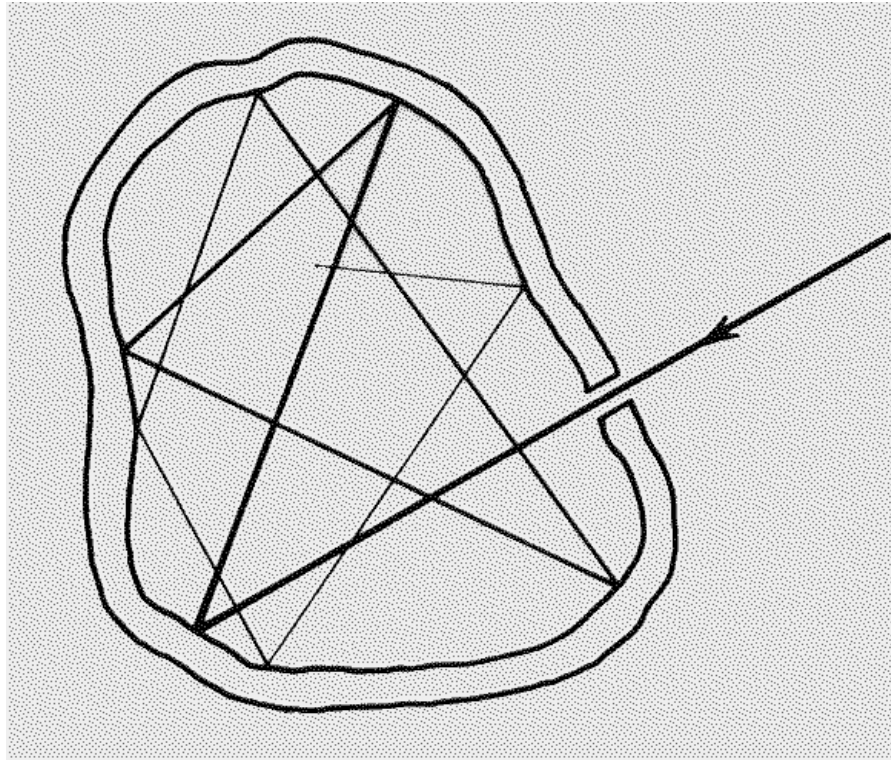
επιφάνεια του με ένα στρώμα μαύρης μπογιάς. Ένα τέτοιο σώμα απορροφά σχεδόν όλη την ακτινοβολία που προσπίπτει στην επιφάνειά του, γι αυτό και φαίνεται μαύρο. Από αυτό το χαρακτηριστικό έχει προέλθει και ο όρος μέλαν (μαύρο) σώμα.

Ένας σχηματικός τρόπος κατασκευής μέλανος σώματος, οποίος έχει πολύ μεγάλη σημασία και σπουδαιότητα, επειδή χρησιμοποιείται ως βάση για τους θεωρητικούς υπολογισμούς φαίνεται στο σχήμα 3.3. Το γεγονός ότι χρησιμοποιούμε μια «εξιδανικευμένη» κατασκευή για την περιγραφή του μέλανος σώματος δεν πρέπει να μας ξενίζει αφού η έννοια του μέλανος σώματος αυτή καθαυτή είναι μια εξιδανίκευση. Το ιδανικό πρότυπο μέλανος σώματος που φαίνεται στο σχήμα 3.3, κατασκευάζεται θεωρώντας μία κοιλότητα σ' ένα σώμα η οποία συνδέεται με την εξωτερική επιφάνεια του σώματος με μία μικρή οπή. Η ακτινοβολία που εισέρχεται από την οπή υφίσταται πολλές διαδοχικές ανακλάσεις στα εσωτερικά τοιχώματα της κοιλότητας και, σε κάθε ανάκλαση, υφίσταται μερική απορρόφηση. Η πιθανότητα να ξαναβρεί η ακτινοβολία τη δίοδο και να ξαναβγεί από την κοιλότητα μετά από κάποιο μικρό αριθμό ανακλάσεων ώστε να μην έχει απορροφηθεί τελείως, είναι αμελητέα.

Το μοντέλο μέλανος σώματος του σχήματος 3.3 έχει το διπλό πλεονέκτημα να είναι εξαιρετικά χρήσιμο τόσο από πειραματική όσο και από θεωρητική σκοπιά.

Το πειραματικό πλεονέκτημα είναι η ευκολία με την οποία μπορεί να κατασκευασθεί, χρησιμοποιώντας «μία κοιλότητα σ' ένα θερμαινόμενο σώμα με μία οπή «επικοινωνίας» στο εξωτερικό. Η ακτινοβολία που εκπέμπεται από την οπή είναι ακτινοβολία μέλανος σώματος, και το φάσμα της (σαν αυτό του σχήματος 3.1 ή 3.2) μπορεί εύκολα να μετρηθεί. Από θεωρητική άποψη είναι πολύ βολικό να μελετηθεί η ακτινοβολία με βάση το πρότυπο του σχήματος 3.3, επειδή μπορούν να χρησιμοποιηθούν πολύ γενικά θεωρητικά επιχειρήματα βασισμένα στην θερμοδυναμική ισορροπία της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας με τα τοιχώματα της κοιλότητας. Προφανώς η ακτινοβολία στο εσωτερικό της κοιλότητας είναι της ίδιας φύσεως με την ακτινοβολία που βγαίνει από την οπή. είναι δηλαδή ακτινοβολία μέλανος σώματος, αφού η οπή αφήνει να βγαίνει μόνο η εκπεμπόμενη ακτινοβολία, ενώ η προσπίπτουσα απορροφάται πλήρως.

Βλέπουμε λοιπόν πως ενώ οι πειραματικές μετρήσεις αφορούν την φασματική κατανομή $\rho_T(\nu)$ της ακτινοβολίας που εξέρχεται από την οπή, οι θεωρητικοί υπολογισμοί βασίζονται στην ισορροπία της ακτινοβολίας μέσα στην κοιλότητα.



Σχήμα 3.3

Ένα πρότυπο μέλανος σώματος αποτελούμενο από μία κοιλότητα στο εσωτερικό ενός σώματος. Ακτινοβολία που εισέρχεται από τη μικρή οπή παγιδεύεται και απορροφάται τελείως.

Μια ποσότητα που χαρακτηρίζει την ακτινοβολία μέσα στην κοιλότητα, είναι η πυκνότητα ενέργειας e :

$$e \equiv \frac{E}{V} \quad (3.12)$$

Η ποσότητα αυτή, που είναι σταθερή σ' όλο τον όγκο της κοιλότητας και δεν μεταβάλλεται ούτε με τη θέση (*ομογενής* ιδιότητα) ούτε με τη διεύθυνση (*ισοτροπική* ιδιότητα) είναι κατάλληλη για την θεωρητική περιγραφή της ακτινοβολίας μέσα στην κοιλότητα. Εάν ονομάσουμε Δe το μέρος εκείνο της πυκνότητας ενέργειας το οποίο οφείλεται σε ακτινοβολία με συχνότητες μεταξύ ν και $\nu + \Delta\nu$, τότε η στοιχειώδης πυκνότητα ενέργειας Δe είναι ανάλογη προς την περιοχή $\Delta\nu$:

$$\Delta e = u(\nu, T) \Delta\nu \quad (3.13)$$

Η φυσική ποσότητα $u(\nu, T)$ ονομάζεται **συνάρτηση φασματικής πυκνότητας**²⁷. Από την (3.13) βλέπουμε πως η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας ισούται με :

²⁷ Εδώ, σε αντίθεση με την $\rho_T(\nu)$, χρησιμοποιούμε για την $u(\nu, T)$ την μορφή συναρτήσεως δυο μεταβλητών.

$$u(\nu, T) = \frac{\Delta e}{\Delta \nu} \quad . \quad (3.14)$$

Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε :

$$u(\nu, T) = \frac{1}{V} \frac{\Delta E}{\Delta \nu} \quad . \quad (3.14\alpha)$$

Στο όριο των απειροστά μικρών μεταβολών μπορούμε, με κάποια μαθηματική ελαφρότητα που συνηθίζεται σε τέτοιες περιπτώσεις, να χρησιμοποιήσουμε αντί των ΔE και $\Delta \nu$ τις διαφορικές μεταβολές dE και $d\nu$ αντίστοιχα και να γράψουμε:

$$u(\nu, T) = \frac{1}{V} \frac{dE}{d\nu} \quad . \quad (3.14\beta)$$

Φαίνεται λοιπόν από τις σχέσεις 3.14 ότι η φασματική πυκνότητα μπορεί να υπολογισθεί σαν παράγωγος ως προς ν της ενέργειας, διαιρεμένη με τον όγκο V ή, ισοδύναμα, σαν παράγωγος της πυκνότητας ενέργειας e

Οι συναρτήσεις κατανομής $\rho_T(\nu)$ και $u(\nu, T)$ είναι ανάλογες²⁸, αλλά η $u(\nu, T)$ είναι πιο άμεσα υπολογίσιμη και επομένως πιο βολική για την θεωρητική περιγραφή της ακτινοβολίας. Η καμπύλη που δίνει το $u(\nu, T)$ ως συνάρτηση του ν για μια κοιλότητα της οποίας τα τοιχώματα βρίσκονται σε θερμοκρασία T , έχει την ίδια μορφή με την καμπύλη που δίνει το $\rho_T(\nu)$ συναρτήσει του ν για ένα μέλαν σώμα της ίδιας θερμοκρασίας T . Η κοινή μορφή και των δύο καμπυλών εξαρτάται μόνο από την θερμοκρασία. Η μορφή της συνάρτησης $u(\nu, T)$ μπορεί να βρεθεί με πολύ γενικά επιχειρήματα, αρκεί να υπάρχει μία βασική κατανόηση του φαινομένου, η οποία στηρίζεται στη θερμοδυναμική ισορροπία της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας μέσα στην κοιλότητα με την ύλη (τα υλικά σώματα) των τοιχωμάτων. Τα τοιχώματα της κοιλότητας εκπέμπουν ηλεκτρομαγνητική (θερμική) ακτινοβολία λόγω της θερμικής κινήσεως των φορτισμένων δομικών τους λίθων (μόρια, ιόντα, ηλεκτρόνια, κ.λ.π.). Με τη σειρά του το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που είναι «εγκλωβισμένο» μέσα στην κοιλότητα, ασκεί ηλεκτρικές δυνάμεις πάνω στους φορτισμένους δομικούς λίθους των τοιχωμάτων και μεταβάλλει την κινητική τους κατάσταση. Στην κατάσταση της θερμοδυναμικής ισορροπίας η ενέργεια που ανταλλάσσεται με τις δύο αυτές διαδικασίες εξισορροπείται. Ο κλασικός θεωρητικός προσδιορισμός της φασματικής πυκνότητας, ο οποίος,

²⁸ Με καθαρά διαστατικά επιχειρήματα, σαν αυτά που θα συζητήσουμε παρακάτω, μπορεί ναδειχθεί ότι ο συντελεστής αναλογίας καθορίζεται από την ταχύτητα c του φωτός (βλέπε άσκηση 1 και 2). Ο ακριβής συντελεστής αναλογίας (βλέπε εδάφιο 3.γ3) είναι $\frac{c}{4}$.

σημειωτέον, δεν απαιτεί λεπτομερή μελέτη της κινήσεως των φορτισμένων σωματιδίων των τοιχωμάτων αλλά βασίζεται σε γενικά θερμοδυναμικά επιχειρήματα, οφείλεται στους Rayleigh και Jeans. Το αποτέλεσμα της εργασίας των Rayleigh-Jeans, την οποία θα σκιαγραφήσουμε παρακάτω, έδειξε την σοβαρή αδυναμία της κλασικής φυσικής να αναπαράγει τις πειραματικές καμπύλες του σχήματος 3.1 (ή του 3.2).

Σ' αυτό το σημείο καλό είναι να επιστημόνουμε πως σε αναλογία με την *φασματική κατανομή της αφετικής ικανότητας ως προς το μήκος κύματος (σχέση 3.5)*, μπορούμε να ορίσουμε και την *συνάρτηση φασματικής πυκνότητας ως προς το μήκος κύματος λ , $u(\lambda, T)$* , σε αντιστοιχία με τις σχέσεις 3.14 :

$$u(\lambda, T) = \frac{1}{V} \frac{dE}{d\lambda} \quad (3.15)$$

Άσκηση 3.8 Σε αναλογία με την σχέση (3.4) γράψτε μια σχέση για την ολική (σε όλα τα μήκη κύματος) ενέργεια του συστήματος

Ερώτηση 3.3 :

Αναφερόμενοι στο μοντέλο μέλανος σώματος της Δραστηριότητας 3.1, θα είχε κάποια σημαντική επίπτωση στην ποιότητα της προσέγγισης εάν (α) το θερμό σώμα ήταν μεταλλικό ή εάν (β) η εξωτερική του επιφάνεια ήταν βαμμένη μαύρη ή άσπρη ;

Ερώτηση 3.4:

Καθώς παρατηρείτε τα αντικείμενα στο εσωτερικό ενός πολύ καυτού φούρνου, ενώ αρχίζει να θερμαίνεται, μπορείτε να διαπιστώσετε ότι δυσκολεύεστε να διακρίνετε το σχήμα τους. Γιατί ;

Υπόδειξη : Αναλογιστείτε την προέλευση του φωτός που φτάνει στα μάτια σας από τα αντικείμενα αυτά. Πώς αλλάζει αυτή η εικόνα όταν ο φούρνος είναι σβηστός και τα αντικείμενα σε θερμοκρασία δωματίου ; ...

3.3 Απόπειρα Κλασικής ερμηνείας

Υπενθύμιση: Η συζήτηση σ' αυτό και το επόμενο υποκεφάλαιο αποκτά ιδιαίτερο νόημα, εάν έχουμε στο μυαλό μας το κεφάλαιο 5 από την «Κυματική και Ταλαντώσεις», στο οποίο συζητούνται οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης σε εκτεταμένα μέσα και δείχνεται η ισοδυναμία τους με τα «στάσιμα κύματα» στα εν λόγω εκτεταμένα μέσα. Στην προκειμένη περίπτωση το εκτεταμένο μέσο είναι η κοιλότητα (και τα τοιχώματα της κοιλότητας) του σχήματος 3.3. Στην συζήτηση που ακολουθεί θα αποφύγουμε την ρητή αναφορά στους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης, χάριν των αναγνωστών, οι οποίοι δεν έχουν εξοικειωθεί ακόμη μ'

αυτές τις έννοιες. Αντί για αυτό τον όρο θα χρησιμοποιούμε «ισοδύναμα» τους όρους στάσιμα κύματα ή και απλά «ατομικοί ταλαντωτές»²⁹.

Βάση για τον θεωρητικό υπολογισμό της φασματικής πυκνότητας u , όπως είδαμε νωρίτερα, αποτελεί το πρότυπο του σχήματος 3.3. Για απλότητα θα θεωρήσουμε μια μεταλλική κοιλότητα με στιλπνά τοιχώματα, σε σχήμα κύβου με ακμή μήκους L . **Αφετηρία** για τον θεωρητικό υπολογισμό της συναρτήσεως $u(\nu, T)$ είναι η διαπίστωση ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα στο εσωτερικό αυτής της κοιλότητας πρέπει να είναι στάσιμα κύματα με κόμβους στα τοιχώματα της κοιλότητας.

Η διαπίστωση αυτή προέρχεται από την εξής φυσική εικόνα :

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων με αρχή μια κορυφή του κύβου της κοιλότητας, και άξονες x , y και z , παράλληλους προς τρεις αμοιβαία κάθετες ακμές. Έστω κάποιο ηλεκτρομαγνητικό κύμα το οποίο διαδίδεται κατά μήκος του άξονα x , παράλληλα προς μια ακμή της κοιλότητας. Στη θέση $x = L$ ανακλάται πλήρως από τη στιλπνή μεταλλική επιφάνεια του τοιχώματος. Ο συνδυασμός του προσπίπτοντος και του ανακλωμένου κύματος δημιουργεί το στάσιμο κύμα. Επειδή τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι εγκάρσια, το ηλεκτρικό πεδίο του (στάσιμου) κύματος θα είναι κάθετο προς τη διεύθυνση διαδόσεως (τον άξονα των x) και επομένως παράλληλο προς το μεταλλικό τοίχωμα που βρίσκεται στη θέση $x = L$. Όμως είναι γνωστό από το μάθημα του Ηλεκτρομαγνητισμού ότι, παράλληλα ηλεκτρικά πεδία πάνω σε μεταλλικές επιφάνειες δεν είναι δυνατόν να « επιζήσουν » επειδή προκαλούν ροή φορτίων (ηλεκτρονίων), η οποία τα εξουδετερώνει. Έτσι θα πρέπει να έχουμε $E = 0$, για $x = L$. Για τον ίδιο λόγο (ύπαρξη μεταλλικού τοιχώματος της κοιλότητας στη θέση $x = 0$) θα έχουμε $E = 0$ και για $x = 0$. Προφανώς, μπορούμε να κάνουμε την ίδια συζήτηση με ανάλογα συμπεράσματα, και για περιπτώσεις κυμάτων που διαδίδονται παράλληλα προς τον άξονα y ή τον άξονα z . Για κύματα που έχουν τυχαία κατεύθυνση, οι συνιστώσες τους κατά μήκος των αξόνων x , y , z δεν αναμιγνύονται μεταξύ τους αφού τα απέναντι τοιχώματα της κοιλότητας είναι παράλληλα. Επομένως στη γενική περίπτωση (που το κύμα έχει τυχαία διεύθυνση) τα συμπεράσματά μας ισχύουν αντίστοιχα για τις x , y και z συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στις θέσεις :

$$(x = 0, L), (y = 0, L) \text{ και } (z = 0, L) \quad ,$$

²⁹ Ο κίνδυνος παρερμηνείας ελλοχεύει στο γεγονός ότι μεταχειριζόμαστε τους ατομικούς ταλαντωτές σαν «ανεξάρτητους», δηλαδή σαν να μην αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Στην πραγματικότητα οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης είναι ανεξάρτητοι και όχι οι ατομικοί ταλαντωτές. Δείτε και τη συζήτηση στην ΣΚΦ,

όπου το ηλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται, και το στάσιμο κύμα έχει **κόμβους**.

Η φυσική απαίτηση για κόμβους στα τοιχώματα, εκφράζεται μαθηματικά με μια «**συνοριακή συνθήκη**», που περιορίζει δραστικά το πλήθος των επιτρεπτών στασίμων κυμάτων : Μόνον εκείνα τα στάσιμα κύματα είναι δυνατό να υπάρχουν, των οποίων οι κυματαριθμοί ικανοποιούν τη μαθηματική σχέση που εξασφαλίζει την ισχύ της (συν)οριακής συνθήκης. Είναι εύκολο να δούμε ποια θα πρέπει να είναι αυτή η μαθηματική σχέση εάν θυμηθούμε την μαθηματική μορφή ενός μονοδιάστατου στάσιμου κύματος (βλέπε κεφάλαιο 1 - κυματική) :

$$E(x,t) = E_0 \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (3.16)$$

Ένα τέτοιο στάσιμο κύμα θα μηδενίζεται για όλες τις χρονικές στιγμές t , στις θέσεις x που ικανοποιούν την σχέση³⁰

$$kx = n\pi \quad n=0,1,2,3,\dots$$

Αφού, όπως είδαμε παραπάνω, στην γενική τριδιάστατη περίπτωση, οι συνιστώσες των στασίμων κυμάτων κατά μήκος των αξόνων x, y, z δεν αναμιγνύονται μεταξύ τους, μπορούμε αρχικά να θεωρήσουμε για απλότητα μια υποθετική μονοδιάστατη κοιλότητα μήκους L . Τότε η (συν)οριακή συνθήκη ισχύει εάν και μόνον εάν³¹ :

$$kL = n\pi, \quad n = 1,2,3,\dots \quad (3.17)$$

Με βάση αυτή την απαίτηση, οι Rayleigh και Jeans υπολόγισαν τον αριθμό των στασίμων κυμάτων $\Delta N(k, k+\Delta k)$ με κυματαριθμούς μεταξύ k και $k+\Delta k$, απ' όπου υπολογίζεται και το πλήθος $\Delta N(\nu, \nu+\Delta\nu)$ των στασίμων κυμάτων με συχνότητες μεταξύ ν και $\nu+\Delta\nu$, εφόσον γνωρίζουμε την σχέση μεταξύ ν και k .

Η ποσότητα $\Delta N(\nu, \nu+\Delta\nu)$ αποτελεί το πρώτο μεγάλο βήμα για τον υπολογισμό της συνάρτησης u , αφού πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό $\Delta N(\nu, \nu+\Delta\nu)$ με τη μέση ενέργεια $\langle E \rangle$ κάθε κύματος λαμβάνουμε την αντίστοιχη ενέργεια του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $\Delta E(\nu, \nu+\Delta\nu)$. Η ενέργεια $\Delta E(\nu, \nu+\Delta\nu)$ αντιστοιχεί στην περιοχή συχνοτήτων από ν ως $\nu+\Delta\nu$. Σύμφωνα λοιπόν με τον ορισμό (3.14α), η συνάρτηση u έπεται από την $\Delta E(\nu, \nu+\Delta\nu)$, με διαίρεση δια του $\Delta\nu$ και του όγκου V της κοιλότητας.

κεφάλαιο 12, για το πρόβλημα των πολλών σωμάτων. Περισσότερα για αυτό το θέμα θα δούμε στο κεφάλαιο 4 για τις ειδικές θερμοότητες των στερεών.

³⁰ Η συνθήκη 3.17 ικανοποιείται από τους ακεραίους $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Όμως τα στάσιμα κύματα με αρνητικές τιμές του ακεραίου n , είναι ισοδύναμα με αυτά που προκύπτουν από τις θετικές τιμές, αφού αντιστοιχούν στην ίδια συχνότητα.

Η μέση τιμή $\langle E \rangle$ της ενέργειας καθ' ενός από τα στάσιμα κύματα, υπολογίζεται εύκολα από την κατανομή Maxwell-Boltzman (βλέπε ΣΚΦ, κεφάλαιο 18). Έτσι έχουμε διαδοχικά:

$$\langle E \rangle = \int_0^{\infty} E p(E) dE = \int_0^{\infty} E \beta e^{-\beta E} dE = \frac{1}{\beta} = k_B T, \quad (3.18) \quad \leftarrow$$

όπου k_B η σταθερά του Boltzman³², $\beta = \frac{1}{k_B T}$ και

$$p(E) dE = \beta e^{-\beta E} dE, \quad (3.19)$$

η πιθανότητα να έχει ένα στάσιμο κύμα (ή, ισοδύναμα, ένας κανονικός τρόπος ταλάντωσης) ενέργεια μεταξύ E και $E + dE$.

Θα πρέπει να σημειώσουμε παρενθετικά πως η σχέση (3.19) για την πιθανότητα $p(E)$, όπως είδαμε στο κεφάλαιο 18 της ΣΚΦ, είναι ισοδύναμη με (και προέρχεται από) την πιο γνωστή σχέση:

$$p(E) = \frac{e^{-\beta E}}{\int_0^{\infty} e^{-\beta E} dE} = \frac{e^{-\beta E}}{\frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} e^{-\beta E} d(\beta E)} = \beta e^{-\beta E} \quad (3.19'),$$

στην οποία έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα στον παρανομαστή ισούται με την μονάδα, $\int_0^{\infty} e^{-y} dy = 1$. Στις σχέσεις 3.19, 3.19' έχουμε έμμεσα υποθέσει ότι

η μικρότερη δυνατή ενέργεια του (θερμοδυναμικού) συστήματος είναι μηδέν. Εάν θεωρήσουμε ότι η ελάχιστη ενέργεια του συστήματος δεν είναι μηδενική αλλά ίση προς E_0 , τότε οι σχέσεις 3.19, 3.19' μπορούν να γραφούν στην μορφή:

$$p(E) = p_0 e^{-\beta(E-E_0)} \quad (3.19''),$$

όπου p_0 είναι η πιθανότητα να έχει το σύστημα την ελάχιστη ενέργεια E_0 .

Μπορούμε να αποφύγουμε, αν θέλουμε, την μαθηματική μορφή των σχέσεων 3.18-3.19'' και να πάρουμε το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα πολύ πιο εύκολα, χρησιμοποιώντας **το θεώρημα ισοκατανομής της Ενέργειας** (βλέπε ΣΚΦ κεφάλαιο 18). Το θεώρημα ισοκατανομής, ως γνωστόν, προβλέπει ότι **η μέση κινητική ενέργεια ανά βαθμό ελευθερίας είναι ίση προς $k_B T/2$** . Ένα στάσιμο κύμα (ένας κανονικός τρόπος ταλάντωσης) έχει ένα βαθμό ελευθερίας (το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου). Όμως, η

³¹ Στη (3.17) δεν περιλάβαμε την τιμή $n = 0$, επειδή σ' αυτή την περίπτωση ($k = 0$) δεν θα υπήρχε κύμα., αφού για κάθε x και t θα είχαμε, σύμφωνα και με τη (3.16), $E(x,t) = 0$.

³² Έχουμε συμβολίσει την σταθερά του Boltzman με το σύμβολο k_B , προς αποφυγή συγχύσεως με τον κυματάριθμο k .

(μέση) ολική ενέργεια του ισούται με δυο φορές τη μέση κινητική ενέργεια, και έτσι προκύπτει η (3.18). Την ίδια μέθοδο θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα και στο κεφάλαιο 4 για τις ειδικές θερμότητες αερίων και στερεών σωμάτων.

Ο υπολογισμός του πλήθους $\Delta N(v, v+\Delta v)$ είναι σχετικά επίπονος και χρονοβόρος. Η λεπτομερής παρουσίασή του εδώ (που φυσιολογικά ανήκει) θα ήταν μάλλον επιζήμια για την κατανόηση αυτού του θέματος και θα επηρέαζε αρνητικά την συνέχεια και ομοιογένεια αυτού του εδαφίου. Έτσι, αφήνουμε κατά μέρος την λεπτομερή απόδειξη για το εδάφιο 3.4, στο οποίο ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει αν έχει την περιέργεια³³. Σ' αυτό το εδάφιο σκιαγραφείται μόνο η μαθηματική διαδικασία και δικαιολογείται με διαστατική ανάλυση (δείτε το κεφάλαιο 6 στην ΣΚΦ) το αποτέλεσμα για την συνάρτηση u . Έχουμε λοιπόν την ευκαιρία να συγκεντρώσουμε εδώ την προσοχή μας περισσότερο στη φυσική σημασία και τη διερεύνηση του αποτελέσματος.

Η μαθηματική διαπραγμάτευση, λόγω του συνεχούς φάσματος, ξεκινάει, κατά τα γνωστά, με την εισαγωγή της κατάλληλης «πυκνότητας» (σε αναλογία με την (2.1)) και την μετατροπή πεπερασμένων αθροισμάτων σε ολοκληρώματα (σε αναλογία με την (2.2))

Διαδοχικά λοιπόν στο όριο που $\Delta v \rightarrow 0$ μπορούμε να αντικαταστήσουμε:

$\Delta v \rightarrow dv$ και $\Delta N(v, v+dv) \rightarrow dN_v$, και να γράψουμε (διαιρώντας με τον όγκο V , λόγω της ομογενούς» ιδιότητας και του ορισμού της συνάρτησης u):

$$\frac{dN_v}{V} = g(v) dv \quad (3.20).$$

Η (3.20) εκφράζει το γεγονός ότι το πλήθος των στασίμων κυμάτων με συχνότητες μεταξύ v και $v + dv$, $\Delta N(v, v+dv) \equiv dN_v$, είναι ανάλογο του εύρους dv της περιοχής συχνοτήτων που θεωρούμε και του όγκου V της κοιλότητας. Είναι φανερό ότι η ποσότητα dN_v/V δεν δίνει το «πλήθος των στασίμων κυμάτων dN_v που περιέχονται στη μονάδα του όγκου». δεδομένου ότι όλα τα στάσιμα κύματα εκτείνονται σε ολόκληρο τον όγκο της κοιλότητας και δεν υπάρχουν στάσιμα κύματα που βρίσκονται εξ ολοκλήρου σε ένα τμήμα, μοναδιαίο ή μη, του όγκου V . Η συνάρτηση $g(v)$ ονομάζεται **πυκνότητα καταστάσεων**. Γενικότερα ονομάζουμε «πυκνότητα καταστάσεων» το πηλίκο του πλήθους των καταστάσεων, διαιρεμένων δια του όγκου V , οι οποίες χαρακτηρίζονται από μια τιμή της συχνότητας στο διάστημα $(v, v+dv)$ ή από μια τιμή της ενέργειας στο

³³Έτσι, δυστυχώς, προς το παρόν η σχέση (3.20) θα μοιάζει «ουρανοκατέβατη»! Η πλήρης απόδειξή της, που βρίσκεται στο εδάφιο 3.4, δεν είναι απαραίτητη για την ομαλή και απρόσκοπτη συνέχεια του μαθήματος.

διάστημα $(E, E+dE)$, δια του εύρους $(\Delta\nu \approx d\nu$ ή $\Delta E \approx dE)$ του διαστήματος αυτού. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, αφού οι καταστάσεις του συστήματος περιγράφονται από στάσιμα κύματα θα μπορούσαμε να την ονομάσουμε και « **πυκνότητα στασίμων κυμάτων** ». Η (3.20) μπορεί να γραφεί ως $g(\nu) = \frac{1}{V} \frac{dN_\nu}{d\nu}$ (3.20.α).

$$g(\nu) = \frac{1}{V} \frac{dN_\nu}{d\nu} \quad (3.20.α)$$

Επειδή όμως το πλήθος dN_ν στην (3.21) προκύπτει από το αντίστοιχο πλήθος $dN_k = \Delta N(k, k+dk)$, η πυκνότητα καταστάσεων $g(\nu)$, υπολογίζεται από την σχέση :

$$g(\nu) = \frac{1}{V} \frac{dN_k}{dk} \frac{1}{(d\nu/dk)} \quad (3.21)$$

Από τον ορισμό της u (σχέση 3.14β), την (3.20) και την μέχρι τώρα συζήτηση προκύπτει ότι :

$$u(\nu, T) = \langle E \rangle g(\nu) \quad (3.22)$$

Ο υπολογισμός της πυκνότητας καταστάσεων $g(\nu)$ και κατά συνέπεια, λόγω της (3.22), της u επιτυγχάνεται με παραγωγήση (σύμφωνα με την 3.21) του αριθμού N_k των στασίμων κυμάτων με κυματαριθμούς από μηδέν έως k . Αυτή η ποσότητα υπολογίζεται από τις οριακές συνθήκες (3.17).

Το αποτέλεσμα, όπως προκύπτει από την λεπτομερή ανάλυση του εδαφίου 3.4, είναι:

$$g(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \quad (3.23)$$

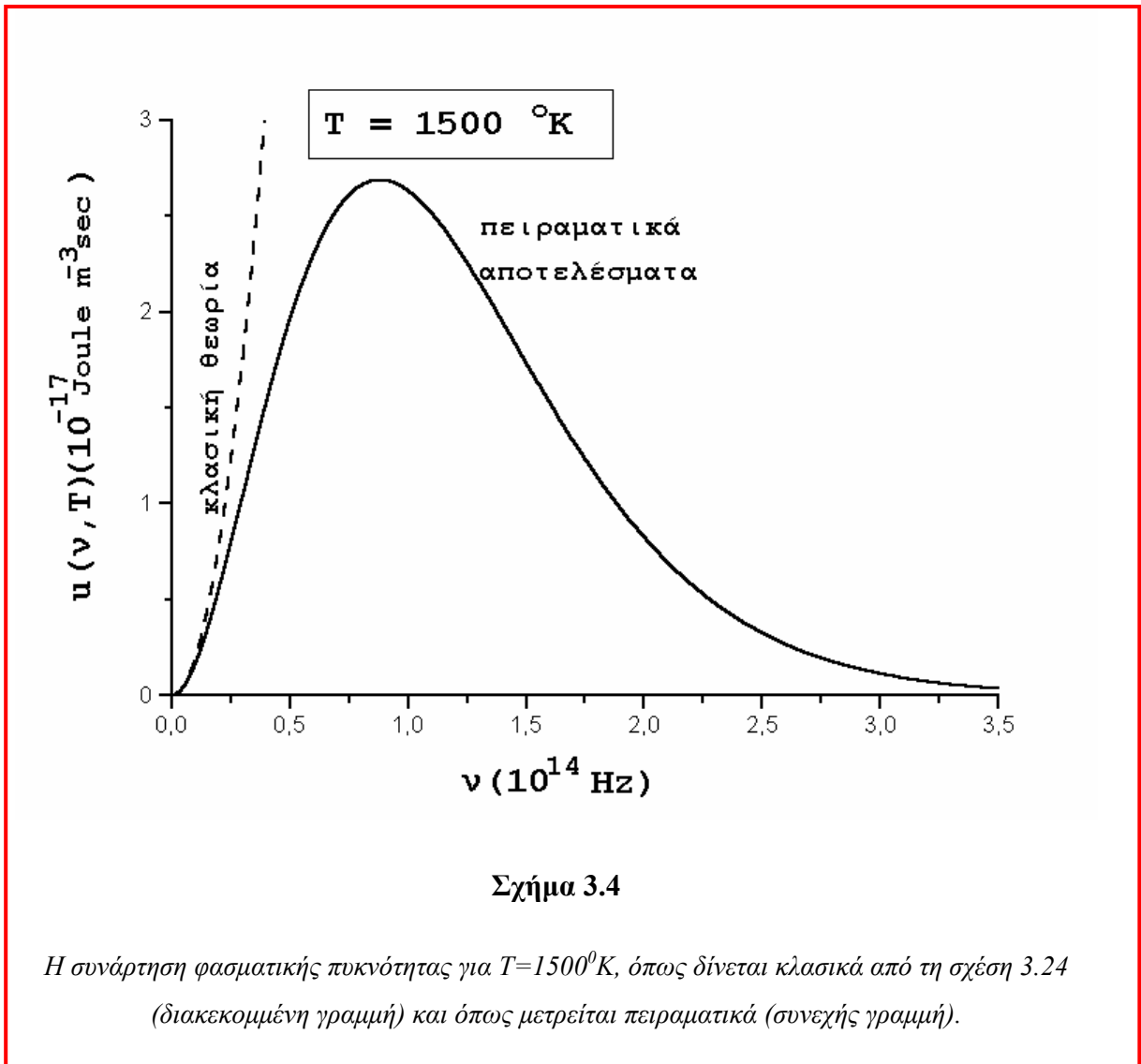
Οι σχέσεις 3.18– 3.23 αποτελούν τις βασικές σχέσεις στα διάφορα στάδια υπολογισμού της συναρτήσεως $u(\nu, T)$, όπως συνοψίζονται και στο διάγραμμα [3.1], και οδηγούν στην τελική σχέση :

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T \quad (3.24)$$

Η σχέση 3.24, που είναι γνωστή ως σχέση των Rayleigh-Jeans, δείχνει αμέσως το σοβαρό πρόβλημα της **υπεριώδους καταστροφής** αφού για μεγάλες συχνότητες η φασματική πυκνότητα παίρνει διαρκώς μεγαλύτερες τιμές και προφανώς απειρίζεται στο όριο $\nu \rightarrow \infty$. Είναι φανερό πως μια τέτοια συμπεριφορά δεν μπορεί να ικανοποιήσει τον νόμο του Wien, αφού για οποιαδήποτε θερμοκρασία η $u(\nu, T)$ δεν παρουσιάζει μέγιστο για καμία πεπερασμένη τιμή της συχνότητας και επομένως δεν υπάρχει το $\nu_{\max T}$ της σχέσης (3.10). Όμοια, ούτε ο νόμος των Stefan και Boltzmann μπορεί να

ικανοποιηθεί από την (3.24), αφού η ολική ισχύς ³⁴ που εκπέμπεται θα ήταν άπειρη σε οποιαδήποτε θερμοκρασία. Όλα αυτά φαίνονται καθαρά στο σχήμα 3.4 που δείχνει τα αποτελέσματα της κλασικής θεωρίας και του πειράματος για θερμοκρασία $T=1500^{\circ}\text{K}$. Η ασυμφωνία με το πείραμα γίνεται αμέσως και έντονα αντιληπτή. Το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη $u(\nu, T)$ το οποίο, για δοθείσα θερμοκρασία, είναι ανάλογο προς την εκπεμπόμενη ενέργεια προκύπτει επίσης άπειρο κάτι που επαναβεβαιώνει την αδυναμία της κλασικής θεωρίας να εξηγήσει (ανάμεσα σε πολλά άλλα) τον πειραματικό νόμο των Stefan-Boltzmann. Αξίζει πάντως να παρατηρήσουμε **ότι στο όριο των χαμηλών συχνοτήτων η κλασική καμπύλη προσεγγίζει καλά τα πειραματικά αποτελέσματα**. Αυτό είναι κάτι που χρειάζεται παραπέρα σχολιασμό (βλέπε εδάφιο 3.5) επειδή δείχνει πως η **ορθή θεωρητική περιγραφή του φαινομένου πρέπει να καταλήγει στο κλασικό αποτέλεσμα (3.24) σε κάποιο όριο**, στο όριο των χαμηλών συχνοτήτων. Το γεγονός ότι το $u(\nu, T)$ προκύπτει ανάλογο του $\frac{\nu^2}{c^3} k_B T$, προκύπτει **γρήγορα και εύκολα** (χωρίς να χρειάζεται καθόλου η εκτεταμένη συζήτηση του εδαφίου (3.4) **με τη μέθοδο της διαστατικής ανάλυσης**, στην οποία αναφερθήκαμε στο κεφάλαιο 6 της ΣΚΦ. Εντούτοις, για τους αναγνώστες, οι οποίοι δεν είναι εξοικειωμένοι με το βιβλίο ΣΚΦ, επειδή είναι η πρώτη ευκαιρία που μας δίνεται για κάποια εκτεταμένη εφαρμογή μιας τέτοιας μεθόδου, θα κάνουμε μια σχετικά μεγάλη παρένθεση για να αναπαράγουμε με διαστατικά επιχειρήματα την παραπάνω εξάρτηση που προβλέπει ο νόμος των Rayleigh -Jeans. Έτσι, αφ' ενός μεν θα είμαστε σε θέση να εκτιμήσουμε ρεαλιστικά την αξία αυτής της μεθόδου και αφ' ετέρου θα δικαιολογήσουμε την σχέση (3.24) που μέχρι τώρα παραμένει σαν « δοσμένη από ψηλά ».

³⁴ Βλέπε σχέση 3.4 και άσκηση 3.13



3.4 Αιτιολόγηση – Ανάπτυξη του νόμου των Rayleigh-Jeans

3.4.1 Διαστατική αιτιολόγηση του νόμου των Rayleigh-Jeans

Με βάση τα όσα έχουμε πει μέχρι τώρα (πριν φτάσουμε στον τύπο των Rayleigh-Jeans) για την συνάρτηση $u(\nu, T)$ είναι ξεκάθαρο ότι αυτή θα εξαρτάται (εξ ορισμού, σχέσεις 3.14) από τη συχνότητα ν και την θερμοκρασία T . Μάλιστα η εξάρτηση από την θερμοκρασία λόγω των (3.18) και (3.22) θα λαμβάνει χώρα μέσω της παραμέτρου $\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$. Έτσι, οι

δύο βασικές παράμετροι εξάρτησης που έχουμε στην διάθεσή μας μέχρι τώρα είναι η συχνότητα ν και η παράμετρος β . Από τη φύση του φαινομένου, λόγω του θεμελιακού ρόλου της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, που χαρακτηρίζεται από την ταχύτητα του φωτός c ,

είναι ευκολονόητη³⁵ η τρίτη παράμετρος του προβλήματός μας που δεν είναι άλλη από ταχύτητα c . Εξάρτηση από άλλη παράμετρο ή ποσότητα δεν φαίνεται να υπάρχει μέσα στο κλασικό πλαίσιο περιγραφής. Έτσι, έχουμε μόνο τρεις παραμέτρους και επιθυμούμε να βρούμε την εξάρτηση (εκθέτες) της u από αυτές. Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 1, εάν έχουμε εξάρτηση από περισσότερες από τρεις παραμέτρους (ποσότητες), δεν είναι δυνατόν να φέρουμε εις πέρας μια τέτοιου είδους διαστατική ανάλυση, αφού τότε η εξάρτηση δεν θα είναι μονοσήμαντη.

Πληρούνται λοιπόν όλες οι προϋποθέσεις για να προχωρήσουμε σε διαστατική ανάλυση. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε την γενική εξάρτηση της συναρτήσεως u :

$$u \approx v^x \beta^y c^z, \quad (3.25)$$

απ' όπου έχουμε: $[u] = [v]^x [\beta]^y [c]^z$
(3.26).

Οι αγκύλες γύρω από τα σύμβολα των μεγεθών υποδηλώνουν, κατά τα γνωστά τις μονάδες (ή γενικότερα τις διαστάσεις) των αντιστοιχών μεγεθών σε κάποιο από τα συνηθισμένα συστήματα μονάδων (π.χ. CGS, MKS κ.τ.λ.).

Από τον ορισμό (3.14) της u , έχουμε: $[u] = [E][V]^{-1}[v]^{-1}, \quad (3.27).$

Εφ' όσον είμαστε σε τριδιάστατο χώρο, ο όγκος V που υπεισέρχεται στην (3.27) θα έχει διαστάσεις $[L]^3$, όπου κατά τα γνωστά, $[M]$, $[L]$ και $[T]$ συμβολίζουν αντίστοιχα τις θεμελιώδεις μονάδες μάζας, μήκους και χρόνου. Οι διαστάσεις και των υπολοίπων μεγεθών στην (3.27) υπολογίζονται σχετικά εύκολα. Η συχνότητα ν έχει διαστάσεις αντιστρόφου χρόνου. Για τον υπολογισμό των διαστάσεων της ενέργειας E , που είναι διαστάσεις Έργου χρειάζεται να αντικαταστήσουμε διαδοχικά το Έργο με Δύναμη, F , επί Μετατόπιση, x , και εν συνεχεία να εισάγουμε την Επιτάχυνση, γ , και την Μάζα, m , ως εξής :

$$[E] = [F x] = [m \gamma x] = [m] [\gamma] [x] = [M] [L] [T]^{-2} [L] .$$

³⁵ Το « ευκολονόητο » μιας έννοιας είναι πάντοτε συνάρτηση του τι γνωρίζει ήδη κάποιος. Έτσι κάποιος που έχει γνώση της (3.23) είναι σχεδόν σίγουρο ότι θα « μαντέψει » σωστά την τρίτη παράμετρο και, κάτι εξ ίσου σημαντικό, θα είναι **βέβαιος** πως δεν υπάρχει άλλη. Η βεβαιότητα ότι δεν υπάρχουν περισσότερες από τρεις παράμετροι, είναι βασική προϋπόθεση για την δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε αποτελεσματικά διαστατική ανάλυση (κεφ. 1) σε κάποιο πρόβλημα. Αν λοιπόν η ταχύτητα c δεν σας είναι και τόσο ευκολονόητη μην απογοητεύεστε...

Οι διαστάσεις των μεγεθών στον ορισμό (3.27) είναι λοιπόν :

$[E] = [M][L]^2[T]^{-2}$	(3.28.α)
$[V]^{-1} = [L]^{-3}$	(3.28.β)
$[v]^{-1} = [T]$	(3.28.γ)

Έτσι η (3.27) γράφεται:

$$[u] = [M]^{-1}[L]^{-1}[T]^{-1} \quad (3.29)$$

Όμοια οι διαστάσεις των μεγεθών από τις οποίες εξαρτάται η συνάρτηση $u(v,T)$ στην (3.26) είναι :

$$[v] = [T]^{-1} \quad (3.30.α)$$

$$[\beta] = [E]^{-1} = [M]^{-1}[L]^{-2}[T]^{+2} \quad (3.30.β)$$

$$[c] = [L][T]^{-1} \quad (3.30.γ)$$

$$[u] = [M]^{-y}[L]^{z-2y}[T]^{-x+2y-z} \quad (3.30.δ)$$

Στην (3.30.β) χρησιμοποιήσαμε το ότι η ποσότητα β έχει διαστάσεις αντίστροφης Ενέργειας, αφού $k_B T$ έχει διαστάσεις Ενέργειας.

Σύμφωνα λοιπόν με την βασική ιδέα της διαστατικής ανάλυσης, έχουμε εκφράσει τις διαστάσεις της ποσότητας u αφ' ενός μεν με τις (γνωστές) διαστάσεις που προκύπτουν εξ ορισμού (σχέση 3.29) και αφ' ετέρου με τις διαστάσεις που προκύπτουν από την θεμελιώδη εξάρτηση (3.25) που «μαντέμαμε» (σχέσεις 3.30 και ιδιαίτερα., 3.30δ). Εξισώνοντας

$$u(\nu, T) = \frac{\Delta E}{V \Delta \nu}$$

1. Υπολογισμός της μέσης τιμής της ενέργειας, $\langle E \rangle$, ανά στάσιμο κύμα :

$$\langle E \rangle = 2 \times \frac{1}{2} k_B T$$

2. Υπολογισμός του πλήθους $\Delta N(\nu, \nu + d\nu)$ των στασίμων κυμάτων με συχνότητες μεταξύ ν και $\nu + d\nu$ (**βλέπε εδάφιο 3.4**) και της πυκνότητας καταστάσεων $g(\nu)$:

$$\Delta N(\nu, \nu + d\nu) = \Delta N(k, k + dk) \frac{1}{(d\nu/dk)} \equiv g(\nu) V d\nu = V \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu$$

$$g(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2$$

3. Υπολογισμός της ενέργειας ΔE των στασίμων κυμάτων με συχνότητες μεταξύ ν και $\nu + d\nu$:

$$\Delta E \equiv dE = \langle E \rangle \times \Delta N(\nu, \nu + d\nu) = k_B T \times g(\nu) V d\nu$$

4

$$u(\nu, T) \equiv \frac{dE}{V d\nu} = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T$$

Διάγραμμα [3.1]

Κλασικά Στάδια Υπολογισμού της Συνάρτησης Φασματικής Πυκνότητας

τόρα τις μονάδες των μεγεθών από τις σχέσεις (3.30) με τις διαστάσεις που δίνει η (3.29) έχουμε :

$$[M]^1 [L]^{-1} [T]^{-1} = [M]^{-y} [L]^{z-2y} [T]^{-x+2y-z} \quad 3-1 \quad (3.31)$$

Απ' όπου έπεται:

$$-y = 1, \quad y = -1$$

$$z - 2y = -1, \quad \text{άρα} \quad z = -3,$$

$$\text{και} \quad -x + 2y - z = -1, \quad \text{άρα} \quad x = 2$$



Έπειτα απ' όλη αυτή τη διαδικασία η (3.25) γίνεται:

$u(\nu, T) \approx \frac{\nu^2}{c^3} k_B T \quad .$	3-Δ	(3.32)
---	-----	--------

Ακολουθώντας μια παρόμοια διαστατική διαδικασία μπορούμε να δείξουμε (βλέπε άσκηση 3.12) για την συνάρτηση ρ_T την εξάρτηση : $\rho_T(\nu) \approx \frac{\nu^2}{c^2} k_B T$.

Η πλήρης σχέση αποδεικνύεται (εδάφιο 3.5) ότι είναι :

$\rho_T(\nu) = \frac{2\pi}{c^2} \nu^2 k_B T \quad 3-\Delta \quad (3.33)$
--

Παρατηρώντας στη (3.32) την δευτεροβάθμια εξάρτηση της $u(\nu, T)$ από την συχνότητα ν οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η (ολική) ενέργεια E θα εξαρτάται από την τρίτη δύναμη της συχνότητας, αφού η συνάρτηση u προκύπτει εξ ορισμού από την E (βλέπε σχέση 3.14β) με παραγωγήση ως προς ν . Γεννάται τώρα το εύλογο ερώτημα :

Σχετίζεται άραγε αυτή η τρίτη δύναμη με κάτι χαρακτηριστικό και γενικό³⁶, όπως λόγου χάριν ο αριθμός των γεωμετρικών διαστάσεων, $\Delta=3$, του χώρου που ζούμε ; Μήπως με τον ίδιο τρόπο σχετίζεται και ο εκθέτης της ταχύτητας του φωτός ;

Στις δύο διαστάσεις, το μόνο που αλλάζει, κατ' αρχήν είναι η (3.28β) επειδή τώρα ο όγκος V αντικαθίσταται με την επιφάνεια που έχει διαστάσεις $[L]^2$. Κατά συνέπεια θα

³⁶ Είναι σχεδόν σίγουρο ότι διαφορετικοί αναγνώστες θα μπορούσαν να συνδέσουν τον αριθμό 3 με διαφορετικά σημαντικά χαρακτηριστικά του κόσμου, ανάλογα με τις γενικότερες φιλοσοφικές και θρησκευτικές τους αντιλήψεις. Είναι μάλλον προφανές ότι εδώ δεν εννοούμε τέτοιου είδους συσχετίσεις.

έχουμε, στις δύο διαστάσεις $[V]^{-1} = [L]^{-2}$. Οι αντίστοιχες σχέσεις των (3.28) στις 2 διαστάσεις γίνονται :

$[E] = [M][L]^2[T]^{-2}$	}	(3.34.α)
$[V]^{-1} = [L]^{-2}$		2-Δ
(3.34.β)		
$[v]^{-1} = [T]$		(3.34.γ)

Επειδή οι σχέσεις (3.26) και (3.30) δεν αλλάζουν με τη διάσταση, η αντίστοιχη με την (3.31) σχέση τώρα (στις 2-Δ) γράφεται :

$$[M]^x [T]^{-1} = [M]^{-y} [L]^{z-2y} [T]^{-x+2y-z} \quad 2-Δ \quad (3.35)$$

Απ' όπου έπεται:

$$y = -1,$$

$$z - 2y = 0, \quad \text{άρα} \quad z = -2$$

$$\text{και} \quad -x + 2y - z = -1, \quad \text{άρα} \quad x = 1$$

Η σχέση (3.25) τώρα γίνεται :

$u(v,T) \approx \frac{v^1}{c^2} \cdot k_B T.$	2-Δ	(3.36)
---	-----	--------



Βλέπουμε λοιπόν αμέσως πως η απάντηση και στα δυο ερωτήματά μας είναι σαφώς ΚΑΤΑΦΑΤΙΚΗ³⁷. Πράγματι ο εκθέτης της συχνότητας στις σχέσεις 3.24

³⁷ Ίσως εδώ να έχουμε ένα λίγο διαφορετικό παράδειγμα του πόσο σημαντικό είναι να ρωτάει κανείς στη Φυσική τις ΣΩΣΤΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ (...ιδίως όταν γνωρίζει εκ των προτέρων τις Σωστές Απαντήσεις !...).

και 3.32 ισούται με την διάσταση του χώρου (Δ) μείον ένα. Αυτός ο συσχετισμός με την διάσταση του χώρου που, όπως θα δούμε παρακάτω, έχει προέλθει από την πυκνότητα καταστάσεων (πλήθος στασίμων κυμάτων ανά περιοχή συχνότητας), έχει αρκετά γενικό χαρακτήρα. Αυτό θα το διαπιστώσουμε αργότερα και στη συζήτηση της γραμμομοριακής θερμοχωρητικότητας των στερεών, στο κεφάλαιο 4.

3.4.2 Κριτική της Διαστατικής αιτιολόγησης του νόμου των Rayleigh-Jeans

Σχολιάζοντας τώρα τη μέθοδο της Διαστατικής Ανάλυσης αυτή καθεαυτή βλέπουμε ότι έχουμε αναπαράγει πλήρως την μορφή της εξάρτησης από την συχνότητα την θερμοκρασία και την ταχύτητα του φωτός, καθώς και από τη διάσταση του χώρου. Αυτό που δεν μπορούσαμε (και ούτε περιμέναμε φυσικά) να πάρουμε είναι ο αριθμητικός παράγοντας 8π , που υπάρχει στην (3.24).

Θα μπορούσε σε πολλούς να γεννηθεί το εύλογο ερώτημα. «Αξίζει πράγματι όλος ο κόπος που κάνουμε παρακάτω για να πάρουμε αυτόν τον αριθμητικό παράγοντα του 8π ;».

Αν ρωτάμε από επιστημονική σκοπιά, η απάντηση είναι αναμφίβολα ΝΑΙ, αφού ο παράγων 8π (ο οποίος σημειωτέον δεν είναι αμελητέος, μια και είναι περίπου ίσος προς 25) αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της Φυσικής του προβλήματος. Μισές λύσεις δεν είναι αποδεκτές.

Αν όμως μιλάμε από διδακτική και παιδαγωγική σκοπιά, η απάντηση ίσως να μην είναι τόσο κατηγορηματική και σαφής. Σ' αυτή την περίπτωση ίσως δεν θα έπρεπε να βιαστεί κανείς να απαντήσει γρήγορα. Εάν όλος ο στόχος μας ήταν να βρούμε την εξάρτηση από την διάσταση του χώρου ή άλλη παράμετρο ή ακόμη να δείξουμε ότι η κλασική σχέση δεν είναι σωστή (κάτι που το μάθαμε εκ των υστέρων) και είχαμε την έμπνευση να επιλέξουμε³⁸ σωστά τα μεγέθη ν , β , c από τα οποία εξαρτάται το u , τότε ίσως θα έπρεπε να περιοριστούμε μόνο στην διαστατική ανάλυση. Στην πραγματικότητα η διαστατική ανάλυση συμπληρώνει (όπου και όταν μπορεί να εφαρμοσθεί) και δεν υποκαθιστά την πλήρη και ουσιαστική διαπραγμάτευση (όπου και όταν μπορεί να γίνει). Είναι επίσης προφανές ότι η διαστατική ανάλυση του τύπου που συζητήσαμε εδώ δεν είναι δυνατόν να διορθώσει μία λανθασμένη φυσική εικόνα (η σχέση 3.32 έχει τα ίδια

³⁸ Όπως τονίσαμε και στο κεφάλαιο 1, το δυσκολότερο μέρος στην εφαρμογή της διαστατικής ανάλυσης είναι να προβλέψουμε σωστά « από τι εξαρτάται » κάποιο μέγεθος

προβλήματα με την 3.27) ενώ ενδεχομένως θα μπορούσε να «διορθώσει» ένα λανθασμένο φυσικό τύπο.

Κλείνοντας την κλασική περιγραφή αξίζει να επισημάνουμε ότι ο Planck στις διάφορες απόπειρές του να εξηγήσει την πειραματική μορφή του φάσματος του μέλανος σώματος, δεν αμφισβήτησε καθόλου, ούτε προσπάθησε ν' αλλάξει τη σχέση 3.23 για την «πυκνότητα καταστάσεων». Άλλωστε, όπως ήδη διαπιστώσαμε, η συνάρτηση $g(\nu)$ εξαρτάται (αλγεβρικά) μόνο από την ταχύτητα του φωτός και την συχνότητα, οι εκθέτες των οποίων καθορίζονται από τις διαστάσεις (τρεις) του χώρου στον οποίο ζούμε. Μοιραία λοιπόν (βλέπε σχέση 3.22) **όλη η προσοχή για την «διόρθωση» στην κλασική σχέση της συνάρτησης φασματικής πυκνότητας θα πρέπει να εστιασθεί στον υπολογισμό της μέσης τιμής $\langle E \rangle$.**

Ο υπολογισμός της μέσης τιμής της ενέργειας βρίσκεται πίσω και από τα προβλήματα της κλασικής φυσικής με τις γραμμομοριακές θερμοχωρητικότητες των στερεών, όπως θα δούμε παρακάτω.

Ερωτήσεις :

3.5 Σε τι νομίζετε ότι χρειάζεται ή τι εξυπηρετεί η εισαγωγή της πυκνότητας καταστάσεων $g(\nu)$;

3.6 Σε τι διαφέρει η σχέση (3.24) από την (3.22) για τη συνάρτηση u ; Φαίνεται σα να γράφουμε την ίδια σχέση ξανά, ορίζοντας κάποια αυθαίρετη ποσότητα $g(\nu)$. Έτσι είναι;

Ασκήσεις :

3.9 Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι Σωστές (Σ) και ποιες Λάθος (Λ); Συμπληρώσατε Σ ή Λ στο αντίστοιχο τετράγωνο.

Σημείωση : Μπορεί να βρείτε μερικές περιπτώσεις που να σας φαίνεται, λόγω της διατύπωσης, ότι δεν είναι δυνατό να επιλέξετε Σ ή Λ. Τότε αντί απαντήσεως σχολιάστε τα επιχειρήματα και τις υποθέσεις που σας οδηγούν στο Λ ή το Σ. Προτάσεις με αστερίσκο μπροστά μπορεί να εμφανίζουν αυξημένη δυσκολία. Μην αποθαρρύνεστε αν δεν μπορείτε να τις απαντήσετε !

α) Η κλασική φυσική δεν μπορεί να ερμηνεύσει το φάσμα της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος.

β) Το φάσμα της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος είναι συνεχές.

γ) Ο νόμος του Wien καθορίζει ότι $I_{\omega}(\nu) = \sigma T^4$

δ) Οι συναρτήσεις φασματικής πυκνότητας και φασματικής κατανομής αφετικής ικανότητας έχουν την ίδια μορφή

* ε) Η συνάρτηση u εξαρτάται από 4 ποσότητες: c, T, ν και k_B

* στ) Η κλασική Φυσική μπορεί να ερμηνεύσει το φάσμα του Μέλανος σώματος στο όριο $\nu \rightarrow 0$

ζ) Η κλασική Φυσική μπορεί να ερμηνεύσει το φάσμα του Μέλανος σώματος στο όριο $\nu \rightarrow \infty$

* η) Εάν ισχύει η πρόταση (ε) πιο πάνω, μπορούμε να εφαρμόσουμε διαστατική ανάλυση για να βρούμε την εξάρτηση του u από τα c, T, ν και k_B .

* θ) Μπορούμε να βρούμε την σχέση των Rayleigh-Jeans, δηλαδή τη σχέση (3.24), με διαστατική ανάλυση.

3.10 Επιλέξτε μια από τις δυνατές απαντήσεις στις παρακάτω ερωτήσεις :

1) Όταν η θερμοκρασία ενός μέλανος σώματος πολλαπλασιασθεί

$\times 2$, η ολική ισχύς $P_{\omega}(\nu)$ πολλαπλασιάζεται \times :

(α) 2 (β) 4 (γ) 6 (δ) 8 (ε) 16

2) Όταν η συχνότητα ν πολλαπλασιασθεί $\times 2$, η κλασική συνάρτηση φασματικής πυκνότητας u πολλαπλασιάζεται \times :

(α) 2 (β) 4 (γ) 6 (δ) 8 (ε) 16

3) Όταν η θερμοκρασία ενός μέλανος σώματος πολλαπλασιασθεί $\times 2$, η κλασική συνάρτηση φασματικής πυκνότητας u πολλαπλασιάζεται \times :

(α) 2 (β) 4 (γ) 6 (δ) 8 (ε) 16

4) Εάν η ταχύτητα του φωτός ήταν το ήμισυ της πραγματικής, τότε η κλασική συνάρτηση $u(\nu, T)$ θα πολλαπλασιαζόταν \times :

(α) 2 (β) 4 (γ) 6 (δ) 8 (ε) 16

3.11 Πως θα περιμένατε να ήταν το φάσμα του μέλανος σώματος σε ένα φανταστικό κόσμο μιας διαστάσεως ;

Γράψτε σ' αυτή την περίπτωση μια προσεγγιστική σχέση για την συνάρτηση $u(\nu, T)$.

Ελέγξτε την ορθότητα της απαντήσεως σας με διαστατική ανάλυση.

Σχεδιάστε πρόχειρα αλλά με σαφήνεια την «μονοδιάστατη» συνάρτηση $\rho_T(T)$ για τρεις διαφορετικές θερμοκρασίες.

Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας.

3.12 Με χρήση διαστατικής ανάλυσης, ανάλογης με εκείνης για την u , βρείτε (στις 3Δ) την εξάρτηση (εκθέτη) της $\rho_T(\nu)$ από την θερμοκρασία T και τη συχνότητα. Βρείτε επίσης τον συντελεστή αναλογίας με τον οποίο πολλαπλασιάζεται η $u(\nu, T)$ για να δώσει την $\rho_T(\nu)$. Πόσο καλά εμπιστεύεστε την απάντησή σας ;

3.13 Βρείτε με διαστατική ανάλυση την εξάρτηση της κλασικής συνάρτησης φασματικής κατανομής της αφετικής ικανότητας $\rho_T(\lambda)$ της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος, από την θερμοκρασία T και το μήκος κύματος λ (Δίνεται ότι $\rho_T(\lambda) \equiv \frac{dI}{d\lambda}$, όπου dI είναι ή ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας της ακτινοβολίας, που οφείλεται σε μήκη κύματος μεταξύ λ και $\lambda + d\lambda$).

3.14 Κάντε την αντιστοίχιση μεταξύ σχέσεων (αριστερά) και εννοιών (δεξιά).

$$\rho_{\tau}(\nu) \equiv \frac{dI}{d\nu}$$

Νόμος Stefan - Boltzmann

$$I_{\text{ολ}}(T) = \sigma T^4$$

στάσιμο κύμα

$$\lambda_{\text{max}} T = B = 2.898 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

**φασματική κατανομή αφετικής
ικανότητας**

$$g(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2$$

πυκνότητα καταστάσεων

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T$$

Νόμος του Wien

$$g(\nu) d\nu$$

**πλήθος των στασίμων κυμάτων
ανά μονάδα όγκου**

$$E(x, t) = E_0 \sin(kx) \cos(\omega t)$$

Σχέση των Rayleigh-Jeans

$$\langle E \rangle = 2 \times \frac{1}{2} k_B T$$

συνάρτηση φασματικής πυκνότητας

$$\Delta N(\nu, \nu + \Delta\nu) = V \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu$$

$$\equiv g(\nu) V d\nu$$

**πλήθος στασίμων κυμάτων με
συχνότητες μεταξύ ν και $\nu + \Delta\nu$**

$$u(\nu, T) \equiv \frac{dE}{V d\nu}$$

μέση τιμή της ενέργειας

3.6 Η κβαντική ερμηνεία του Planck

α) Εισαγωγή : Στόχοι και αφετηρίες !

Μετά από την όσο το δυνατόν λεπτομερή περιγραφή της κλασικής θεωρίας για το μέλαν σώμα και των θεμελιακών προβλημάτων που αντιμετώπισε («υπεριώδης καταστροφή», αδυναμία περιγραφής των πειραματικών αποτελεσμάτων και νόμων, όπως του Wien και των Stefan και Boltzmann) καιρός είναι να παρακολουθήσουμε την ριζική και επαναστατική θεραπεία των προβλημάτων που ο Max Planck πρότεινε. Θα μπορούσαμε λοιπόν, επιδιώκοντας μεγαλύτερη «ακροαματικότητα» (!), να ονομάσουμε αυτό το εδάφιο (μαζί με τα περισσότερα που θα ακολουθήσουν) «εγχειρίδιο Φυσικών Επαναστάσεων», αν και ο Planck χαρακτήρισε την κβαντική υπόθεση που εισήγαγε σαν «πράξη απελπισίας» και όχι σαν επανάσταση.

Σ' αυτό το εδάφιο θα ακολουθήσουμε τα λογικά και μαθηματικά βήματα που οδήγησαν τον Planck στην υπόθεση-αξίωμα των ενεργειακών «κβάντων» ή πακέτων. Τα βήματα αυτά βασίζονται στη σύγκριση της **Θεωρίας** με το **πείραμα**, μέσω των γνωστών **εμπειρικών νόμων**³⁹, που περιγράφουν τα πειραματικά αποτελέσματα.

Πριν αρχίσουμε την σύγκριση με τους εμπειρικούς νόμους, καλό είναι να θυμηθούμε από τα προηγούμενα ότι :

1) Η (3.22) είναι η πιο γενική σχέση για την συνάρτηση u .

$$u(\nu, T) = \langle E \rangle g(\nu) \quad (3.22)$$

όπου $g(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2$ είναι η **πυκνότητα καταστάσεων**, την οποία υπολογίσαμε λεπτομερώς στο υποκεφάλαιο 3.4 (σχέση 3.23').

2) Η μέση τιμή της ενέργειας $\langle E \rangle$, υπολογίζεται με βάση το γενικό θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας.

3) Το πρόβλημα της κλασικής θεωρίας εστιάζεται στον υπολογισμό της μέσης τιμής $\langle E \rangle$ της ενέργειας, και όχι στο $g(\nu)$.

β) Εμπειρικοί Νόμοι και αποτελέσματα

³⁹ Οι γενικοί θεμελιώδεις νόμοι (σαν αυτούς που περιγράψαμε στην αρχή του κεφαλαίου 1) που περιγράφουν γενικές φυσικές αρχές χωρίς αυθαίρετες σταθερές, συλλογικά ονομάζονται εδώ «Θεωρία». Αντίθετα, οι **εμπειρικοί νόμοι** περιγράφουν μαθηματικά, μεμονωμένες πειραματικές παρατηρήσεις, με

Δεν είναι δύσκολο να αντιληφθεί κανείς ότι για να ταιριάζει η θεωρητική με την πειραματική κατανομή του σχήματος 3.3 θα πρέπει η μέση τιμή της ενέργειας πρακτικά να μηδενίζεται μετά από κάποια (μεγάλη) συχνότητα, ώστε να έχουμε το όριο της μέσης τιμής $\langle E \rangle$ να τείνει στο μηδέν :

$$\langle E \rangle_{\nu \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (3.66)$$

και μάλιστα πιο γρήγορα από ν^2 , ώστε να «εξουδετερώνει» την αύξηση της πυκνότητας καταστάσεων της (3.23).

Παράλληλα για χαμηλές συχνότητες, θα πρέπει να έχουμε:




$$\langle E \rangle_{\nu \rightarrow 0} \rightarrow k_B T, \quad (3.67)$$

επειδή η κλασική συνάρτηση συμπίπτει με την πειραματική καμπύλη (**αρχή αντιστοιχίας**).

Έτσι, ο Planck συνειδητοποίησε (κάτι που φαίνεται τώρα εύκολο) ότι η μέση τιμή της ενέργειας, και κατά συνέπεια και η ενέργεια, E , των στασίμων κυμάτων θα πρέπει να είναι συνάρτηση της συχνότητας ν , δηλαδή :

$$\langle E \rangle = \langle E(\nu) \rangle$$

Έτσι οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί η μέση τιμή της ενέργειας είναι :

<u>(α)</u>	$\langle E \rangle = \langle E(\nu) \rangle$	
<u>(β)</u>	$\lim_{\nu \rightarrow 0} \langle E(\nu) \rangle \rightarrow k_B T$	
<u>(γ)</u>	$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \langle E(\nu) \rangle \rightarrow 0$	

Για την περιοχή των μεγάλων συχνοτήτων υπήρχε ήδη ένας εμπειρικός τύπος που ο Wien είχε επινοήσει και έδινε :

$$u(\nu, T) \cong A \nu^3 e^{-\frac{\alpha \nu}{k_B T}}, \quad \text{για μεγάλα } \nu, \quad (3.68)$$

όπου A και α αυθαίρετες θετικές σταθερές ($A > 0, \alpha > 0$), που προσδιορίζονται εμπειρικά συγκρίνοντας με τις πειραματικές μετρήσεις.

Συγκρίνοντας με την (3.23) και (3.22), βλέπουμε ότι η $\langle E(\nu) \rangle$ θα πρέπει να έχει τη

$$\text{μορφή : } \langle E(\nu) \rangle \cong A \frac{c^3 \nu}{8\pi} e^{-\frac{\alpha \nu}{k_B T}}, \text{ για μεγάλα } \nu. \quad (3.69)$$

$$\text{Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι στο όριο } \nu \rightarrow \infty : \lim_{\nu \rightarrow \infty} \langle E(\nu) \rangle \cong A \frac{c^3 \nu}{8\pi} e^{-\frac{\alpha \nu}{k_B T}} \rightarrow 0$$

Έτσι, η εκθετική πτώση στο όριο των πολύ μεγάλων συχνοτήτων στην (3.69) μπορεί να αντισταθμίσει και υπερκεράσει την γραμμική αύξηση μπροστά από το εκθετικό, ώστε το όριο να τείνει στο μηδέν.

Η (3.69) ικανοποιεί τις συνθήκες (α) και (γ). Τι γίνεται όμως με την συνθήκη (β) ;

Αφού η (3.69) είναι εξ ορισμού «φτιαγμένη» για μεγάλα ν , δεν θα περιμέναμε κατ' αρχή

⁴⁰ Επειδή ακόμη δεν έχουμε κάποιο μέτρο σύγκρισης, το τι σημαίνει «μεγάλα ν » μένει προς το παρόν να αιωρείται στο κενό. Πολλές φορές χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\nu \rightarrow \infty$ για να δηλώσει κάτι τέτοιο.

να είναι ικανοποιητική για πολύ μικρά ν (δηλαδή $\nu \rightarrow 0$). Πριν όμως απαντήσουμε πλήρως σ' αυτό το ερώτημα, ας δούμε τα υπόλοιπα πλεονεκτήματα των εμπειρικών σχέσεων (3.68) και (3.69). Ο εμπειρικός τύπος του Wien περιγράφει πολύ καλά την πειραματική καμπύλη της συνάρτησης u στις «μεγάλες» συχνότητες και οδηγεί αβίαστα τόσο στον ομώνυμο νόμο μετατοπίσεως (σχέσεις 3.10-3.11), όσο και στο νόμο των Stefan και Boltzmann (σχέσεις 3.8-3.9). Ας το δούμε αυτό με παραδείγματα :

Παράδειγμα 3.4

Δείξτε ότι ο νόμος μετατοπίσεως του Wien (σχέση 3.11 α) προκύπτει από τον εμπειρικό τύπο του Wien για την $u(\nu, T)$, σχέση (3.68) :

Απάντηση : Για να βρούμε το μέγιστο της συναρτήσεως $u(\nu, T)$, το οποίο συμπίπτει με αυτό της $\rho_\tau(\nu)$, αρκεί να παραγωγίσουμε την (3.68) ως προς ν και θέσουμε την παράγωγο ίση προς μηδέν⁴¹. Έτσι έχουμε διαδοχικά :

$$\frac{d u}{d \nu} = 3 A \nu^2 e^{-\frac{\alpha \nu}{k_B T}} - \frac{\alpha A \nu^3}{k_B T} e^{-\frac{\alpha \nu}{k_B T}} = 0,$$

$$\text{απ' όπου : } 3 \nu_{\max}^2 = \frac{\alpha \nu_{\max}^3}{k_B T}, \text{ και :}$$

$$\nu_{\max} = \frac{3 k_B}{\alpha} T \quad \text{ή} \quad \nu_{\max} = \text{σταθερά } T, \quad (3.10')$$

που είναι ταυτόσημη με τη σχέση 3.10.

Παρατηρώντας την τιμή του $\nu_{\max} \cong 0.9 \times 10^{14} \text{ Hz (sec}^{-1}\text{)}$ και της θερμοκρασίας ($T = 1500 \text{ }^\circ\text{K}$) στο σχήμα 3.4, μπορούμε να εκτιμήσουμε⁴² την τιμή της (αυθαίρετης) σταθεράς α από τη (3.11) .

Γνωρίζοντας ότι $k_B = 1.3806 \times 10^{-23} \text{ J / }^\circ\text{K}$, βρίσκουμε

$$\alpha \cong 6.9 \times 10^{-34} \text{ J sec.}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η τιμή σταθεράς α , η οποία έχει διαστάσεις ενέργειας επί χρόνο, είναι εξαιρετικά μικρή.

⁴¹ Ως γνωστόν, απαιτείται επιπλέον και η δεύτερη παράγωγος στην θέση του μεγίστου να είναι αρνητική. Αυτό μπορεί, με μερικές πράξεις ακόμα, εύκολα να το διαπιστώσει ο αναγνώστης, λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $\alpha > 0$. Είναι πάντως εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση μας έχει μέγιστο, παρατηρώντας στο σχήμα 3.3 την πειραματική καμπύλη με την οποία η (3.71) είναι φτιαγμένη να ταιριάζει πάρα πολύ καλά.

⁴² Εδώ μας ενδιαφέρει κυρίως μια εκτίμηση της τάξης μεγέθους και όχι της ακριβούς τιμής του α . Εάν θέλαμε κάποια καλύτερη ακρίβεια θα έπρεπε τουλάχιστον να χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα (καμπύλες) του σχήματος 3.4 και για τις τρεις θερμοκρασίες

Παράδειγμα 3.5

Δείξτε ότι η εμπειρική συνάρτηση $u(\nu, T)$ μπορεί να αναπαράγει τον νόμο των Stefan και Boltzmann (σχέση 3.9).

Λύση : Για τον νόμο των Stefan - Boltzmann, που δίνει την ολική ισχύ της ακτινοβολίας σε μια θερμοκρασία T , σύμφωνα με την (3.4) χρειαζόμαστε την συνάρτηση $\rho_T(\nu)$ αντί της $u(\nu, T)$. Ως γνωστόν, σύμφωνα με την (3.51) οι συναρτήσεις $\rho_T(\nu)$ και $u(\nu, T)$ είναι ανάλογες με συντελεστή αναλογίας $c/4$. Άρα θα έχουμε :

$$\rho_T(\nu) \cong \frac{cA}{4} \nu^3 e^{-\frac{\alpha\nu}{k_B T}}, \text{ για μεγάλα } \nu. \quad (3.70)$$

Η (3.4) λοιπόν δίνει :

$$P_{ολ} = S \int_0^{\infty} \frac{cA}{4} \nu^3 e^{-\frac{\alpha\nu}{k_B T}} d\nu, \quad (3.71)$$

όπου S , κατά τα γνωστά, η επιφάνεια του μέλανος σώματος.

Εισάγοντας την μεταβλητή $x = \frac{\alpha\nu}{k_B T}$, έχουμε : $dx = \frac{\alpha}{k_B T} d\nu$ και

$$\nu = \frac{k_B T}{\alpha} x, \quad d\nu = \frac{k_B T}{\alpha} dx. \quad (3.72)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.72) στην (3.71) βρίσκουμε :

$$P_{ολ} = \frac{cA}{4} S \int_0^{\infty} \frac{k_B^3 T^3}{\alpha^3} x^3 e^{-x} \frac{k_B T}{\alpha} dx, \quad (3.73\alpha)$$

$$\text{ή } P_{ολ} = \frac{cA k_B^4}{4\alpha^4} \left(\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx \right) S T^4 = \text{σταθερά } S T^4. \quad (3.73\beta)$$

Η (3.73β) είναι ταυτόσημη με τον νόμο Stefan - Boltzmann (σχέση 3.9),

όπου προφανώς η σταθερά ισούται :

$$\text{σταθερά} \equiv \frac{cAk_B^4}{4\alpha^4} \left(\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx \right) = \frac{6cAk_B^4}{4\alpha^4} \quad (3.74)$$

Στη (3.74) χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ίσο⁴³ με 6. Επιβεβαιώσαμε λοιπόν ότι η εμπειρική συνάρτηση του Wien περιγράφει σωστά τους δύο πολύ γνωστούς εμπειρικούς νόμους (Wien και Stefan - Boltzmann). Όμως, όπως το περιμέναμε, η συνθήκη (β) δεν ικανοποιείται αφού η (3.69) τείνει στο μηδέν αντί του $k_B T$, το οποίο όμως για πολύ μικρές θερμοκρασίες έχει πρακτικά μηδενική τιμή. **Μήπως λοιπόν τελικά θα έπρεπε να εγκαταλείψουμε την συνθήκη (β) και να υιοθετήσουμε την εμπειρική συνάρτηση του Wien ; Έτσι κι αλλιώς βρισκόμαστε σε διαδικασία αναθεώρησης της κλασικής φυσικής !** Η απάντηση (που ο Planck έδωσε) είναι αρνητική αφού στις πολύ χαμηλές συχνότητες η συνάρτηση του Wien δεν μπορεί να αναπαράγει όχι μόνο το κλασικό θεωρητικό αποτέλεσμα (αρχή αντιστοιχίας) αλλά ούτε τις πειραματικές μετρήσεις, με τις οποίες η κλασική θεωρία συμπίπτει.. Ας δούμε λοιπόν με περισσότερη προσοχή το όριο των πολύ μικρών συχνοτήτων αναπτύσσοντας τον εκθετικό παράγοντα σε σειρά Taylor. Λόγω του απειροστά μικρού ορίσματος, όλοι οι όροι εκτός από τους δύο πρώτους δεν λαμβάνονται υπ' όψη, αφού περιλαμβάνουν το όρισμα υψωμένο σε δυνάμεις μεγαλύτερες του 1. Γράφουμε λοιπόν:

$$e^{-\frac{\alpha \nu}{k_B T}} \equiv_{\nu \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^{\frac{\alpha \nu}{k_B T}}} \right) \rightarrow \frac{1}{1 + \frac{\alpha \nu}{k_B T}} \rightarrow \left(1 - \frac{\alpha \nu}{k_B T} \right), \quad (3.75)$$

$$\text{και κατά συνέπεια η μέση τιμή } \langle E(\nu) \rangle_{\nu \rightarrow 0} \rightarrow A \frac{c^3 \nu}{8\pi} \left(1 - \frac{\alpha \nu}{k_B T} \right) \rightarrow 0, \quad (3.76)$$

τείνει στο μηδέν και όχι στο $k_B T$, που απαιτεί η συνθήκη (β).

Στη (3.75) σκόπιμα χρησιμοποιήσαμε ενδιάμεσα την έκφραση του αρνητικού εκθετικού σαν αντίστροφο κλάσμα, αντί να αναπτύξουμε κατ' ευθείαν τον εκθετικό όρο. Είναι πιο βολικό έτσι να παρατηρήσουμε, πως εάν υπήρχε ένας προσθετικός όρος ίσος με -1 , στον παρανομαστή τότε θα είχαμε :

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\frac{\alpha \nu}{k_B T} - 1} \right) \rightarrow \frac{1}{1 + \frac{\alpha \nu}{k_B T} - 1} = \frac{k_B T}{\alpha \nu}, \quad (3.77)$$

και η μέση τιμή της ενέργειας στο όριο των μικρών ν θα ήταν :

$$\langle E(\nu) \rangle_{\nu \rightarrow 0} \rightarrow A \frac{c^3 \nu}{8\pi} \left(\frac{k_B T}{\alpha \nu} \right) = \left(\frac{A c^3}{8\pi \alpha} \right) k_B T. \quad (3.78)$$

Βλέπουμε πως η μέση τιμή θα μπορούσε να είναι ίση προς $k_B T$, εάν επιπλέον επιλέγαμε τις αυθαίρετες σταθερές έτσι ώστε να ισχύει : $\left(\frac{A c^3}{8\pi \alpha} \right) = 1$ (3.79).

Μήπως λοιπόν, αυτή η διαπίστωση είναι η αφετηρία της αναθεώρησης την οποία θα πρέπει να κάνουμε ; Όπως θα δούμε παρακάτω, κάποιο παρόμοιο σκεπτικό και διαδικασία ακολούθησε ο Planck. Πριν όμως παρακολουθήσουμε την αναθεωρητική διαδικασία του Planck, καλόν είναι να κάνουμε ορισμένες παρατηρήσεις και να θέσουμε μερικά δημιουργικά ερωτήματα.

Πρώτα θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι για πολύ μικρές θερμοκρασίες η ποσότητα $k_B T$ είναι πρακτικά μηδέν. Έτσι, σ' αυτή την περίπτωση, η συμπεριφορά των (3.68) και (3.69) στις πολύ μικρές συχνότητες ($\nu \rightarrow 0$) δεν διαφέρει πρακτικά από την επιθυμητή. Σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες η απόκλιση θα είναι σημαντικότερη και η διαφορά από την κλασική συνάρτηση των Rayleigh - Jeans μεγαλύτερη. Επομένως, η απόκλιση από την κλασική συμπεριφορά για μικρές συχνότητες θα εξαρτάται και από τη θερμοκρασία. Μέχρι εδώ καλά. Γεννάται όμως, ύστερα απ' όλα αυτά, το εύλογο **ερώτημα :**

Αφού η εμπειρική συνάρτηση (3.68) δεν ικανοποιεί μια από τις απαιτήσεις μας, την (β) και κατά συνέπεια δεν είναι αποδεκτή, πως είναι δυνατό να αναπαράγει τους νόμους των Wien και Stefan - Boltzmann;

Απάντηση :

Μια απλή εξήγηση θα μπορούσε να έχει ως εξής :

Αφού η (3.68) δεν είναι ικανοποιητική για πολύ χαμηλές συχνότητες, λόγω της αδυναμίας της να ικανοποιήσει τη συνθήκη (β), θα πρέπει αυτές οι συχνότητες (οι πολύ χαμηλές) να μην έχουν επίδραση στον καθορισμό της ολικής ισχύος, $P_{ολ}$, (νόμος Stefan -

⁴³ Το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx$ μπορεί να βρεθεί με διαδοχικές παραγοντικές

ολοκληρώσεις χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $e^{-x} dx = -d(e^{-x})$, και $x^n e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 0$. Η

Boltzmann) και της συχνότητας ν_{\max} (νόμος μετατοπίσεως του Wien). Θα πρέπει λοιπόν να ξεκαθαρίσουμε τι θεωρούμε «πολύ χαμηλές» συχνότητες. Μαθηματικά αυτή η

περιοχή καθορίζεται (βλέπε σχέση 3.74) από την συνθήκη: $\frac{\alpha \nu}{k_B T} \ll 1$ ή

$$\nu \ll \frac{k_B T}{\alpha}$$

Με βάση την τιμή των σταθερών $\alpha \cong 6.9 \times 10^{-34} \text{ J sec}$, που βρήκαμε νωρίτερα, και $k_B = 1.3806 \times 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}$, αυτή η συνθήκη γίνεται:

$$\text{Για } T = 300^\circ \text{ K} : \nu_{\text{πολύ χαμηλές}} \ll 0.06 \times 10^{14} \text{ Hz},$$

$$\text{για } T = 1500^\circ \text{ K} : \nu_{\text{πολύ χαμηλές}} \ll 0.30 \times 10^{14} \text{ Hz}.$$

Ας θεωρήσουμε ότι η συνθήκη «πολύ μικρότερες», που συμβολίζουμε με \ll , ικανοποιείται από συχνότητες δέκα φορές μικρότερες από τα όρια των $0.06 \times 10^{14} \text{ Hz}$ και $0.30 \times 10^{14} \text{ Hz}$, για θερμοκρασίες $T = 300^\circ \text{ K}$ και $T = 1500^\circ \text{ K}$, αντίστοιχα. Τότε η περιοχή των πολύ χαμηλών συχνοτήτων για της δύο αυτές θερμοκρασίες ορίζεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Για } T = 300^\circ \text{ K} : 0 < \nu_{\text{πολύ χαμηλές}} < 0.006 \times 10^{14} \text{ Hz}, \\ \text{για } T = 1500^\circ \text{ K} : 0 < \nu_{\text{πολύ χαμηλές}} < 0.030 \times 10^{14} \text{ Hz}. \end{array} \right\}$$

Από το σχήμα 3.4, για $T = 1500^\circ \text{ K}$, βλέπουμε πως αυτές οι συχνότητες βρίσκονται σε περιοχές που η συνάρτηση $u(\nu, T)$ είναι πρακτικά μηδέν και έτσι αυτές οι συχνότητες δεν συνεισφέρουν ούτε στον καθορισμό του μεγίστου της καμπύλης (νόμος Wien), ούτε στο εμβαδόν κάτω από την καμπύλη, το οποίο πολλαπλασιασμένο επί $c/4$ ισούται με την ολική ισχύ $P_{\text{ολ}}$ (νόμος Stefan – Boltzmann). Έτσι η περιοχή συχνοτήτων, για τις οποίες οι συναρτήσεις (3.68) και (3.69) δεν είναι ικανοποιητικές, δεν συμμετέχει ουσιαστικά στους νόμους των Wien και Stefan – Boltzmann. Αυτό το γεγονός, που εξηγεί την επιτυχία της (3.68), συνδέεται τελικά (όπως θα δούμε και αργότερα) με την πολύ μικρή τιμή της σταθεράς α η οποία καθορίζει άμεσα την τιμή της συχνότητας ν_{\max} (σχέση 3.10) και έμμεσα την τιμή των $\nu_{\text{πολύ χαμηλές}}$.

Αξίζει, τέλος, να αναφέρουμε παρενθετικά πως αυτό που δείξαμε μέχρι τώρα είναι ότι η εμπειρική συνάρτηση (3.68) αναπαράγει τη «μορφή» των νόμων Wien και Stefan – Boltzmann, αλλά όχι κατ' ανάγκη και τη σωστή εξάρτηση των σταθερών από άλλες παραμέτρους (βλέπε για παράδειγμα σχέση 3.74).

γ) Η «συνταγή» του Planck :

Ο Planck, συνδυάζοντας τις απαιτήσεις (α), (β) και (γ), τις σχέσεις (3.68) και (3.69), καθώς και το σκεπτικό που συνοδεύει τις σχέσεις (3.76) μέχρι (3.79), κατέληξε ύστερα από αρκετές δοκιμές στον εμπειρικό τύπο για την μέση τιμή της ενέργειας :

$$\langle E(\nu) \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad (3.80)$$



που διαφέρει από την εμπειρική μορφή του Wien (σχέση 3.69) κατά την μονάδα στον παρανομαστή, και είναι όμοιος με την (3.77). Για πολύ μεγάλα ν , η μονάδα μπορεί ασφαλώς να αγνοηθεί μπροστά στον εκθετικό όρο και οι δύο σχέσεις (Planck και Wien) συμπίπτουν. Η σταθερά h (παρόμοια με την α) είναι γνωστή πλέον **σαν σταθερά του Planck** της οποίας η τιμή, της ίδιας τάξης μεγέθους με την α , βρέθηκε από τη σύγκριση με το πείραμα πολύ κοντά στη σημερινή παραδεκτή τιμή :

$$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ Joule.sec.}$$

Η σταθερά του Planck, όπως είδαμε και στην εισαγωγή αυτού του βιβλίου, **θεωρείται πλέον σαν μία από τις βασικές και θεμελιώδεις σταθερές της φύσεως, όπως η ταχύτητα του φωτός c** , και όχι σαν απλή εμπειρική σταθερά.

Η μέση τιμή, στην (3.80), (η οποία προς το παρόν είναι μόνο μία εμπειρική σχέση χωρίς βαθύτερη κατανόηση) ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις (α, β, γ) και έτσι έχει όπως μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε την σωστή συμπεριφορά στα όρια $\nu \rightarrow 0$ και $\nu \rightarrow \infty$.

Πράγματι, όπως είδαμε νωρίτερα (σχέση 3.77) έχουμε:

$$e^{\frac{h\nu}{k_B T}} \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} 1 + \frac{h\nu}{k_B T}, \text{ οπότε ο παρανομαστής γίνεται } \frac{h\nu}{k_B T}, \text{ και : } \langle E(\nu) \rangle \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} k_B T$$

Όμοια στο όριο των πολύ μεγάλων συχνοτήτων, ο παρανομαστής τείνει στο άπειρο:

$$e^{\frac{h\nu}{k_B T}} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \infty, \text{ και η μέση τιμή τείνει στο μηδέν : } \langle E(\nu) \rangle \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0.$$

Έχουμε λοιπόν μία «θεωρητική» συνάρτηση φασματικής πυκνότητας

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad , \quad (3.81)$$

που περιγράφει πλήρως την πειραματική καμπύλη, και επαληθεύει, όπως θα έπρεπε, τους νόμους των Wien και Stefan-Boltzmann (Δραστηριότητες 3.4, 3.5 και ασκήσεις 3.16, 3.14). Άλλωστε, κάτι τέτοιο θα ήταν αναμενόμενο αφού η (3.81) συμπίπτει με την πειραματική καμπύλη τόσο στις πολύ μικρές, όσο και στις πολύ μεγάλες συχνότητες. Σ' αυτές τις (μεγάλες) συχνότητες, η μορφή της είναι παρόμοια με την (3.68), η οποία όπως είδαμε επαληθεύει αυτούς τους νόμους. Παρόλα αυτά όμως, η (3.81) εξακολουθεί να έχει εμπειρικό χαρακτήρα και δεν μπορεί να οδηγήσει σε κάποια βαθύτερη κατανόηση του φαινομένου. Γι αυτό ο Planck δεν έμεινε μόνο στην εύρεση της (3.81) αλλά προσπάθησε, **και τα κατάφερε**, να καταλάβει και να εξηγήσει τους βαθύτερους λόγους για την απόκλιση της μέσης τιμής (3.80) από την κλασική τιμή $k_B T$, χωρίς ούτε στιγμή να εγκαταλείψει την κλασική στατιστική Maxwell Boltzmann.

Ασκήσεις

3.16 Με βάση τα αποτελέσματα των δραστηριοτήτων 3.5, 3.4 και το παράδειγμα 3.4, εκτιμείστε την σταθερά του Planck καθώς και την σταθερά A του νόμου του Wien (σχέση 3.10). Πως συγκρίνονται αυτές οι τιμές με τις τιμές του βιβλίου ;

Εάν υπάρχουν κάποιες διαφορές, που οφείλονται ;

3.17 Με την βοήθεια του ολοκληρώματος: $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$, δείξτε ότι η συνάρτηση

φασματικής πυκνότητας του Planck, επαληθεύει τον νόμο των Stefan-Boltzmann. Βρείτε επίσης την σχέση που δίνει την σταθερά σ , καθώς και την αριθμητική της τιμή.

δ) Η Φυσική ερμηνεία του Planck :

Ο Planck δέχτηκε πως η μέση τιμή της ενέργειας στην (3.80) η οποία αφορά την ενέργεια ενός μεγάλου πλήθους ταλαντωτών σε θερμοκρασία T , θα πρέπει να βασίζεται στην κατανομή Maxwell – Boltzmann των σχέσεων (3.19, 3.19', 3.19''). Εξετάζοντας αυτή τη μέση τιμή, ο Planck συνειδητοποίησε πως εάν οι ενέργειες $E(\nu)$ καθενός από

τους ταλαντωτές⁴⁴ του θερμοδυναμικού συστήματος, έχουν μη-συνεχείς (διάκριτες) τιμές, μπορούσε να οδηγηθεί στη μέση τιμή της (3.81). Σ' αυτή την περίπτωση, όπως θα δείξουμε παρακάτω, το ολοκλήρωμα στη (3.18) που ορίζει την μέση τιμή της ενέργειας μετατρέπεται σ' ένα άθροισμα, το οποίο συγκλίνει στη μέση τιμή (3.81).

Ο Planck λοιπόν, σαν «πράξη απελπισίας» (όπως ο ίδιος την χαρακτήρισε) αναγκάστηκε να δεχθεί ότι :

1) Για κάθε συχνότητα ν , του συνεχούς φάσματος του μέλανος σώματος, η ενέργεια $E(\nu)$ καθενός από τους ταλαντωτές ή, ισοδύναμα, καθενός από τα στάσιμα κύματα μέσα στην κοιλότητα, δεν μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή.

Η ενέργεια $E(\nu)$ μπορεί να πάρει μόνο μία σειρά από **διάκριτες** τιμές $E_n(\nu)$.

2) Οι διάκριτες τιμές της ενέργειας των ανεξάρτητων ταλαντωτών είναι ακέραια πολλαπλάσια της ποσότητας $h\nu$ και δίνονται από τη σχέση :

$$E_n(\nu) = nh\nu, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.82)$$



όπου n ένας θετικός ακέραιος αριθμός, $n = 0, 1, 2, \dots$

Οι δυνατές αυτές τιμές είναι ακέραια πολλαπλάσια της ενέργειας $E_1(\nu)$ ίσης προς :

$$E_1(\nu) = h\nu \quad (3.83).$$

Με την (3.83), η οποία ουσιαστικά αποτελεί τον ορισμό της περίφημης ομώνυμης σταθεράς, ο Planck δέχτηκε (ελέγχοντας τα αριθμητικά αποτελέσματα) την απλούστερη σχέση μεταξύ ενέργειας και συχνότητας.

3) Η ενέργεια της ακτινοβολίας που εκπέμπεται για μια δοσμένη συχνότητα ν δίνεται, σύμφωνα με τον Planck και με βάση την διατήρηση της ενέργειας, από την διαφορά μεταξύ δυο επιτρεπτών τιμών της ενέργειας των αντίστοιχων «κβαντισμένων» ταλαντωτών.

Η μικρότερη δυνατή ενέργεια της ακτινοβολίας, $E_{\Phi}(\nu)$, προκύπτει από την διαφορά ΔE μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών της ενέργειας ενός ταλαντωτή και δίνεται από τη

$$\text{σχέση: } E_{\Phi}(\nu) = \Delta E(\nu) \equiv E_{n+1} - E_n = (n+1 - n)h\nu = h\nu$$

(3.84) .



ενώ οι υπόλοιπες δυνατές τιμές είναι ακέραια πολλαπλάσια της ενέργειας $E_{\Phi}(\nu)$.

⁴⁴ Δηλαδή, καθενός από τους κανονικούς τρόπου ταλάντωσης ή ισοδύναμα, του καθενός από τα στάσιμα ηλεκτρομαγνητικά κύματα της κοιλότητας.

Έτσι, τόσον η ενέργεια των ανεξάρτητων ταλαντωτών, όσο και των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων παίρνει διάκριτες τιμές, οι οποίες είναι ακέραια πολλαπλάσια της ποσότητας $h\nu$ (σχέσεις 3.82, 3.84).

Η ελάχιστη απαίτηση για την ισχύ της 3.80, και των σχέσεων που στηρίζονται σ' αυτή, είναι η σχέση 3.84 η οποία αφορά την μεταφορά ενέργειας $\Delta E(\nu)$ από την ύλη (ατομικοί ταλαντωτές) στην ακτινοβολία (ηλεκτρομαγνητικά κύματα). Έτσι ο Planck αρχικά, θέλοντας να περιορίσει όσο το δυνατόν περισσότερο το μέγεθος των επαναστατικών αλλαγών στην κλασική θεωρία, υπέθεσε ότι μόνο η μεταφορά ενέργειας $\Delta E(\nu)$ από την ύλη στην ακτινοβολία λαμβάνει χώρα κατά **πακέτα** ενέργειας ορισμένου μεγέθους E_Φ , που δίνονται από την σχέση 3.84, χωρίς να απαιτήσει κατ' ανάγκη και την 3.82. Αργότερα, ο ίδιος (μάλλον απρόθυμα) και ο Einstein επέκτειναν την ιδέα, συνειδητοποιώντας την γενικότητα της και τις βαθύτερες της συνέπειες. Η ενέργεια E_Φ των πακέτων ενέργειας έχει δοθεί ωρίτερα στον πίνακα του σχήματος 2.1 σε eV, για μια μεγάλη περιοχή συχνοτήτων ν . Αυτά τα «πακέτα» ενέργειας, τα οποία αποτελούν ενιαίες ενεργειακές μονάδες, ο Planck ονόμασε **κβάντα φωτός** ή, απλά, **κβάντα**, από το λατινικό *quantum* = **ποσότητα**. Αργότερα, όταν συνειδητοποιήθηκε (κυρίως από τον Einstein) η «λίγο-πολύ» σωματιδιακή συμπεριφορά αυτών των κβάντων ενέργειας, χρησιμοποιήθηκε ο ειδικότερος όρος **φωτόνια** (photons, από την ελληνική λέξη *φως*) για τα κβάντα της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Από τη λέξη «κβάντα» προέρχεται, όπως είναι ευνόητο, η γενικότερη έννοια της **κβάντωσης** καθώς και ο όρος **Κβαντική Θεωρία ή Θεωρία των Κβάντα**. Τον όρο αυτό χρησιμοποιούμε σήμερα όχι μόνο για την αρχική θεωρία του Planck που αποτέλεσε τα θεμέλια, αλλά και για ολόκληρο το οικοδόμημα που ακολούθησε και συνοψίζεται, όπως είδαμε στο εισαγωγικό κεφάλαιο 1 αυτού του βιβλίου, στο διάγραμμα [1.1].

Θα πρέπει να σημειώσουμε πως ο Planck αρχικά δέχθηκε την σχέση (3.84) για την μέση τιμή της ενέργειας του πλήθους των ανεξαρτήτων ταλαντωτών (στάσιμα κύματα, κανονικοί τρόποι ταλάντωσης) και την (3.82) την ενέργεια καθενός από τους ανεξάρτητους ταλαντωτές σαν αποτέλεσμα αλληλεπίδρασης της ύλης με την ακτινοβολία κατά την θερμοδυναμική ισορροπία. Αργότερα έγινε φανερό ότι η (3.82) ισχύει για οποιοδήποτε σύστημα με ένα βαθμό ελευθερίας, του οποίου η χρονική εξάρτηση είναι αρμονική (τριγωνομετρική) συνάρτηση του χρόνου. Έτσι, η (3.82) αποδίδεται σε «ελεύθερη μετάφραση» συνήθως με την φράση :

Η ενέργεια ενός αρμονικού ταλαντωτή (ή γενικότερα ενός φυσικού συστήματος του οποίου η «συντεταγμένη»⁴⁵ είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου) είναι κβαντισμένη (δηλαδή διάκριτη, μη-συνεχής). Ο αριθμός n στην (3.82) ονομάζεται **κβαντικός αριθμός**, και καθορίζει πλήρως την ενέργεια του συγκεκριμένου αρμονικού ταλαντωτή, συχνότητας ν , ενώ κλασικά την ενέργεια καθορίζει το πλάτος της ταλάντωσης. Ο κβαντικός αριθμός n χαρακτηρίζει επίσης και την αντίστοιχη «κατάσταση» του συγκεκριμένου αρμονικού ταλαντωτή (με συχνότητα ν) η οποία ονομάζεται **κβαντική κατάσταση**. Στην κλασική φυσική και ιδιαίτερα στην θερμοδυναμική η **κατάσταση** ενός συστήματος περιγράφεται από το πλήθος των φυσικών μεταβλητών (των οποίων το πλήθος εξαρτάται από το πλήθος των βαθμών ελευθερίας) οι οποίες καθορίζουν την ενέργεια του συστήματος σε μια δοσμένη χρονική στιγμή. Τέτοιες φυσικές μεταβλητές (ή «γενικευμένες συντεταγμένες») είναι συνήθως η θέση και η ορμή (όπως στην περίπτωση ενός αρμονικού ταλαντωτή συχνότητας ν) ή η γωνία και η στροφορμή (για συστήματα με περιστροφικούς βαθμούς ελευθερίας). Στην περίπτωση του μέλανος σώματος η (μακρο)κατάσταση του συστήματος καθορίζεται από τις καταστάσεις καθενός από τους ατομικούς ταλαντωτές. Το πλήθος των ατομικών ταλαντωτών, με συχνότητες μέχρι κάποια τιμή ν , είναι όσο και το πλήθος των συχνοτήτων (ή των κυματαριθμών k) μέχρι αυτή την τιμή, δηλαδή, όπως προκύπτει από την 3.50 αντικαθιστώντας από την 3.37, ίσο προς $\frac{8\pi\nu^3}{3c^2}$. Η κβαντική κατάσταση του ταλαντωτή χαρακτηρίζεται από τον κβαντικό αριθμό n , ο οποίος χρησιμοποιείται σαν «ταμπέλα», συνήθως σε μορφή δείκτη, για να δηλώσει την συγκεκριμένη κατάσταση. Όταν ο κβαντικός αριθμός n είναι μηδέν, η ενέργεια σύμφωνα με την (3.82) είναι επίσης μηδέν⁴⁶. **Η κβαντική κατάσταση που αντιστοιχεί στη χαμηλότερη δυνατή ενέργεια του ταλαντωτή, και η οποία στη προκειμένη περίπτωση αντιστοιχεί στην τιμή $n = 0$, ονομάζεται θεμελιώδης ή βασική κατάσταση. Ένας ταλαντωτής που βρίσκεται σ'**

⁴⁵ Η λέξη «συντεταγμένη» χρησιμοποιείται με την γενικότερη σημασία του όρου και περιλαμβάνει οποιαδήποτε φυσική ποσότητα που χρησιμεύει για να περιγράψει την «κατάσταση ενός φυσικού συστήματος σε μια δοσμένη χρονική στιγμή. Παραδείγματα τέτοιων συντεταγμένων είναι το μήκος ενός ελατηρίου, η γωνία που περιγράφει τη θέση ενός εκκρεμούς, το πλάτος ενός στάσιμου κύματος κτλ. Η χρονική εξάρτηση όλων αυτών των παραδειγμάτων είναι αρμονική (δείτε το κεφάλαιο 3 της Κυματικής, παραπομπή Α2).

⁴⁶ αργότερα, στο κεφάλαιο 4 και 5 στην κβαντομηχανική, θα δούμε ότι η ενέργεια, που αντιστοιχεί στη κατάσταση με $n=0$ δεν είναι μηδέν, αλλά ίση προς $\frac{1}{2} h \nu$. Η ενέργεια αυτή είναι γνωστή και σαν «ενέργεια απολύτου μηδενός». Όμως, αυτό δεν αλλάζει σε τίποτα την επιχειρηματολογία που αναπτύσσουμε εδώ. Τα επιχειρήματα βασίζονται μόνο στο γεγονός ότι η κατάσταση με $n=0$ είναι η χαμηλότερη δυνατή ενεργειακή κατάσταση.

αυτή την κατάσταση δεν ακτινοβολεί επειδή δεν μπορεί να πάει σε άλλη χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση, εκπέμποντας την διαφορά ενέργειας υπό μορφή ακτινοβολίας. Σε θερμοκρασία $0 \text{ }^\circ\text{K}$, στο απόλυτο μηδέν, όλοι οι ταλαντωτές της κοιλότητας βρίσκονται σ' αυτή την κατάσταση και, κατά συνέπεια, δεν ακτινοβολούν.

Οι κβαντικές καταστάσεις με $n > 0$, ονομάζονται **διεγερμένες καταστάσεις** και έχουν ενέργειες που είναι μεγαλύτερες από την ενέργεια της βασικής κατάστασης κατά $\Delta E_n = n h \nu$. Για να μπορέσει να βρεθεί ένας ταλαντωτής σε μια τέτοια κατάσταση πρέπει να του προσφερθεί με κάποιο τρόπο ποσότητα ενέργειας ίση ή μεγαλύτερη από την ενέργεια ΔE_n . Στην περίπτωση μας, δηλαδή στην περίπτωση του μέλανος σώματος, η ενέργεια αυτή μπορεί να προσφερθεί υπό μορφή θερμότητας. Έτσι, για να διεγερθούν αυτές οι (διεγερμένες) καταστάσεις θερμικά, χρειάζονται κάποια μη-μηδενική θερμοκρασία, $T > 0 \text{ }^\circ\text{K}$, ώστε η θερμική ενέργεια $k_B T$ να είναι ίση ή μεγαλύτερη από την ενέργεια $\Delta E_n = n h \nu$.

Δηλαδή η «συνθήκη θερμικής διέγερσης μιας διεγερμένης κατάστασης» είναι :

$$k_B T \geq n h \nu \quad , \quad n > 0 \quad (3.85).$$

Σε αντίθεση με την βασική ή θεμελιώδη κατάσταση, η οποία είναι μια **σταθερή κατάσταση**, οι διεγερμένες καταστάσεις αργά ή γρήγορα (συνήθως πάρα πολύ γρήγορα) μεταπίπτουν σε καταστάσεις με χαμηλότερη ενέργεια, και τελικά στη θεμελιώδη κατάσταση, που είναι εξ ορισμού η κατάσταση με τη χαμηλότερη ενέργεια. Η ενέργεια, που απελευθερώνεται κατά την **αποδιέγερση** των διεγερμένων καταστάσεων αποδίδεται στο περιβάλλον υπό μορφή κβάντων ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, των γνωστών φωτονίων.

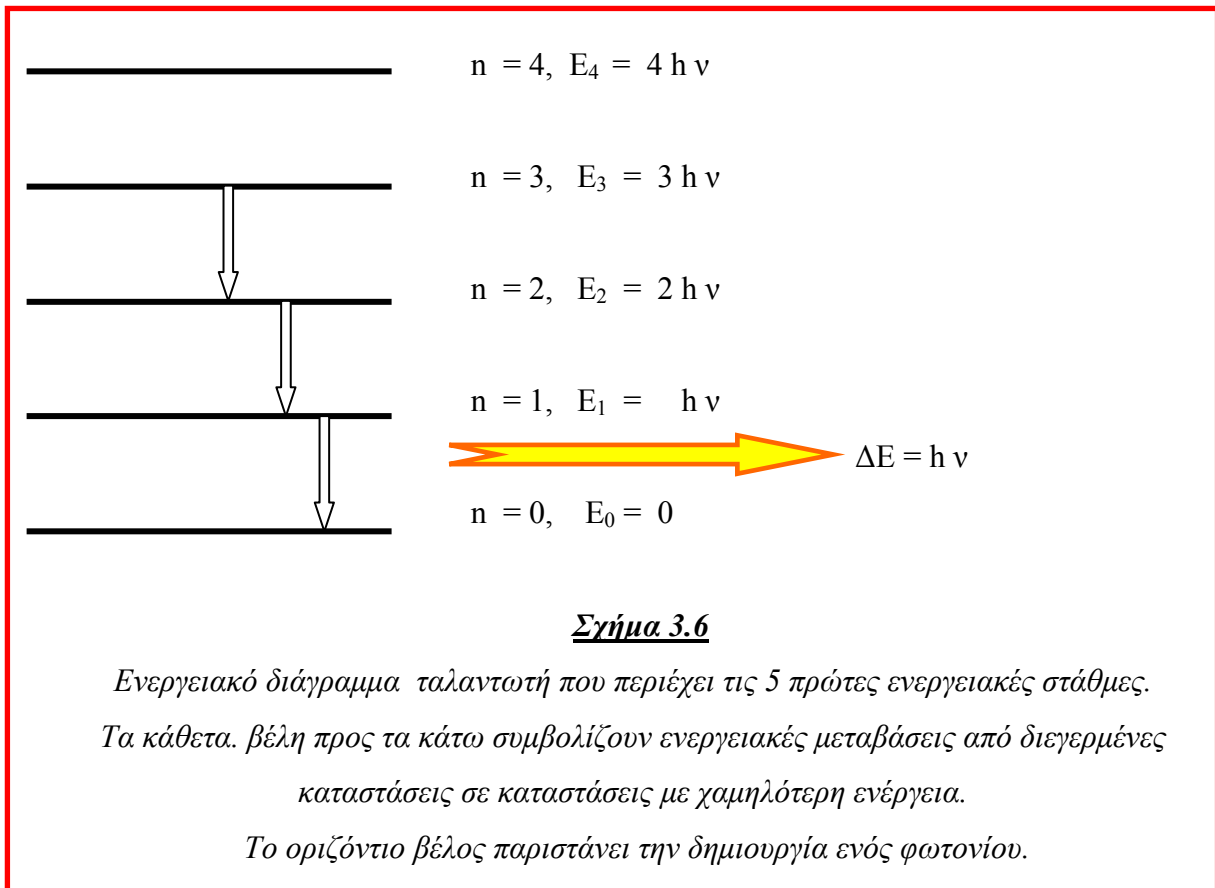
Οι ενέργειες E_n του αρμονικού ταλαντωτή (και γενικότερα ενός φυσικού συστήματος με «παρόμοια» χαρακτηριστικά, όπως αναφέραμε πιο πριν) συνήθως παριστάνονται σε ένα **ενεργειακό διάγραμμα** με οριζόντιες γραμμές, όπως στο σχήμα 3.6, γι αυτό και ονομάζονται **ενεργειακές στάθμες** ή **ενεργειακά επίπεδα**.

Ο οριζόντιος άξονας στο σχήμα 3.6, και γενικότερα στα ενεργειακά διαγράμματα, δεν έχει καμία σημασία, σε αντίθεση με τον κατακόρυφο άξονα, που παριστάνει ενέργεια. Στο σχήμα 3.6 φαίνεται επίσης, παραστατικά, η **αποδιέγερση** της πρώτης διεγερμένης κατάστασης (δηλαδή, μετάβαση από την διεγερμένη κατάσταση που χαρακτηρίζεται από

$n = 1$ στην θεμελιώδη, με $n = 0$) με ταυτόχρονη μεταφορά της διαφοράς της ενέργειας $\Delta E = h\nu$, σε ένα φωτόνιο ενέργειας $E_\phi = h\nu$ και συχνότητας ν .

Αυτή η διεργασία, που βασίζεται στην κβάντωση της ενέργειας των (ατομικών) ταλαντωτών και την διατήρηση της ενέργειας, δείχνει ταυτόχρονα με απλό τρόπο, σαν συνέπεια, και την κβάντωση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων «σε πακέτα» του ενός φωτονίου. Την φύση και τις ιδιότητες των φωτονίων θα δούμε λεπτομερέστερα πάρα κάτω στο κεφάλαιο 5.

Όμως, αξίζει να επαναλάβουμε κάτι πολύ σημαντικό, που προκύπτει τώρα εύκολα από τη διεργασία του σχήματος 3.6, ότι:



ένας ταλαντωτής, που βρίσκεται στην θεμελιώδη κατάσταση ($n = 0$) δεν εκπέμπει φωτόνια, δηλαδή δεν ακτινοβολεί ενέργεια, και συνεπώς δεν συνεισφέρει στο φάσμα της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος (δηλαδή στη μέση τιμή της

ενέργειας $\langle E \rangle$, που μαζί με την πυκνότητα καταστάσεων $g(\nu)$, καθορίζει τις φασματικές συναρτήσεις $u(\nu, T)$ και $I_T(\nu)$).

Στη γλώσσα του θεωρήματος ισοκατανομής της ενέργειας συνηθίζεται οι βαθμοί ελευθερίας των στασίμων κυμάτων, που περιέχονται στην συνάρτηση $g(\nu)$ και χαρακτηρίζουν ταλαντωτές οι οποίοι βρίσκονται στην βασική τους κατάσταση (και κατά συνέπεια δεν εκπέμπουν ακτινοβολία) να αναφέρονται σαν «παγωμένοι» **βαθμοί ελευθερίας**. Όπως είναι προφανές, τα αντίστοιχα στάσιμα κύματα δεν έχουν ενεργοποιηθεί και δεν συμμετέχουν στο φάσμα. Αυτό το γεγονός θα πρέπει να αντικατοπτρίζεται στον υπολογισμό της μέσης τιμής της ενέργειας, η οποία προφανώς θα εξαρτάται από την συχνότητα ν , αφού η συνθήκη διέγερσης (3.85) εξαρτάται από το ν .

Η πιθανότητα να διεγερθεί θερμικά (όταν $T \neq 0$) ένας ατομικός ταλαντωτής, με δοσμένη (ιδιο)συχνότητα ν στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση ($n=1$), και κατά συνέπεια να ενεργοποιηθεί ο αντίστοιχος βαθμός ελευθερίας της ακτινοβολίας, είναι σύμφωνα με την

στατιστική Maxwell- Boltzmann ανάλογη του $e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}$. Ισοδύναμα, αυτός ο αριθμός $(e^{-\frac{h\nu}{k_B T}})$ δίνει το ποσοστό των ατομικών ταλαντωτών $N_1/N_{ολ}$, οι οποίοι βρίσκονται στην

κατάσταση με $n=1$ (N_1 είναι το πλήθος των ταλαντωτών που βρίσκονται στην κατάσταση με $n=1$, και ενέργεια E_1 , και $N_{ολ}$ είναι το ολικό πλήθος των ταλαντωτών).

Βλέπουμε λοιπόν πως όταν δεν πληρούται η συνθήκη (3.85), αυτός ο εκθέτης είναι κατ' απόλυτο τιμή μεγαλύτερος της μονάδας και η πιθανότητα διέγερσης (ή αλλιώς το ποσοστό $N_1/N_{ολ}$) φθίνει εκθετικά με τη συχνότητα. Για διεγερμένες καταστάσεις με $n > 1$ η πιθανότητα αυτή είναι ακόμη πιο μικρή, δηλαδή πρακτικά αμελητέα. Βλέπουμε επίσης ότι όσο πιο μικρή είναι η συχνότητα ν (για δοσμένη θερμοκρασία) τόσο πιο πολλοί ταλαντωτές διεγείρονται και συμμετέχουν στη εκπομπή θερμικής ακτινοβολίας.

Για αρκετά μικρές συχνότητες όλοι σχεδόν οι ταλαντωτές είναι διεγερμένοι (δεν υπάρχουν «παγωμένοι βαθμοί ελευθερίας») και τότε η κβαντική θεωρία οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα με την κλασική θεωρία (Αρχή της Αντιστοιχίας).

Μπορούμε να δούμε τώρα, μετά από αυτή τη συζήτηση, την αντίστοιχη μαθηματική περιγραφή, η οποία οδηγεί στη μέση τιμή της ενέργειας της ακτινοβολίας που περιγράφει η σχέση (3.80). Τις φυσικές και άλλες συνέπειες της θεωρίας του Planck θα συζητήσουμε αμέσως μετά.

Σύμφωνα λοιπόν με τη κλασική στατιστική επειδή έχουμε διάκριτες τιμές της ενέργειας, αντί των (3.18)-(3.19)⁴⁷ θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για την μέση τιμή την ποσότητα:

$$\langle E \rangle = \sum_i P_i E_i \quad (3.86) \quad ,$$

όπου : $P_i \equiv P(E_i) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$ (3.87)

είναι η πιθανότητα να έχουμε ενέργεια E_i . Κατά τα γνωστά, η ποσότητα β είναι: $\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$. Η ποσότητα Z στον παρανομαστή (η οποία εξασφαλίζει ότι το άθροισμα

των πιθανοτήτων P_i πάνω σ' όλες τις δυνατές τιμές της ενέργειας E_i θα είναι μονάδα $\sum_i P_i = 1$) ονομάζεται **συνάρτηση διαμερισμού** Z . Όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 18

της ΣΚΦ, η συνάρτηση διαμερισμού ορίζεται από το άθροισμα :

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i} \quad (3.88)$$

Ας θυμηθούμε λοιπόν ότι η μέση τιμή στην (3.86) λόγω των (3.87) και (3.88) μπορεί να γραφεί :

$$\langle E \rangle = - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = - \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \quad (3.89) \quad .$$

Θέτοντας : $\alpha \equiv h\nu\beta = \frac{h\nu}{k_B T}$, μπορούμε να γράψουμε την (3.89) διαδοχικά :

$$\langle E(\nu) \rangle = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} \right) = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu\beta} \right) = -h\nu \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} \quad (3.90).$$

Όμως τα άθροισμα

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = 1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + e^{-3\alpha} + \dots, \quad \text{στην (3.90), θέτοντας } x = e^{-\alpha}, \text{ παίρνει τη μορφή :}$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots,$$

η οποία είναι το ανάπτυγμα σε σειρά της ποσότητας $(1-x)^{-1}$.

Έτσι: $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = (1 - e^{-\alpha})^{-1}$ (3.91)

Κατά συνέπεια η (3.88) γράφεται :

⁴⁷ Ισχύουν και εδώ παρόμοια σχόλια με εκείνα που οδήγησαν στις ισοδύναμες με την (3.19) σχέσεις 3.19', 3.19''

$$\begin{aligned} \langle E(\nu) \rangle &= -h\nu \frac{d}{d\alpha} \ln(1 - e^{-\alpha})^{-1} = +h\nu \frac{d}{d\alpha} \ln(1 - e^{-\alpha}) = \frac{h\nu}{(1 - e^{-\alpha})} (0 + e^{-\alpha}) \\ &= \frac{h\nu e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} = \frac{h\nu}{e^{\alpha} - 1} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \end{aligned} \quad (3.80'),$$

που είναι η μέση τιμή (3.80). Πήραμε λοιπόν αυτό που θέλαμε !

Στη δραστηριότητα 3.6 και την άσκηση 3.22, θα έχουμε επί πλέον την ευκαιρία αργότερα να επεξεργαστούμε γραφικά την βασική ιδέα πίσω από την μαθηματική απόδειξη, που ακολουθήσαμε παραπάνω και στην οποία μας οδήγησαν τα φυσικά επιχειρήματα, που συνοδεύουν την (3.85) και το σχήμα 3.6.

ε) Σύγκριση Κβαντικής και Κλασικής Θεωρίας : Μια πρώτη επαφή με την Αρχή της Αντιστοιχίας

Όπως είδαμε παραπάνω, η βασική φυσική εικόνα πίσω από την έννοια της κβάντωσης της ενέργειας που οδηγεί στην ερμηνεία του φάσματος (του σχήματος 3.4) είναι αρκετά απλή και μπορεί να συνοψισθεί ως εξής :

Όταν η κατανομή της ενέργειας των ατομικών ταλαντωτών είναι συνεχής, τότε η μέση ενέργεια, ανά ταλαντωτή είναι $k_B T$. Κάτι τέτοιο συμβαίνει κλασικά. Όταν η ενέργεια είναι κβαντωμένη, σύμφωνα με την κβαντική σχέση (3.82), τότε στις υψηλές συχνότητες οι περισσότεροι από τους ταλαντωτές βρίσκονται στην βασική κατάσταση (με $n=0$), δεν είναι διεγερμένοι, δεν ακτινοβολούν και κατά συνέπεια, δεν συνεισφέρουν στην (μέση) ενέργεια της ακτινοβολίας, που περιγράφει η φασματική συνάρτηση $u(\nu, T)$. Ο αριθμός των ταλαντωτών στην κατάσταση $n = 1$ είναι ανάλογος προς $e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}$ (σύμφωνα με το θεώρημα του Boltzmann). Έτσι, η μέση ενέργεια (και η συνάρτηση $u(\nu, T)$, σύμφωνα με την (3.22)) ελαττώνεται εκθετικά με τη συχνότητα ν .

Είναι φανερό ότι δεν χρειάζεται στην επιχειρηματολογία μας να λάβουμε υπόψη ταλαντωτές σε καταστάσεις με $n > 1$, αφού ο αριθμός τους θα είναι δραστικά μικρότερος και θα ελαττώνεται εκθετικά με το n , και το ν (δηλαδή ο αριθμός τους θα είναι ανάλογος προς $e^{-\frac{n h \nu}{k_B T}}$).

Τα ίδια συμπεράσματα μπορούμε να διατυπώσουμε, όπως είδαμε, με βάση το θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας, εισάγοντας τους « παγωμένους » βαθμούς ελευθερίας, οι οποίοι αντιστοιχούν στους ταλαντωτές που βρίσκονται στην βασική τους κατάσταση.

Μια τέτοια περιγραφή είναι πολλές φορές απλούστερη και βολική και συνηθίζεται σε εισαγωγικά συγγράμματα.

Ένα εύλογο ερώτημα που μπορεί να γεννηθεί μετά από όλη αυτή τη συζήτηση είναι : Πως συμβιβάζονται αυτές οι δυο (εκ διαμέτρου αντίθετες) περιγραφές, το διάκριτο της κβαντικής με το συνεχές της κλασικής φυσικής, στις χαμηλές συχνότητες ;

Όπως είδαμε, στις χαμηλές συχνότητες υπάρχει σύμπτωση της κβαντικής και της κλασικής περιγραφής. Ας μη ξεχνάμε ότι αυτό ήταν μια βασική απαίτηση (απαίτηση β) βάσει της οποίας απορρίφθηκε η εμπειρική συνάρτηση του Wien (σχέση 3.68) και καθοδηγήθηκε ο Planck.

Όπως είδαμε λοιπόν από την ανάπτυξη της (3.80), το όριο των πολύ μικρών συχνοτήτων δηλώνει, $h\nu \rightarrow 0$, οπότε ο παρανομαστής γίνεται $\frac{h\nu}{k_B T}$ και βρίσκουμε, κατά τα γνωστά, $\langle E(\nu) \rangle_{\nu \rightarrow 0} \rightarrow k_B T$. Αυτή η διαδικασία όμως, ταυτόχρονα ορίζει τι σημαίνει «πολύ μικρές συχνότητες» ή αλλιώς $h\nu \rightarrow 0$. Αυτές οι συχνότητες ορίζονται από τη σχέση :

$$\frac{h\nu}{k_B T} \ll 1 \quad (3.92).$$

Στο όριο, που υποδηλώνει η (3.92) έχουμε σύμπτωση της κλασικής και κβαντικής θεωρίας.

Αυτή η παρατήρηση που δείχνει την αντιστοιχία του κβαντικού και του κλασικού αποτελέσματος όταν $h\nu \rightarrow 0$ έχει γενικότερη ισχύ, (όπως θα δούμε και στο κεφάλαιο 8, αργότερα) και ονομάζεται Αρχή της αντιστοιχίας.

Πολύ συχνά το όριο που εκφράζει η (3.92) δηλώνεται συμβολικά και συνοπτικότερα με το όριο $h \rightarrow 0$, που στη συγκεκριμένη περίπτωση σημαίνει $h \ll \frac{k_B T}{\nu}$. Επειδή το h είναι μια σταθερά, ο συμβολισμός αυτός υποδηλώνει $\frac{k_B T}{\nu} \rightarrow \infty$

Έτσι η αρχή της αντιστοιχίας ισχύει όταν : $h \rightarrow 0$, που σημαίνει $\frac{k_B T}{\nu} \rightarrow \infty$ δηλαδή $\nu \rightarrow 0$ ή $T \rightarrow \infty$. (3.93)

Η αρχή αυτή, λοιπόν, δηλώνει τις περιπτώσεις στις οποίες η τιμή της σταθεράς h είναι εξαιρετικά μικρή σε σχέση με άλλες σχετικές παραμέτρους, ώστε να μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση κάτι τέτοιο περιμένουμε να συμβαίνει στις «πολύ χαμηλές» συχνότητες και στις «πολύ υψηλές» θερμοκρασίες. Έτσι, στη γενική περίπτωση μπορούμε να συνοψίσουμε την αρχή της αντιστοιχίας ως εξής :

$$\langle E(\nu) \rangle_{\text{ΚΒΑΝΤΙΚΗ}} \rightarrow \langle E \rangle_{\text{ΚΛΑΣΙΚΗ}} \quad (3.94),$$

όταν $h \rightarrow 0$

Για μια ακόμα φορά, η (3.94) εξασφαλίζει ότι στο όριο $h \rightarrow 0$, τα αποτελέσματα της κβαντικής θεωρίας (για τη μέση τιμή της ενέργειας) συμπίπτουν με τα αντίστοιχα κλασικά αποτελέσματα. Με άλλα λόγια η κβαντική θεωρία « περιέχει » την κλασική φυσική στο όριο $h \rightarrow 0$.

Αυτό γίνεται περισσότερο κατανοητό παρατηρώντας ότι οι (3.92) - (3.94) δηλώνουν ειδικότερα, πως όταν η διαφορά δυο διαδοχικών διάκριτων τιμών ενέργειας $\Delta E = (n+1)h\nu - nh\nu = h\nu$ είναι κατά πολύ μικρότερη από μια τυπική τιμή της ενέργειας⁴⁸ $E \approx k_B T = nh\nu$, τότε η ενέργεια μπορεί να θεωρηθεί πρακτικά σαν συνεχής μεταβλητή αφού:

$$\frac{\Delta E}{E} \ll 1. \quad (3.95)$$

Ενώ η σχέση 3.95 γράφεται, αντικαθιστώντας ΔE με $h\nu$ και E με $nh\nu$:

$$\frac{h\nu}{nh\nu} \ll 1 \quad \text{ή} \quad \frac{1}{n} \ll 1, \quad \text{ή} \quad n \gg 1 \quad (3.96),$$

που σημαίνει ότι :

$$\left\{ \text{Το κλασικό όριο επιτυγχάνεται όταν } n \rightarrow \infty \right\} \quad (3.97)$$

⁴⁸ Στην προκειμένη περίπτωση κατά την οποία έχουμε ένα σύστημα με πολλούς βαθμούς ελευθερίας η «τυπική τιμή» της ενέργειας E δίνεται συναρτήσει της θερμοκρασίας, $E \approx k_B T$. Σε συστήματα με ένα βαθμό ελευθερίας, η (3.95) αποτελεί εξ ορισμού την μαθηματική διατύπωση της απαίτησης για σχεδόν συνεχή μεταβολή της ενέργειας. Έτσι η συνθήκη 3.95 καθώς και η 3.97 αποτελούν γενικότερη διατύπωση της αρχής της αντιστοιχίας από την 3.93, η οποία αφορά συστήματα με πολλούς βαθμούς ελευθερίας σε θερμοδυναμική ισορροπία.

Με βάση την αρχή της αντιστοιχίας, και ιδιαίτερα όπως εκφράζεται από την 3.97, μπορεί να εξηγηθεί το γεγονός ότι δεν παρατηρούμε τις συνέπειες της κβάντωσης της ενέργειας σε μακροσκοπικούς αρμονικούς ταλαντωτές, όπως ένα κλασικό εκκρεμές (βλέπε άσκηση 3.21) επειδή οι «καταστάσεις» των μακροσκοπικών ταλαντωτών αντιστοιχούν σε ένα πάρα πολύ μεγάλους κβαντικούς αριθμούς n .

Βλέπουμε λοιπόν ότι οι παραδοχές (αξιώματα) του Planck, όχι μόνο εξήγησαν πλήρως όλα τα πειραματικά δεδομένα και νόμους της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος, αλλά έκαναν ταυτόχρονα μία επαναστατική τομή στη φυσική της εποχής και έθεσαν τα θεμέλια της κβαντικής θεωρίας η οποία βρίσκεται στην (και είναι η) καρδιά της σύγχρονης φυσικής.

Η αξία μίας φυσικής θεωρίας δεν κρίνεται μόνο από την ικανότητα να εξηγεί χωρίς πρόβλημα τα υπάρχοντα πειραματικά δεδομένα αλλά (κυρίως) από την δύναμη να προβλέπει επιτυχώς (να υποδεικνύει και να συσχετίζει) νέα φυσικά φαινόμενα και πειράματα. Η θεωρία του Planck έχει όλα αυτά τα χαρακτηριστικά, και όπως αναφέραμε πριν, στο εισαγωγικό κεφάλαιο αυτού του βιβλίου, ονομάστηκε **κβαντική θεωρία** και οδήγησε στο ομώνυμο μεγάλο οικοδόμημα, που φαίνεται διαγραμματικά στο σχήμα [1.1]. Η σταθερά h που ο Planck εισήγαγε αποτελεί πλέον μια **θεμελιώδη σταθερά** της Φυσικής, η σημασία της οποίας είναι πολύ πιο γενική και μεγάλη, από το πρόβλημα του μέλανος σώματος αφού αγγίζει τα περισσότερα προβλήματα της σύγχρονης φυσικής.

Η ιδέα της κβάντωσης της ενέργειας, όπως θα φανεί πολύ σύντομα παρακάτω επεκτάθηκε και σε άλλα συστήματα και γενικεύθηκε από άλλους φυσικούς ανάμεσα στους οποίους κυρίαρχη και καθοριστική θέση είχε ο Albert Einstein. Ο ίδιος ο Planck ήταν πολύ σκεπτικιστής ως προς αυτή την γενίκευση του Einstein, επειδή πίστευε πως η κβάντωση έχει μόνο να κάνει αποκλειστικά με την ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ ύλης και ακτινοβολίας (σχέση 3.84). Αυτές και άλλες ιδέες σχετικά με τις παραπέρα συνέπειες της κβάντωσης στην ακτινοβολία γενικότερα θα συζητήσουμε στην επόμενη ενότητα.

Στον πίνακα 3.1 παρακάτω συνοψίζουμε τις κυριότερες διαφορές (και ομοιότητες) μεταξύ της κλασικής και κβαντικής θεωρίας του μέλανος σώματος.

Προτού κλίσουμε αυτή την ενότητα, καλόν είναι να δώσουμε εδώ και την αντίστοιχη συνάρτηση $u(\lambda, T)$ του Planck, η οποία είναι πολύ συνηθισμένη και προκύπτει, ως γνωστόν από την $u(\nu, T)$ και τη σχέση (3.56) :

$$u(\lambda, T) = u\left(\nu = \frac{c}{\lambda}, T\right) \frac{c}{\lambda^2} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \quad (3.98)$$

Από την 3.64 βρίσκουμε επίσης : $\rho_T(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$ (3.99).

Ερωτήσεις

3.8 Στο εισαγωγικό κεφάλαιο1, όπως μπορείτε να διαπιστώσετε, είχαμε αναφέρει ότι η κλασική φυσική περιγράφει ικανοποιητικά τα «μακροσκοπικά» αντικείμενα σε αντίθεση με τα μικροσκοπικά για τα οποία είχαμε χρησιμοποιήσει την ακτίνα του ατόμου του υδρογόνου σαν μέτρο σύγκρισης. Πως συμβιβάζεται εκείνη η συζήτηση με την αρχή της αντιστοιχίας;

Υπόδειξη: Πριν απαντήσετε σ’ αυτό το ερώτημα δείτε και την άσκηση3.21.

3.9 Εάν η θεμελιώδης κατάσταση (n = 0) των ταλαντωτών δεν αντιστοιχούσε σε ενέργεια μηδέν, όπως προβλέπει η (3.82), αλλά σε μια τιμή, έστω $E_0 = \frac{1}{2} h\nu$, τι θα άλλαζε (εάν άλλαζε) στη συζήτηση για τους «παγωμένους βαθμούς ελευθερίας » και τις συνέπειες για την μέση τιμή της ενέργειας και την κβαντική μορφή της συνάρτησης $u(\nu, T)$;

Πίνακας 3.1

Σύγκριση Κλασικής και Κβαντικής Θεωρίας της Ακτινοβολίας του Μέλανος Σώματος

Κλασική Θεωρία	Κβαντική Θεωρία
<p>E : συνεχής . Τιμές : από 0 ως ∞</p> $\langle E \rangle = \int_0^{\infty} E p(E) dE = \int_0^{\infty} E \beta e^{-\beta E} dE = \frac{1}{\beta}$ $\langle E \rangle = k_B T$	<p>E: διάκριτη. Τιμές: $E_n = n h \nu, n=0,1,2,\dots$</p> $\langle E \rangle = \sum_i P_i E_i, \quad P_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$

$u(\nu, T) = \langle E \rangle g(\nu)$	$\langle E(\nu) \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$
$g(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2$	$u(\nu, T) = \langle E \rangle g(\nu)$
$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 k_B T$	$g(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2$
	$u(\nu, T) = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$

Ασκήσεις

3.18 Επιλέξτε ένα από τα δυο, σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) στις παρακάτω προτάσεις :

α) Η Κλασική Φυσική αδυνατεί να περιγράψει το φάσμα της ακτινοβολίας του Μέλανος Σώματος και τους αντίστοιχους πειραματικούς νόμους των Stefan - Boltzmann και του Wien. Σ Λ

β) Για πολύ μεγάλες συχνότητες η κλασική θεωρητική καμπύλη προσεγγίζει τα πειραματικά αποτελέσματα, ενώ για πολύ μικρές συχνότητες το κλασικό αποτέλεσμα παρουσιάζει αφύσικους απειρισμούς. Σ Λ

γ) Μια κοιλότητα με μια οπή από την οποία εξέρχεται η ακτινοβολία αποτελεί ένα πρότυπο μέλανος σώματος. Σ Λ

δ) Ο θεωρητικός υπολογισμός της συνάρτησης $u(\nu, T)$ στηρίζεται μόνο στον υπολογισμό του πλήθους των στασίμων κυμάτων με συχνότητες μεταξύ ν και $\nu + d\nu$. Σ Λ

ε) Η κβαντική φυσική στο όριο $h \rightarrow \infty$ συμπίπτει με την κλασική φυσική. Αυτή η αρχή είναι γνωστή σαν αρχή της αντιστοιχίας. Σ Λ

στ) Η αρχή της αντιστοιχίας εκφράζει την σύμπτωση της κλασικής και της κβαντικής θεωρίας για μεγάλο πλήθος κβάντων. Σ Λ

3.19 Συμπληρώστε τα κενά :

Το όριο $h \rightarrow \dots$ επιτυγχάνεται όταν $\frac{k_B T}{\nu} \rightarrow \infty$ δηλαδή για πολύ χαμηλές ... ή πολύ μεγάλες ... ή όταν $n \rightarrow \infty$, δηλαδή για πάρα πολύ Η ... θεωρία «περιέχει» την ... θεωρία στο όριο $h \rightarrow \dots$. Αυτή η ... είναι γνωστή σαν ... της αντιστοιχίας.

3.20 Μπορείτε, στην κβαντική θεωρία, να βρείτε με διαστατική ανάλυση, την εξάρτηση της u (σχέση 3.81) από βασικές παραμέτρους, όμοια με αυτή που εφαρμόσαμε στην υποενότητα 3.3 για την κλασική περίπτωση ; Επεξηγήστε.

3.21 Δίνεται εκκρεμές μήκους $l = 0.5 \text{ m}$ και μάζας $m = 0.1 \text{ kg}$. Το εκκρεμές εκτρέπεται από την κατακόρυφο κατά γωνία 10 μοιρών (10^0) και αφήνεται να εκτελέσει φθίνουσα (λόγω τριβών) αρμονική ταλάντωση.

(α) Είναι η ενέργεια του εκκρεμούς κβαντισμένη σύμφωνα με την (3.83) ; Εάν ναι, ποιος ο αντίστοιχος κβαντικός αριθμός n ;

(β) Η ενέργεια του εκκρεμούς μειώνεται με την πάροδο του χρόνου (λόγω τριβών). Είναι η παρατηρούμενη μεταβολή της ενέργειας, ΔE , συνεχής ή ασυνεχής σύμφωνα με την (3.84) ;

(γ) Πως σχετίζεται η απάντησή σας με την αρχή της αντιστοιχίας;

Υπόδειξη : Βρείτε πρώτα την αρχική (ολική) ενέργεια και τη συχνότητα ταλάντωσης του εκκρεμούς. Υπολογίστε κατόπιν την διαφορά ΔE από την (3.84).

3.22 Θεωρείστε μέλαν σώμα σε θερμοκρασία $T = 1500 \text{ } ^\circ\text{K}$, και 5 συχνότητες ν τέτοιες ώστε οι αντίστοιχες ενέργειες $h\nu$ να είναι : $k_B T / 10$, $k_B T / 2$, $k_B T$, $2k_B T$ και $10k_B T$. Για κάθε μία από αυτές τις συχνότητες βρείτε τη μέση τιμή της ενέργειας και σχεδιάστε την κατανομή της ενέργειας $P(E)$, στο διάστημα από 0 έως 0.3 eV. Η κατανομή της ενέργειας ισούται με το ποσοστό ταλαντωτών σε καταστάσεις με $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, και ενέργειες $E = nh\nu$ κτλ.

Τι παρατηρείτε ;

Υπόδειξη : Χρησιμοποιήστε ότι $k_B T \cong 0.13 \text{ eV}$ για $T = 1500 \text{ } ^\circ\text{K}$.

Περίληψη Κεφαλαίου 3:

(1) Για την περιγραφή του φάσματος του Μέλανος Σώματος εισάγουμε τις συναρτήσεις $\rho_T(\nu)$ και $u(\nu, T)$, οι οποίες έχουν την ίδια μορφή και την ίδια εξάρτηση από ν, T . Η $\rho_T(\nu)$ προκύπτει από την $u(\nu, T)$ με πολλαπλασιασμό επί μια σταθερά, που σχετίζεται με τη ταχύτητα του φωτός.

(2) Η Κλασική Φυσική αδυνατεί παντελώς να περιγράψει το φάσμα της ακτινοβολίας του Μέλανος Σώματος και τους αντίστοιχους πειραματικούς νόμους των Stefan - Boltzmann και του Wien. Μόνο για πολύ μικρές συχνότητες η κλασική θεωρητική

καμπύλη προσεγγίζει τα πειραματικά αποτελέσματα, ενώ για μεγάλες συχνότητες το κλασικό αποτέλεσμα παρουσιάζει αφύσικους απειρισμούς (Υπεριώδης Καταστροφή).

(3) Μια κοιλότητα με μια οπή από την οποία εξέρχεται η ακτινοβολία αποτελεί ένα πρότυπο μέλανος σώματος. Αυτό το πρότυπο αποτελεί την βάση για τον υπολογισμό της συναρτήσεως $u(\nu, T)$

(4) Αφετηρία για τον θεωρητικό υπολογισμό της συναρτήσεως $u(\nu, T)$ είναι η διαπίστωση ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα στο εσωτερικό της κοιλότητας πρέπει να είναι στάσιμα κύματα με κόμβους στα τοιχώματα της κοιλότητας.

(5) Ο θεωρητικός υπολογισμός της συνάρτησης $u(\nu, T)$ περιλαμβάνει δύο (2) βασικά στάδια : (α) Τον υπολογισμό της μέσης τιμής της ενέργειας ανά στάσιμο κύμα και (β) τον υπολογισμό του πλήθους των στασίμων κυμάτων με συχνότητες μεταξύ ν και $\nu + d\nu$. Η αποτυχία της κλασικής Φυσικής οφείλεται στο πρώτο στάδιο. Τα βήματα του κλασικού θεωρητικού υπολογισμού σκιαγραφούνται στο διάγραμμα [3.1]

(6) Η συνάρτηση $u(\nu, T)$ εξαρτάται κλασικά από τρεις μόνο παραμέτρους ή ποσότητες : ν , $\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$ και c . Έτσι (επειδή οι παράμετροι είναι μόνο τρεις), η εξάρτηση μπορεί να προκύψει γρήγορα και εύκολα με διαστατική ανάλυση.

Οι εκθέτες των ν και c , που δηλώνουν αυτή την εξάρτηση συνδέονται με την διάσταση του χώρου (3 Δ).

(7) Τα διαγράμματα [3.1] και [3.2], συνοψίζουν μερικά σημαντικά βήματα του κλασικού υπολογισμού της φασματικής πυκνότητας $u(\nu, T) = 1/V \frac{dE}{d\nu}$.

(8) Η αποτυχία της κλασικής φυσικής στον υπολογισμό της μέσης τιμής της ενέργειας οφείλεται στο ότι δεν λαμβάνει υπόψη τους παγωμένους βαθμούς ελευθερίας και θεωρεί ότι όλοι οι ατομικοί ταλαντωτές, ανεξάρτητα από την συχνότητα τους, συμμετέχουν ισοδύναμα στην ολική ενέργεια, σε όλες τις θερμοκρασίες.

(9) Ο Planck έλυσε το κλασικό πρόβλημα της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος κάνοντας μια επαναστατική τομή, δεχόμενος ότι : οι δυνατές τιμές της ενέργειας, των

στασίμων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, και των ατομικών ταλαντωτών στα τοιχώματα της κοιλότητας, θα παίρνουν μόνο διάκριτες τιμές E_n , που θα δίνονται από τη σχέση :

$$E_n(\nu) = nh\nu, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

(10) Η σταθερά h που ο Planck εισήγαγε αποτελεί μια θεμελιώδη σταθερά της Φυσικής, η σημασία της οποίας είναι πολύ πιο γενική και μεγάλη, από το πρόβλημα του μέλανος σώματος και αγγίζει τα περισσότερα προβλήματα της σύγχρονης φυσικής.

(11) Η κβαντική θεωρία δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με την κλασική φυσική στο όριο $h \rightarrow 0$. Αυτή η αρχή είναι γνωστή σαν αρχή της αντιστοιχίας.

(12) Το όριο $h \rightarrow 0$ επιτυγχάνεται όταν $\frac{k_B T}{\nu} \rightarrow \infty$ δηλαδή για πολύ χαμηλές συχνότητες ή πολύ μεγάλες θερμοκρασίες (όταν $\nu \rightarrow 0$ ή $T \rightarrow \infty$) ή όταν $n \rightarrow \infty$, δηλαδή στο όριο των πολύ μεγάλων κβαντικών αριθμών

(13) Σε μακροσκοπικά συστήματα (όπως ένα συνηθισμένο εκκρεμές), σε αντίθεση με τα μικροσκοπικά συστήματα (όπως οι ατομικοί ταλαντωτές) η κβάντωση δεν έχει κάποια πρακτική συνέπεια, αφού οι αντίστοιχες ενέργειες και συχνότητες είναι τέτοιες ώστε $n \rightarrow \infty$.

(14) οι σημαντικότερες διαφορές (και ομοιότητες) της κλασικής και κβαντικής θεωρίας του μέλανος σώματος συνοψίζονται στον πίνακα 3.1


Μέρος Δεύτερο

Κεφάλαιο 5: Φωτόνιο, το σωματίο του φωτός.



Φως, περισσότερο Φως!

Εισαγωγή

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 3, η συνθήκη κβαντώσεως του Planck οδήγησε αβίαστα στην ερμηνεία του φάσματος του μέλανος σώματος. Ο Planck εισήγαγε την έννοια του φωτονίου, του κβάντου της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας (δηλαδή του φωτός). Όμως, ο Einstein ήταν εκείνος ο οποίος συνειδητοποίησε το βάθος και το πλάτος της νέας ιδέας⁴⁹ και ο οποίος θεμελίωσε την σωματιδιακή εικόνα, αναγορεύοντας το φωτόνιο σε σωματίο του φωτός. Το φωτόνιο, κατά γενική διεθνή σύμβαση παριστάνουμε με το σχήμα : , το οποίο θα μπορούσαμε να περιγράψουμε σαν μια κυματιστή (κατ' άλλους «κατσαρή») γραμμή με ένα βέλος, το οποίο δείχνει την κατεύθυνση διαδόσεως.

Η σωματιδιακή εικόνα του φωτός θα θεμελιωθεί πειραματικά στο επόμενο κεφάλαιο, όπου θα εξετάσουμε την αλληλεπίδραση των φωτονίων με την ύλη. Εκεί (στο κεφάλαιο

6) θα περιγράψουμε την ερμηνεία του *φωτοηλεκτρικού φαινομένου* που έδωσε πρώτος ο Einstein καθώς και την ερμηνεία πολλών άλλων φαινομένων (όπως το *φαινόμενο Compton*). Στο κεφάλαιο αυτό, ακολουθώντας τον Einstein, αλλά όχι κατ' ανάγκην και την ακριβή χρονολογική σειρά, θα παρουσιάσουμε θεωρητικά την εξέλιξη της σωματιδιακής ιδέας του φωτονίου. Θα αναπτύξουμε, δηλαδή, και θα γενικεύσουμε παραπέρα την σωματιδιακή εικόνα του φωτός. Όπως θα δούμε, οι χαρακτηριστικές ιδιότητες του φωτονίου στην πλειοψηφία τους είναι συνδυασμός των κβαντικών ιδεών με την *Θεωρία της Σχετικότητας*. Μας δίνεται λοιπόν η ευκαιρία, με έμμεσο τρόπο, για μια επιπλέον επαφή με την ειδική (και εν μέρη την γενική) θεωρία της Σχετικότητας.

Παράλληλα, θα αναφερθούμε σε μερικές «εξωτικές» ιδιότητες του φωτονίου που έχουν να κάνουν με την *μεγάλη έκρηξη* (big bang) καθώς και την *βαρυτική εκτροπή και μετατόπιση της συχνότητας των φωτονίων* λόγω της βαρυτικής έλξης που υφίστανται τα φωτόνια από σώματα με μεγάλη μάζα, όπως ο Ήλιος. Με αφορμή την βαρυτική έλξη των φωτονίων θα αναφερθούμε εν συντομία και στις *Μελανές οπές* (black holes). Τέλος, με αφορμή την αναφορά στη συμπεριφορά των φωτονίων μέσα σε υλικά μέσα, όπως τα κρυσταλλικά στερεά, θα «αγγίζουμε» μερικά θέματα από την *Κβαντική Οπτική*, τα οποία αναφέρονται κυρίως σε μη γραμμικά (μη-αρμονικά) φαινόμενα.

Πέρα από τις καθαρά σωματιδιακές ιδιότητες του φωτός, στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε επίσης τον τρόπο με τον οποίο συμβιβάζονται αυτές οι σωματιδιακές ιδιότητες με τις μέχρι τώρα γνωστές κυματικές ιδιότητες του φωτός (για παράδειγμα τα φαινόμενα συμβολής). Αυτή η φαινομενικά διττή υπόσταση του φωτός (σώματιο-κύμα) είναι γνωστή σαν αρχή του *δυϊσμού του φωτός* και είναι μέρος της γενικότερης *αρχής της συμπληρωματικότητας*.

Την αρχή του δυϊσμού, μπορούμε να την δούμε και κάτω από ένα διαφορετικό πρίσμα, σαν την αντιστοιχία της κλασικής (κυματικής) με την κβαντική (σωματιδιακή) εικόνα σε κάποιο όριο το οποίο καθορίζεται από την *αρχή της αντιστοιχίας*. Μια πρώτη έκφραση της αρχής της αντιστοιχίας συναντήσαμε στο κεφάλαιο 1 (δείτε την σύνοψη του υποκεφαλαίου 1.1) ενώ στο κεφάλαιο 3 (και 4) συναντήσαμε ειδικότερες μορφές τις (σχέσεις 3.92-3.97). Σ' αυτό το κεφάλαιο, το οποίο μαζί με το επόμενο αποτελούν ουσιαστικά μια στοιχειώδη εισαγωγή στην *Κβαντική Ηλεκτροδυναμική*, θέλουμε να δημιουργήσουμε ένα θεωρητικό και εννοιολογικό πλαίσιο για το κβάντο της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας και την διττή (όπως συνήθως λέγεται) υπόσταση του.

⁴⁹Μια εφαρμογή είδαμε ήδη στο μοντέλο Einstein για τις ειδικές θερμότητες των στερεών, στο κεφάλαιο 4.

Το ένθετο 5.1, στο οποίο συνοψίζονται οι ιδιότητες του φωτονίου, στο τέλος του κεφαλαίου, αποτελεί ταυτόχρονα μια ανακεφαλαίωση αλλά και ένα πρόλογο (ή περίληψη) για το επόμενο κεφάλαιο 6.

Περιεχόμενα του Κεφαλαίου

5.1 Η έννοια του φωτονίου

5.1.1 Εισαγωγή

5.1.2 Ιδιότητες μεμονωμένων φωτονίων

5.1.3 Στατιστικές ιδιότητες ενός μεγάλου πλήθους φωτονίων.

5.2 Δυϊσμός φωτονίου – ηλεκτρομαγνητικού κύματος

*5.3 Φωτόνια μέσα σε υλικά μέσα.

5.4 Ειδικό θέμα 1: : «Αργό Φως» , «Σταματημένο Φως»

5.5 Ειδικό θέμα 2: Τα φωτόνια από την μεγάλη έκρηξη – Ακτινοβολία υποβάθρου.

5.6 Ειδικό θέμα 3 Η μάζα του φωτονίου σαν μέτρο αδράνειας και βαρύτητας.

5.7 Ένθετο 1 : Σύνοψη των ιδιοτήτων των φωτονίων.

Τι μπορείτε να προσπεράσετε σε πρώτη ανάγνωση:

Τα ειδικά θέματα 5.4 , 5.5 και 5.6

Σε τι θα πρέπει να δώσετε ιδιαίτερη βαρύτητα:

Τα υποκεφάλαια 5.1 και 5.2

5.1 Η έννοια του φωτονίου

5.1.1 Εισαγωγή

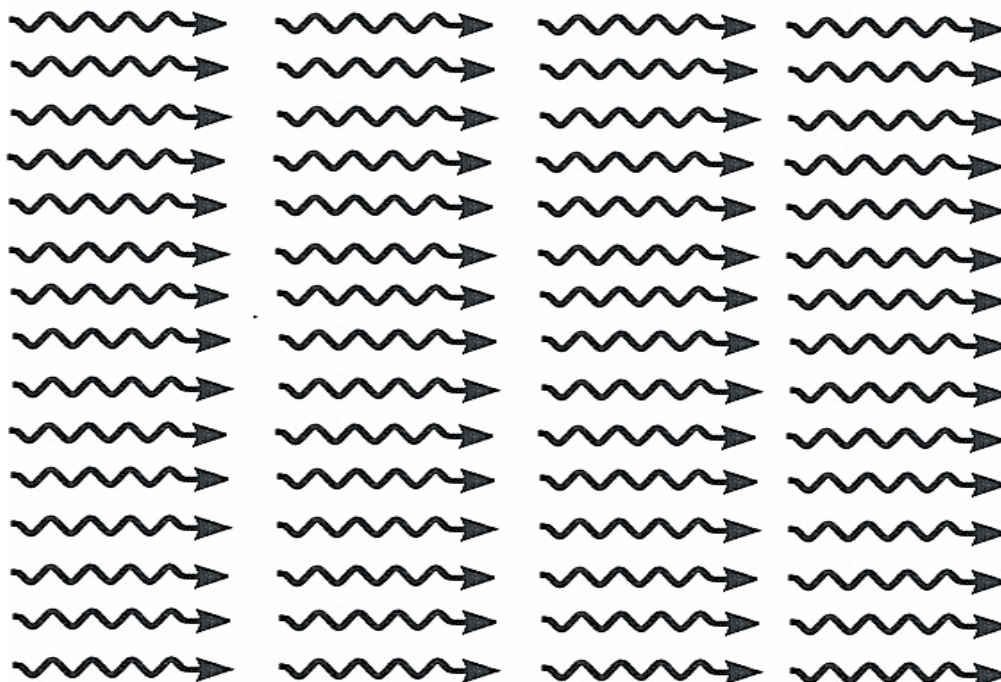
Όπως είδαμε πριν, οι κβαντικές ιδέες που ο Planck εισήγαγε, οδήγησαν στην πλήρη ερμηνεία του φάσματος της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος και άλλων συναφών φαινομένων. Αρχικά ο Planck πίστεψε ότι η κβάντωση είχε να κάνει μόνο με τις ταλαντώσεις των ατομικών ταλαντωτών στα τοιχώματα της κοιλότητας. Ο ίδιος θεώρησε

τα μεμονωμένα διάκριτα πακέτα ενέργειας, που ονόμασε κβάντα (quanta) ενέργειας, σαν κάποιο ειδικό χαρακτηριστικό (αναγκαίο κακό) της αλληλεπίδρασης της ακτινοβολίας (μέσα στην κοιλότητα) με την ύλη (ατομικούς ταλαντωτές) των τοιχωμάτων της κοιλότητας. Όμως αυτή η ασυνεχής και διάκριτη ροή ενέργειας (και ορμής) υπό μορφή μεμονωμένων ενεργειακών μονάδων, των κβάντων, πολύ λίγο θυμίζει τα συνηθισμένα κύματα, τα οποία μεταφέρουν ενέργεια και ορμή διάσπαρτα με οργανωμένο και συνεχή τρόπο.

Τα μεμονωμένα αυτά κβάντα, τα οποία από τη φύση τους είναι εντοπισμένα σε κάποια συγκεκριμένη περιοχή του χώρου σε κάθε χρονική στιγμή, μεταφέρουν «επάνω τους» την ενέργεια και ορμή της ακτινοβολίας, λίγο-πολύ κατά τον ίδιο συγκεκριμένο και «εντοπισμένο τρόπο» που τα συνηθισμένα σωματάρια μεταφέρουν ενέργεια και ορμή. Αυτό το αναγνώρισε πρώτος ο Einstein, που εισήγαγε αξιωματικά το **φωτόνιο** σαν το σωματίο του φωτός, γενικεύοντας ταυτόχρονα την ιδέα της κβάντωσης⁵⁰ και επεκτείνοντας την έννοια του κβάντου σε όλα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Σε άρθρο του⁵¹ για το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο το 1906 γράφει : **«Η ακτινοβολούμενη ενέργεια από μια σημειακή πηγή δεν κατανέμεται με συνεχή τρόπο, διαδιδόμενη σε μια όλο και μεγαλύτερη περιοχή του χώρου, αλλά, αντίθετα, αυτή η ενέργεια αποτελείται από ένα πεπερασμένο αριθμό χωρικά εντοπισμένων κβάντων τα οποία κινούμενα χωρίς να υποδιαιρούνται σε άλλα τμήματα, μπορούν μόνο να απορροφηθούν ή να δημιουργηθούν σαν ακέραιες μονάδες»**. Η υπόθεση του φωτονίου πήρε περισσότερο από 20 χρόνια για να ωριμάσει και να γίνει αποδεκτή στη σημερινή της μορφή, στην *Κβαντική Ηλεκτροδυναμική*. Σύμφωνα λοιπόν με την σωματιδιακή υπόσταση του φωτός, μια δέσμη φωτός (και γενικότερα ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας) αποτελείται από μια ροή φωτονίων , όπως δηλώνεται παραστατικά στο σχήμα 5.1.

⁵⁰ Όπως είδαμε νωρίτερα στο κεφάλαιο 4, ο Einstein ήταν επίσης ο πρώτος που χρησιμοποίησε την κβαντική ιδέα στο ομώνυμο μοντέλο για τις ειδικές θερμότητες των στερεών.

⁵¹ A. Einstein, Ann. d. Phys., **20**,199 (1906)



Σχήμα 5.1

Σχηματική παράσταση μιας φωτεινής δέσμης, που διαδίδεται από αριστερά προς τα δεξιά,
 υπό μορφήν (ασυνεχούς) ροής φωτονίων.

5.1.2 Ιδιότητες μεμονωμένων φωτονίων

Για να περιγράψουμε ποσοτικά και να εμπεδώσουμε την έννοια του φωτονίου, ας ανατρέξουμε στο κεφάλαιο 3 για την ακτινοβολία του μέλανος σώματος και ας επαναδιατυπώσουμε τα συμπεράσματα της κβαντικής θεωρίας του Planck χρησιμοποιώντας την έννοια του φωτονίου.

Ποιό είναι το νέο περιεχόμενο της (3.82) μετά την εισαγωγή της έννοιας του φωτονίου;

Και τί σημαίνει η (3.84);

Η απάντηση φαίνεται σχετικά εύκολη. Αφού το κάθε φωτόνιο έχει ενέργεια $h\nu$, **η (3.82) παριστάνει μια κατάσταση με ενέργεια $n h\nu$, στην οποία αντιστοιχούν n φωτόνια ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$). Ο αριθμός n , λοιπόν δηλώνει το πλήθος των φωτονίων⁵².**

⁵² Στην εύλογη ερώτηση «ποιών φωτονίων;» μια πρόχειρη απάντηση θα ήταν «των φωτονίων που θα μπορούσαν να εκπεμφθούν κατά την αποδιέγερσή της συγκεκριμένης κατάστασης (εφόσον έχει ήδη διεγερθεί) στην θεμελιώδη κατάσταση. Σε αντιδιαστολή με τα «εξωτερικά» παρατηρήσιμα φωτόνια, τα οποία εκπέμπονται ή απορροφώνται θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον όρο «δυνάμει φωτόνια» για τα φωτόνια στα οποία

Η (3.84) κατά συνέπεια, παριστάνει την μετάβαση από μία κατάσταση με $n+1$ φωτόνια σε μια κατάσταση με n φωτόνια. Δηλαδή, η (3.84) παριστάνει την δημιουργία ενός φωτονίου με συχνότητα ν και ενέργεια $E_\phi(\nu)$. Σ' αυτή την διεργασία έχουμε την εκπομπή ενός φωτονίου.

Απ' την άλλη μεριά, γράφοντας τη 3.84 στην μορφή: $E_n + h\nu = E_{n+1}$ (5.1) ,

βλέπουμε ότι ένα φωτόνιο μπορεί να εξαφανισθεί, προσφέροντας την ενέργεια του σ' ένα ανεξάρτητο ταλαντωτή διεγείροντάς τον από την κατάσταση με ενέργεια E_n στην κατάσταση με ενέργεια E_{n+1} . Σ' αυτή τη διεργασία έχουμε την απορρόφηση ενός φωτονίου από τον ταλαντωτή.

Τα φωτόνια δηλαδή, μπορούν να δημιουργούνται ή να καταστρέφονται ανάλογα με την προσφορά και ζήτηση ενέργειας. Αυτές οι δύο διεργασίες, εκπομπή και απορρόφηση φωτονίων είναι δύο θεμελιώδεις στοιχειώδεις διαδικασίες, στις οποίες όλες οι πιο σύνθετες διαδικασίες (οι οποίες έχουν να κάνουν με φωτόνια) μπορούν να αναχθούν.

Η δημιουργία και η απορρόφηση φωτονίων δεν περιορίζονται μόνο σε διαδικασίες που έχουν να κάνουν με ατομικούς ή άλλους ταλαντωτές. Οποιαδήποτε διαδικασία, η οποία χαρακτηρίζεται από την κατάλληλη προσφορά ή ζήτηση ενέργειας E , μπορεί να χρησιμεύσει για την δημιουργία ή καταστροφή (απορρόφηση) φωτονίων, αρκεί βεβαίως να μην παραβιάζονται άλλες θεμελιώδεις αρχές και νόμοι διατηρήσεως (ενέργειας, ορμής, φορτίου, κτλ). Έτσι, σήμερα γνωρίζουμε, με βάση την ισοδυναμία μάζας-ενέργειας, την οποία εισήγαγε η θεωρία της σχετικότητας, καθώς και την θεωρία ύλης-αντιύλης του Dirac, ότι μπορούν να συμβούν οι «εξωτικές» διαδικασίες, όπως η εξαύλωση ενός ζεύγους σωματιδίου-αντισωματιδίου με παράλληλη δημιουργία ενός ζεύγους φωτονίων. Η αντίστροφη διαδικασία περιλαμβάνει την καταστροφή ενός φωτονίου με παράλληλη δίδυμο γένεση ενός ζεύγους αντισωματιδίων. Το ηλεκτρόνιο με το ποζιτρόνιο (ή αντι-ηλεκτρόνιο) αποτελούν ένα συνηθισμένο ζευγάρι αντισωματιδίων. Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 6, και οι δύο διαδικασίες, εξαύλωση και δίδυμος γένεση, έχουν παρατηρηθεί πειραματικά.

αναφέρεται η σχέση 3.82. Εναλλακτικά, αντί του όρου *δυνάμει φωτόνια*, μπορούμε να χρησιμοποιούμε τον όρο «κβάντα» του ταλαντωτή.

Η ταυτόχρονη παρουσία ενός ζεύγους αντισωματιδίων είναι απόρροια των γενικών νόμων διατήρησης⁵³. Μέχρι τώρα η μόνη ιδιότητα του φωτονίου που αναφέραμε είναι η ενέργειά του:

$$E_{\phi} = h \nu \quad (5.2).$$

Η ενέργεια του φωτονίου E_{ϕ} , όπως είδαμε στην (3.84) προκύπτει εύκολα από την αρχή διατηρήσεως της ενέργειας, σαν διαφορά της αρχικής ($E_{n+1} = (n+1)h\nu$) από την τελική ($E_n = n h\nu$) ενέργεια του αντίστοιχου ταλαντωτή (βλέπε και σχήμα 3.6). Αν ανατρέξουμε και πάλι στο σχήμα 2.1 (του δευτέρου κεφαλαίου) βλέπουμε την μεγάλη γκάμα των ενεργειών E_{ϕ} (περίπου 20 τάξεις μεγέθους). Βλέπουμε επίσης ότι η ορατή περιοχή του φάσματος αντιστοιχεί σε ενέργειες φωτονίων της τάξεως μερικών ηλεκτρονιοβόλτ.

Η σχέση 5.2, εισάγοντας το μήκος κύματος λ αντί της συχνότητας ν , γράφεται⁵⁴:

$$E_{\phi} = \frac{hc}{\lambda} \quad (5.3).$$

Η (5.3) είναι πολλές φορές πιο εύχρηστη, ιδίως για ορατή ακτινοβολία ή ακτινοβολία ακόμη μικρότερου κύματος, όπου οι συχνότητες είναι πολύ μεγάλες (μεγαλύτερες από 10^{14} Hz) και δεν είναι εύκολο να μετρηθούν, ενώ τα μήκη κύματος μετρούνται σχετικά εύκολα (π.χ. με οπτικά φράγματα). Σ' αυτές τις περιπτώσεις είναι πιο βολικό να εκφράσουμε τα μήκη κύματος σε Ångstrom ($1\text{Å} = 10^{-10}\text{m}$) και τις ενέργειες σε ηλεκτρονιοβόλτ (eV). Σ' αυτές τις μονάδες η τιμή του αριθμητή στο δεύτερο μέλος της (5.3) γίνεται: $hc = 12,400 \text{ eV Å}$, και η (5.3) γράφεται:

$$E_{\phi} \text{ (eV)} = \frac{12400}{\lambda \text{ (Å)}} \quad (5.4).$$

Σαν παράδειγμα, εάν θεωρήσουμε ένα φωτόνιο στην ορατή περιοχή του φάσματος με ιώδες χρώμα, δηλαδή με $\lambda = 4000 \text{ Å}$, από την (5.4) παίρνουμε για την ενέργεια του φωτονίου:

$$E_{\phi} \approx 3 \text{ eV}.$$

Παράδειγμα 5.1

Ερώτηση Ποια είναι η ενεργειακή περιοχή των φωτονίων της ορατής περιοχής του φάσματος;

Απάντηση

⁵³ Για παράδειγμα, επειδή τα δύο αντισωματίδια έχουν αντίθετο φορτίο ενώ το φωτόνιο είναι ηλεκτρικά ουδέτερο, η διατήρηση φορτίου είναι πάντα εξασφαλισμένη.

⁵⁴ Με βάση τη σχέση $\lambda \nu = c$.

Το ορατό φάσμα, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.3 ορίζεται περίπου από την περιοχή μηκών κύματος μεταξύ 4000 Å (ιώδες) και 7500 Å (ερυθρό). Για $\lambda = 4000 \text{ \AA}$, η (5.4) δίνει, όπως είδαμε, $E_{\Phi} \approx 3 \text{ eV}$. Για $\lambda = 7500 \text{ \AA}$ έχουμε, ομοίως $E_{\Phi} \approx 1.7 \text{ eV}$

Η ενεργειακή περιοχή, λοιπόν, μερικών ηλεκτρονιοβόλτ ($1.7 - 3 \text{ eV}$) χαρακτηρίζει το ορατό φάσμα. Αυτό φαίνεται και στον πίνακα του σχήματος 2.1, στη στήλη $E_{\Phi}(\text{eV})$. Η **δραστηκότητα** των φωτονίων, λοιπόν, όπως αυτή εκδηλώνεται σε φωτοευαίσθητες χημικές αντιδράσεις, σαν την **φωτοσύνθεση** για παράδειγμα, είναι φθίνουσα συνάρτηση του μήκους κύματος του φωτός. Επίσης, έχει βρεθεί ότι το ανθρώπινο μάτι είναι ευαίσθητο σε πολύ μικρό αριθμό φωτονίων της ορατής περιοχής του φάσματος. Τα ραβδία και κωνία του αμφιβληστροειδούς αντιδρούν ακόμη και σε ένα μοναδικό φωτόνιο. Εντούτοις απαιτείται η σύγχρονη παρουσία περισσότερων του ενός φωτονίων (τουλάχιστον από 5 ως 10 και συνήθως περισσότερα) σε ένα ή περισσότερους γειτονικούς οπτικούς υποδοχείς, ώστε να δηλωθεί το οπτικό ερέθισμα στον εγκέφαλο ⁵⁵.

Το φωτόνιο όμως, πέρα από την ενέργεια, σαν συνηθισμένο σωματίο, θα πρέπει να έχει και τα υπόλοιπα σωματιδιακά χαρακτηριστικά, όπως μάζα και ορμή.

Όμως πόσο «συνηθισμένο» σωματίο θα είναι το φωτόνιο, όταν η ταχύτητά του θα πρέπει φυσιολογικά να είναι ίση με την ταχύτητα c του φωτός ;

Τότε το φωτόνιο, σαν κατ' εξοχήν «ρελατιβιστικό»⁵⁶ σωματίο, θα πρέπει, κατ' ανάγκη, να έχει μηδενική μάζα ηρεμίας, για να μην παραβιάζει την ειδική θεωρία της σχετικότητας. αφού η θεωρία της σχετικότητας δεν επιτρέπει σε συνηθισμένα σωματάρια (με μάζα ηρεμίας διάφορη του μηδενός) να φτάσουν την ταχύτητα του φωτός. Άρα για την ταχύτητα v_{Φ} και τη μάζα ηρεμίας $m_{0\Phi}$ του φωτονίου θα έχουμε :

$$v_{\Phi} = c \text{ και } m_{0\Phi} = 0 \quad (5.5).$$

Η θεωρία της σχετικότητας μας βοηθάει να κατανοήσουμε, πως μπορεί το φωτόνιο με μάζα ηρεμίας μηδέν να έχει ορμή. Το μέτρο p της ορμής του φωτονίου προκύπτει από την (5.2) και από την σχέση :

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (5.6)$$

της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας, η οποία συνδέει την ενέργεια E με την ορμή p , ενός σώματος με μάζα ηρεμίας m_0 . Θέτοντας στην (5.6) $p = p_{\Phi}$ και $m_0 = 0$, βρίσκουμε:

⁵⁵ Η σύγχρονη σύμπτωση αρκετών φωτονίων είναι πολύ σημαντική, ώστε να μην ενοχλείται ο εγκέφαλος από τυχαία οπτικά σήματα.

⁵⁶ Με τον κάπως ξενόφερτο αυτό όρο υποδηλώνεται ότι η θεωρία της σχετικότητας (relativity theory) είναι απολύτως απαραίτητη, αφού το φωτόνιο δεν έχει απλά ταχύτητα που μπορεί να προσεγγίζει, αλλά που είναι ίση με την ταχύτητα του φωτός.

$$E_{\Phi} = p_{\Phi} c \quad (5.7),$$

$$\text{απ' όπου: } p_{\Phi} = \frac{E_{\Phi}}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (5.8).$$

Το γεγονός ότι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία μεταφέρει ενέργεια και ορμή είναι γνωστό από την Κλασική Φυσική και δεν είναι αποκλειστικά κβαντικό φαινόμενο (η σχέση $p_{\Phi} = \frac{E_{\Phi}}{c}$, ισχύει στην Κλασική Φυσική, με E_{Φ} και p_{Φ} , την ενέργεια και ορμή της ακτινοβολίας, αντίστοιχα). Όπως είναι επίσης γνωστό ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μεταφέρουν και στροφορμή.

Το διάνυσμα της ορμής \vec{p}_{Φ} έχει την διεύθυνση και φορά διαδόσεως του κύματος και είναι συγγραμμικό προς το κυματικό διάνυσμα (ή κυματόνισμα) \vec{k} . Επειδή, ως γνωστόν το μέτρο του κυματικού ανύσματος ισούται με $2\pi/\lambda$, η (5.8) γράφεται:

$$\vec{p}_{\Phi} = \hbar\vec{k} \quad (5.9).$$

Όμοια, η μάζα του φωτονίου m_{Φ} , προκύπτει από τη σχέση

$$E_{\Phi} = m_{\Phi}c^2 \quad (5.10) :$$

$$m_{\Phi} = \frac{E_{\Phi}}{c^2} \quad (5.11),$$

$$\text{ή} \quad m_{\Phi} = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{\hbar\omega}{c^2} = \frac{p_{\Phi}}{c} \quad (5.12).$$

Αφού το φωτόνιο έχει μάζα και ορμή θα πρέπει να περιμένουμε, σπρώχνοντας την σωματιδιακή ιδιότητα του φωτός στα άκρα, ότι μπορεί να υφίσταται βαρυτικές έλξεις και να «συγκρούεται» με άλλα σωμάτια. Πράγματι, και οι δύο αυτές προβλέψεις της Κβαντικής Θεωρίας επαληθεύονται πειραματικά (δείτε υποκεφάλαιο 5.6).

Θα πρέπει να ομολογήσουμε πως η σύλληψη της έννοιας του φωτονίου ως σημειακού σωματίου με μάζα και ορμή, το οποίο μπορεί να σκεδάζεται⁵⁷ από άλλα σωμάτια και να υφίσταται συνηθισμένες κρούσεις σωματιδιακού τύπου, οφείλεται κυρίως στον Α. Η. Compton. Ο Compton στην προσπάθεια του να ερμηνεύσει την σκέδαση των ακτίνων Χ από ελεύθερα ηλεκτρόνια το 1923, κατέληξε σ' αυτή την παραδοχή, σπρώχνοντας ταυτόχρονα πολύ πιο μακριά την αρχική υπόθεση του Einstein.

⁵⁷ Ο όρος σκέδαση (και σε μορφή ρήματος, σκεδάζω ή σκεδάζομαι) αποτελεί μια γενίκευση της απλής έννοιας της «κρούσης» και σημαίνει την αλλαγή διευσθσεως ενός σωματιδίου (του βλήματος) λόγω αλληλεπιδράσεως με ένα άλλο σωματίδιο (τον στόχο). Κατά την αλληλεπίδραση (μια ειδική μορφή της οποίας είναι η «μετωπική» κρούση) μεταφέρεται ενέργεια και ορμή στον «στόχο» από το «βλήμα».

Όπως είδαμε νωρίτερα, πέρα από τις σωματιδιακές ιδιότητες σκεδάσεως, τα φωτόνια μπορούν να δημιουργούνται ή να καταστρέφονται, όταν η ακτινοβολία εκπέμπεται ή απορροφάται. Θα πρέπει επιπλέον να παρατηρήσουμε ότι, σε αντίθεση με τα συνηθισμένα (ατομικά ή υποατομικά) σωματίδια, οι χαρακτηριστικές ιδιότητες του φωτονίου μεταβάλλονται με το μήκος κύματος λ (ή με την συχνότητα ν). Έτσι, *όταν ένα φωτόνιο υφίσταται κρούσεις ή αλληλεπιδράσεις ώστε να κερδίζει ή να χάνει ενέργεια, τότε μεταβάλλεται και το μήκος κύματός του, λ (ή η συχνότητα του ν). Αλλάζει, δηλαδή το χρώμα του. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να ερμηνευθεί, με βάση τις δύο στοιχειώδεις διεργασίες, σαν την απορρόφηση του φωτονίου μήκους κύματος λ και την επανεκπομπή του με μήκος κύματος λ' .*

Όλες αυτές οι «σωματιδιακές ιδιότητες» του φωτονίου, οι οποίες μπορούν να ελεγχθούν πειραματικά, γίνονται περισσότερο κατανοητές κατά την εφαρμογή τους σε συγκεκριμένα φαινόμενα, όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 6. Για παράδειγμα, ο Einstein χρησιμοποιώντας τα σωματιδιακά χαρακτηριστικά του φωτονίου, εξήγησε για πρώτη φορά το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο και τιμήθηκε με το βραβείο Nobel Φυσικής του 1921 για αυτή του την συμβολή⁵⁸. Πέρα από το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, που ιστορικά αποτελεί την πρώτη πειραματική απόδειξη για την σωματιδιακή υφή του φωτός, υπάρχουν και άλλα φαινόμενα (όπως π.χ. το φαινόμενο Compton) που καθιέρωσαν αναμφισβήτητα την σωματιδιακή εικόνα του φωτονίου. Τα φαινόμενα αυτά θα εξετάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

5.1.3 Στατιστικές ιδιότητες ενός μεγάλου πλήθους φωτονίων

Πέρα από τα χαρακτηριστικά των μεμονωμένων φωτονίων, στην ακτινοβολία του μέλανος σώματος και σε άλλα ανάλογα φαινόμενα, μας ενδιαφέρουν οι στατιστικές ιδιότητες ενός μεγάλου πλήθους φωτονίων σε θερμοδυναμική ισορροπία. Μέσα σ' αυτό το πλαίσιο μπορούμε να αναρωτηθούμε, μετά την συζήτηση που προηγήθηκε για το φωτόνιο, «ποιο είναι το νέο περιεχόμενο της (3.80) στην οποία επικεντρώνεται η ριζική αλλαγή της κβαντικής θεωρίας ;

$$\text{Ας θυμηθούμε ότι η σχέση : } \langle E(\nu) \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (3.80)$$

⁵⁸ Είναι αξιοπερίεργο πως το βραβείο, 15 χρόνια αργότερα, δεν του δόθηκε για την θεωρία (θεωρίες) της σχετικότητας αλλά: ‘ for explaining the photoelectric effect and for his services to theoretical physics’.

δίνει τη μέση τιμή της ενέργειας ανά ταλαντωτή (ή ανά στάσιμο κύμα) για ένα μεγάλο πλήθος ταλαντωτών (στάσιμων κυμάτων) με συχνότητα ν σε θερμοδυναμική ισορροπία σε θερμοκρασία T . Επειδή κάθε στάσιμο ηλεκτρομαγνητικό κύμα (ηλεκτρομαγνητικός ταλαντωτής) συχνότητας ν , στην εικόνα των φωτονίων αντικαθίσταται από ένα πλήθος N_Φ φωτονίων ενέργειας $E = h\nu$, μπορούμε να γράψουμε την (3.80) στη μορφή της (3.82):

$$\langle E(\nu) \rangle = \langle N_\Phi \rangle h\nu = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (5.13) \quad .$$

Από την (5.13) είναι φανερό ότι **το μέσο πλήθος $\langle N_\Phi \rangle$ των φωτονίων για κάθε ένα στάσιμο κύμα (ή για κάθε ένα ταλαντωτή) δίνεται από τη σχέση:**

$$\left\{ \langle N_\Phi \rangle = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \right\} \quad (5.14) \quad \text{Μέσο Πλήθος φωτονίων σε θερμοκρασία } T.$$

Πολλαπλασιάζοντας κατάλληλα τον αριθμό $\langle N_\Phi \rangle$ στην (5.14) επί την πυκνότητα καταστάσεων $g(\nu)$, δηλαδή, επί τον αριθμό των στασίμων κυμάτων ανά μονάδα όγκου και περιοχή συχνότητας, βρίσκουμε το πλήθος των φωτονίων ανά μονάδα όγκου και εύρος συχνότητας, $\frac{dn_\Phi}{d\nu}$. Δηλαδή: $\frac{dn_\Phi}{d\nu} = \langle N_\Phi \rangle g(\nu)$ (5.15).

Μπορούμε να βρούμε και το συνολικό πλήθος των φωτονίων που εκπέμπονται ανά μονάδα όγκου, ολοκληρώνοντας την ποσότητα $\frac{dn_\Phi}{d\nu}$ πάνω σ' όλες τις συχνότητες .

Εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε (βλέπε άσκηση 5.6):

$$n_\Phi = \int_0^\infty \left(\frac{dn_\Phi}{d\nu} \right) d\nu = 8\pi \left(\frac{k_B T}{hc} \right)^3 \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^x - 1} = (3.17 \times 10^{19} \text{ (eV m)}^{-3} (k_B T)^3 \quad (5.16),$$

φωτόνια. Τι μας θυμίζει αυτή η σχέση από τις ειδικές θερμότητες;

Παράδειγμα 5.2

Ερώτηση Στην περίπτωση της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος, βρείτε μια σχέση μεταξύ της συναρτήσεως $u(\nu, T)$ και της ποσότητας $\frac{dn_\Phi}{d\nu}$.

Απάντηση Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας την (5.15) επί $h\nu$, βρίσκουμε:

$$\frac{dn_{\Phi}}{dv} = (1/hv) \langle N_{\Phi} \rangle hv g(v) = (1/hv) u(v, T) \quad (5.17).$$

Παράδειγμα 5.3

Ερώτηση Η συχνότητα ενός φωτονίου σχετίζεται (είναι ίδια) με την συχνότητα του αντίστοιχου στάσιμου κύματος της Κλασικής ανάλυσης του φάσματος του μέλανος σώματος. Με ποια ιδιότητα του στάσιμου κύματος σχετίζεται ο αριθμός $\langle N_{\Phi} \rangle$ στην (5.19);

Απάντηση Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου $E(x,t)$ του στασίμου κύματος σε μια δοσμένη θέση, μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, όπως φαίνεται από την σχέση

$$E(x,t) = E_0 \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (3.16),$$

εξαρτάται από το πλάτος E_0 , το οποίο σχετίζεται με την μέση ενέργεια του κύματος (η ενέργεια είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους). Στην κβαντική εικόνα, για δοσμένη συχνότητα, η (μέση) ενέργεια εξαρτάται σύμφωνα με την (5.13) από τον αριθμό $\langle N_{\Phi} \rangle$, ο οποίος δηλώνει το μέσο πλήθος των φωτονίων. **Κατά συνέπεια ο αριθμός $\langle N_{\Phi} \rangle$ σχετίζεται (είναι ανάλογος) με το τετράγωνο του πλάτους του κύματος:**

$$\langle N_{\Phi} \rangle \sim |E(x,t)|^2 \quad (5.18).$$

Αυτή είναι μια πολύ σημαντική και χρήσιμη σχέση, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε αρκετές φορές παρακάτω.

Ασκήσεις

5.1 Σε μια επιφάνεια 1 cm^2 προσπίπτουν κάθετα δύο δέσμες φωτονίων της ίδιας έντασης, μια δέσμη ακτίνων X με $\lambda = 1 \text{ \AA}$, και μια δέσμη ακτίνων γ με μήκος κύματος $\lambda = 0.01 \text{ \AA}$.

α) Βρείτε την ενέργεια των φωτονίων κάθε μιας από αυτές τις δέσμες.

β) Βρείτε τον λόγο του πλήθους των φωτονίων της μια δέσμης ως προς το πλήθος των φωτονίων της άλλης που προσπίπτουν στην επιφάνεια σε ένα δευτερόλεπτο.

5.2 Μια σημειακή φωτεινή πηγή ισχύος 40 mW εκπέμπει μονοχρωματικό φως μήκους κύματος 5000 \AA ιστροπικά προς όλες τις κατευθύνσεις. Πόσα φωτόνια θα εισέλθουν στην κόρη του οφθαλμού, διαμέτρου 2 mm , ενός παρατηρητή που βρίσκεται σε απόσταση 4 χιλιομέτρων από την πηγή ;

5.3 Σ' ένα σκοτεινό δωμάτιο σε θερμοκρασία $300 \text{ }^\circ\text{K}$ (θερμοκρασία δωματίου), βρείτε το πλήθος των φωτονίων με μήκος κύματος κοντά στα $10,000 \text{ \AA}$ που φτάνουν ανά δευτερόλεπτο σε μια κάθοδο εμβαδού 10^{-2} m^2 .

Υπόδειξη : Χρησιμοποιείτε τις σχέσεις της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος.

***5.4** Έστω n είναι το πλήθος των φωτονίων ανά μονάδα όγκου, σε ένα «δοχείο» που περιέχει ένα μεγάλο πλήθος από φωτόνια μήκους κύματος λ , καταναμημένα με ισοτροπικό και ομογενή τρόπο. Δείξτε ότι το πλήθος των φωτονίων που προσπίπτει σε μία επιφάνεια ΔS μέσα στο δοχείο, σε χρόνο Δt είναι $n \times (c/4) \times \Delta t \times \Delta S$

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα αποτελέσματα του εδαφίου 3.5.4 από το κεφάλαιο 3.

5.5 Για την ακτινοβολία του μέλανος σώματος, δείξτε ότι η σχέση της συνάρτησης $u(\lambda, T)$ και του αριθμού των φωτονίων ανά μονάδα όγκου και μήκους κύματος $dn/d\lambda$ είναι $u(\lambda, T) = (hc/\lambda) \times (dn/d\lambda)$.

5.6 Σε συνέχεια και με βάση την προηγούμενη άσκηση, δείξτε ότι ο ολικός αριθμός n των φωτονίων ανά μονάδα όγκου είναι :

$$n = 8\pi \left(\frac{k_B T}{hc} \right)^3 \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^x - 1} = (3.17 \times 10^{19}) (\text{eV m})^{-3} (k_B T)^3.$$

Ποιος ο λόγος του πλήθους των φωτονίων ανά μονάδα όγκου για ένα μέλαν σώμα σε θερμοκρασίες 3000 °K και 3 °K;

5.2 Δυϊσμός Φωτονίου – Ηλεκτρομαγνητικού Κύματος

Οι σωματιδιακές ιδιότητες του φωτονίου, που εκθέσαμε μέχρι τώρα στηρίζονται ανεπιφύλακτα και επαληθεύονται «κατά γράμμα» από μια μεγάλη γκάμα πειραματικών δεδομένων. Μερικά από αυτά τα πειράματα θα εκθέσουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Από την άλλη μεριά όμως, η όλη ιδέα της σωματιδιακής φύσεως του φωτός είναι ριζοσπαστικά αντίθετη με τη εμπειρία και τις μέχρι τώρα γνώσεις μας για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Και τούτο, διότι δεν φαίνεται να συμβιβάζεται με τα γνωστά κυματικά φαινόμενα συμβολής και περίθλασης του φωτός, τα οποία δεν μπορούμε προφανώς να αγνοήσουμε.

Υπάρχει λοιπόν μια θεμελιώδης αντίφαση ως προς την πραγματική φύση του φωτός (κυματική έναντι σωματιδιακής), η οποία θυμίζει την παλιά διαμάχη μεταξύ του Huygens και του Newton (Νεύτωνα) την οποία τελικά, φαίνεται να κέρδισε ο Νεύτων.

Να κάνουμε εδώ μια παρένθεση για να υπενθυμίσουμε ότι ο Ολλανδός Φυσικός Huygens, γνωστός για την ομώνυμη αρχή του στην Κυματική, ήταν ο πρώτος που υποστήριξε την κυματική φύση του φωτός. Αντίθετα ο Νεύτων πίστευε ότι το φως αποτελείται από μια συνεχή ροή σωματιδίων. Η ηλεκτρομαγνητική θεωρία του Maxwell (όπως μπορούμε να

δούμε και στο βιβλίο «Ταλαντώσεις και Κύματα» του συγγραφέως) έδειξε χωρίς καμία αμφιβολία ότι το φως αποτελείται από ηλεκτρομαγνητικά κύματα των οποίων η ταχύτητα προέκυψε ίση προς την ταχύτητα του φωτός. Το είδος και η μορφή των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στον ελεύθερο χώρο δίνεται στο σχήμα 5.2. Φαίνεται λοιπόν πως βρισκόμαστε ξανά σε ένα ακόμα (διαφορετικό αλλά επαναλαμβανόμενο) κύκλο επιχειρημάτων, αλλά και αντεπιχειρημάτων, αφού υπάρχουν μια σειρά από αναπάντητα ερωτηματικά:

Είναι σωστή η σωματιδιακή άποψη για το φως ;

Εάν το φωτόνιο είναι ένα κλασικό σωματίο τι ρόλο παίζει η συχνότητα στη (5.2) και το μήκος κύματος στη (5.3) ;

Ποιες είναι διαστάσεις ενός φωτονίου ; Έλκεται (και πως) από το πεδίο βαρύτητας ;

Και τι γίνεται με τα φαινόμενα συμβολής και περίθλασης ;

Τελικά τι είναι το φως ; Μπορεί να είναι πότε σωματίο και πότε κύμα ;

Μπορεί να είναι ταυτόχρονα σωματίο και κύμα ; Ή ούτε σωματίο ούτε κύμα ;

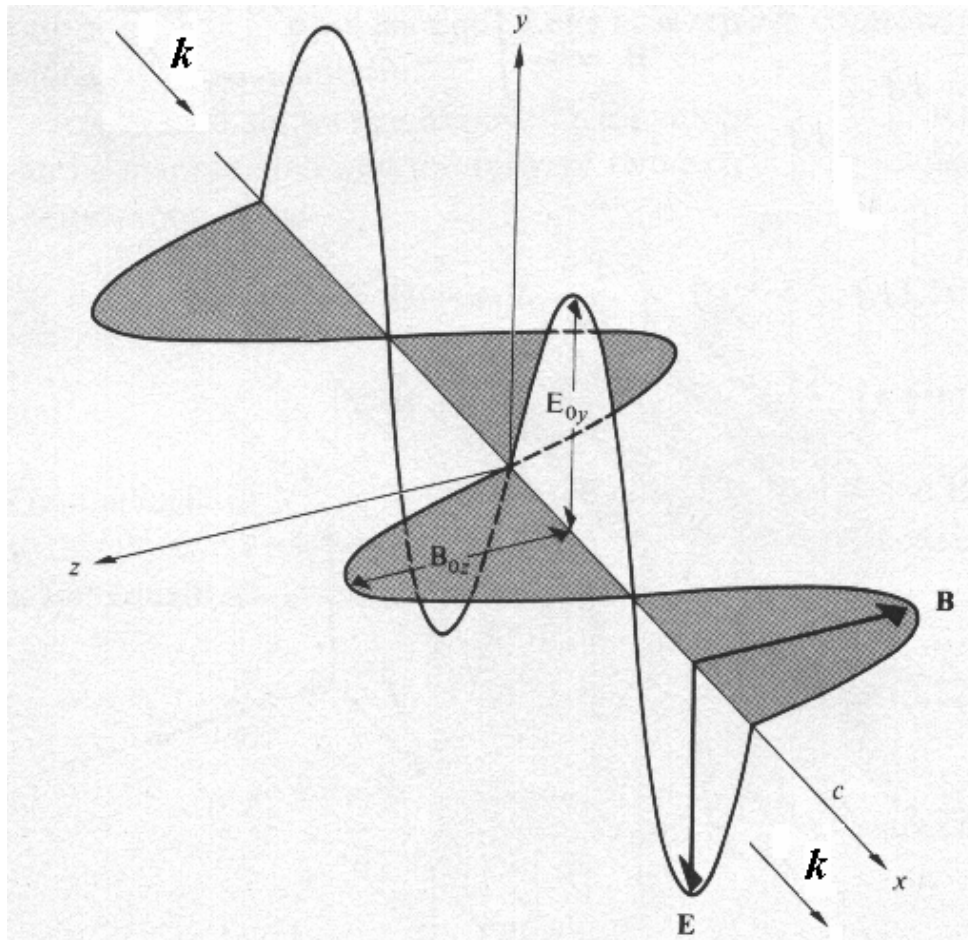
Μήπως, τέλος πάντων, έχει κάποια βάση ο παλιός αφορισμός, ότι « το φως είναι κύμα Δευτέρα, Τετάρτη και Παρασκευή. και σωματίο Τρίτη, Πέμπτη και Σάββατο, ενώ την Κυριακή αργεί » ;...

Ανεξάρτητα από την ατομική αίσθηση του χιούμορ, είναι μάλλον προφανές πως πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψη η ιδέα ότι το φως δεν είναι ούτε ένα καθαρά κλασικό κυματικό φαινόμενο, ούτε απλά μια συνεχής ροή συνηθισμένων σωματιδίων, που κινείται κλασικά από το ένα σημείο στο άλλο. Και τούτο γιατί κατά την αλληλεπίδραση του φωτός με την ύλη, είναι απαραίτητη η έννοια ενός εντοπισμένου σωματιδίου, του φωτονίου, ενώ απ την άλλη μεριά μας χρειάζεται η κυματική θεωρία για τα φαινόμενα συμβολής και περίθλασης. Έτσι χρειάζονται και οι δυο εικόνες με κάποιο συμπληρωματικό και όχι ανταγωνιστικό τρόπο για την σωστή περιγραφή των φαινομένων, που αναφέραμε. Η απάντηση, λοιπόν, σε ένα τέτοιο πρόβλημα που περιέχει μια τέτοιου μεγέθους αντίφαση δεν μπορεί να αμβλυνθεί εύκολα και «ανώδυνα». Χρειάστηκαν 20 περίπου χρόνια μετά την υπόθεση του Einstein για να δοθεί ικανοποιητική απάντηση σ' αυτά τα ερωτήματα. Μια τέτοια απάντηση, η οποία συνθέτει όλες τις αντιφάσεις, αλλά η οποία δεν είναι η τελική απάντηση, μπορεί να συνοψισθεί ως εξής :

Το φως συμπεριφέρεται, ανάλογα με το πείραμα, άλλοτε σαν σωματίο και άλλοτε σαν κύμα. Τα δύο αυτά χαρακτηριστικά δεν είναι αντίθετα αλλά συμπληρώνουν το ένα το άλλο. Όμως δεν είναι δυνατόν να καθορίσουμε ταυτόχρονα ή να χρησιμοποιήσουμε ταυτόχρονα (στο ίδιο πείραμα) τα σωματιδιακά και τα κυματικά χαρακτηριστικά. Το φως, λοιπόν, παρουσιάζει μια διττή υπόσταση.

Η διατύπωση αυτή εκφράζει τον «**Δυϊσμό Σωματίου – Κύματος**» και ταυτόχρονα την **αρχή της συμπληρωματικότητας** των δύο (σωματιδιακής και κυματικής) περιγραφών.

Η συμπεριφορά της «διχασμένης προσωπικότητας» για το φως, την ακτινοβολία γενικότερα, που μοιάζει να εκφράζει αυτή η αρχή δεν μας κάνει (προς το παρόν τουλάχιστον) να αισθανόμαστε και πολύ άνετα. Όμως, η ευρύτερη εποπτεία και ερμηνεία



Σχήμα 5.2

Το φως ως ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

Το φωτεινό κύμα αποτελείται από δύο αλληλένδετα και «κάθετα μεταξύ» τους κύματα.

$\underline{\mathbf{E}}$ και $\underline{\mathbf{B}}$ είναι αντίστοιχα τα διανύσματα του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου.

Το κυματόνισμα \underline{k} δείχνει την διεύθυνση και φορά του κύματος.

που προσδίνει, όπως θα δούμε αργότερα, η κβαντομηχανική θα αποκαταστήσει τις τωρινές ανησυχίες μας. Σ' αυτό θα βοηθήσει και η εφαρμογή αυτών των εννοιών στην πράξη και η γνωριμία με άλλα παρόμοια προβλήματα που θα διευκολύνουν προοδευτικά την «διανοητική γυμναστική» που απαιτείται. Η μεγαλύτερη δυσκολία που αντιμετωπίζουμε προέρχεται από την γλώσσα και τις έννοιες που χρησιμοποιούμε. Οι έννοιες αυτές είναι παρμένες από την καθημερινή εμπειρία η οποία τις περισσότερες φορές δεν αντικατοπτρίζεται στα φαινόμενα του μικροκόσμου. Έτσι, θα μπορούσαμε να πούμε, το φως είναι φως και μόνο για ευκολία χρησιμοποιούμε οικείους όρους, όπως σωματίο και κύμα.

Ίσως όμως, μπορούμε να αποκτήσουμε κάποια καλύτερη εποπτεία (πέρα απ' αυτή που θα προέλθει από τις εφαρμογές που θα ακολουθήσουν) αν αναλογισθούμε την **αρχή της αντιστοιχίας**, που αναπτύξαμε στην προηγούμενη ενότητα. Αυτή η αρχή μπορεί, από τη φύση της, να συνδέσει την κλασική κυματική εικόνα με την αντίστοιχη κβαντική ερμηνεία που βασίζεται στα σωματία του φωτός, τα φωτόνια. Σύμφωνα λοιπόν με αυτή την αρχή για πολύ μικρές συχνότητες, για πολύ μεγάλα μήκη κύματος δηλαδή, οι δύο περιγραφές πρακτικά συμπίπτουν. Μήπως αυτό μπορεί να σημαίνει ότι ακτινοβολία πολύ μεγάλου μήκους κύματος (πολύ μικρής συχνότητας) δεν παρουσιάζει (πρακτικά) σωματιδιακά χαρακτηριστικά;

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία στην περιοχή των ραδιοκυμάτων (βλέπε πίνακα σχήματος 2.1) με συχνότητα, έστω, 3×10^6 Hz. Σύμφωνα με την 5.2 (και όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1) η ενέργεια των φωτονίων που αντιστοιχεί σ' αυτή την συχνότητα είναι περίπου 10^{-8} eV. Μια τόσο μικρή ενέργεια είναι πρακτικά αδύνατο να ανιχνευθεί σαν ένα φωτόνιο. Αντίθετα, ένας ευαίσθητος ραδιοφωνικός δέκτης μπορεί να χρειάζεται τουλάχιστον 10^{10} τέτοια φωτόνια για να παράγει ένα αναγνωρίσιμο σήμα. Με τόσο πολλά φωτόνια να φτάνουν ανά δευτερόλεπτο στον δέκτη των ραδιοκυμάτων, είναι απίθανο να παρουσιαστεί κάποια ασυνέχεια στο σήμα, που να θυμίζει την διακριτότητα των φωτονίων. Έτσι, είναι πρακτικά αδύνατο να ανιχνεύσουμε ανεξάρτητα φωτόνια, αυτής της συχνότητας. Αν πάμε τώρα στο άλλο άκρο του φάσματος, στην περιοχή των ακτίνων X, οι ενέργειες των φωτονίων είναι της τάξεως των 10^5 eV και είναι εύκολο να ανιχνευθούν σαν ανεξάρτητα σωματία (των οποίων η ορμή είναι επίσης μεγάλη) και έτσι υπερισχύει η σωματιδιακή εικόνα. Στις ενδιάμεσες

περιοχές, όπως η ορατή, συνυπάρχουν και τα σωματιδιακά και τα κυματικά χαρακτηριστικά.

Αυτά τα φαινόμενα μπορούμε να τα δούμε και από μια άλλη, λιγότερο αυστηρή, σκοπιά. Ας φανταστούμε προς στιγμή ότι θέλουμε να απαντήσουμε διαισθητικά στην ερώτηση για τις διαστάσεις του φωτονίου. Αν θέλαμε, ντε και καλά, να δώσουμε κάποια, έστω μη αυστηρή, απάντηση, θα μπορούσαμε να σκεφθούμε με βάση διαστατικά επιχειρήματα (σαν κι αυτά που χρησιμοποιήσαμε νωρίτερα για να βρούμε την μορφή της συνάρτησης $u(v,T)$ στο εδάφιο 3.3) ότι το μόνο χαρακτηριστικό μήκος στην περιγραφή του φωτονίου είναι το μήκος κύματος λ . Έτσι θα μπορούσαμε να πούμε ότι «το μήκος» του φωτονίου θα έπρεπε να είναι της τάξεως μεγέθους του μήκους κύματος ή, αλλιώς, η περιοχή εντοπισμού (της ενέργειας και ορμής) του φωτονίου είναι ανάλογη του μήκους κύματος. Απ' αυτή τη σκοπιά βλέπουμε ότι στην περίπτωση της ακτινοβολίας με συχνότητα 3×10^6 Hz η περιοχή εντοπισμού της ενέργειας και ορμής είναι της τάξεως των 100 μέτρων, που είναι πρακτικά άπειρη σε σχέση με τις ατομικές διαστάσεις (10^{-10} m). Μια τέτοια εικόνα προφανώς δεν ανταποκρίνεται σε εντοπισμένα σωματίδια που «κουβαλούν» την ενέργεια και ορμή επάνω τους. Αντίθετα στην περιοχή των σκληρών ακτίνων X, με ενέργεια 10^5 eV, το αντίστοιχο μήκος εντοπισμού είναι της τάξεως των 10^{-11} m και η σωματιδιακή εικόνα είναι σαφώς πιο κατάλληλη, αφού ένα σωματίδιο με τυπικές διαστάσεις της τάξεως των 10^{-11} m είναι αποδεκτό χωρίς ενδιασμό. Έχοντας συσχετίσει κατά κάποιο τρόπο τον «εντοπισμό» των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων με την αρχή της συμπληρωματικότητας, μπορούμε να αναλογιστούμε το θεώρημα εύρους ζώνης ή σχέση αβεβαιότητας από την Κυματική (βλέπε κεφάλαιο 7, «Ταλαντώσεις και Κύματα», Α. Ζδέτσης) στο κεφάλαιο 7 για εντοπισμό των κλασικών κυμάτων. Το θεώρημα εύρους ζώνης (σχέση αβεβαιότητας) συνδέει γενικά τον εντοπισμό ενός «κυματοπακέτου» στον χώρο με την αντίστοιχη διασπορά του μήκους κύματος. Προκύπτει τότε ένα εύλογο ερώτημα-υπόθεση για **σύνδεση της αρχής της συμπληρωματικότητας με τη σχέση αβεβαιότητας**. Κάτι τέτοιο, όπως θα δούμε σε επόμενα κεφάλαια είναι, όχι μόνο εφικτό, αλλά και αναγκαίο για την πληρέστερη κατανόηση της έννοιας του δυϊσμού και της συμπληρωματικότητας. Στο μεταξύ ας επιχειρήσουμε να επικεντρώσουμε την προσοχή μας στην ενδιάμεση περιοχή, όπου, ανάλογα με το πείραμα (ανάλογα με τις χαρακτηριστικές διαστάσεις και την ενεργειακή ευαισθησία της συσκευής), η μια ή η άλλη από τις δύο εναλλακτικές εικόνες (σωμάτιο ή κύμα) μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

Στην ενδιάμεση ορατή περιοχή, όπως ο Einstein πρώτος παρατήρησε, τα συνηθισμένα πειράματα συμβολής στην ορατή περιοχή του φάσματος περιλαμβάνουν ένα πολύ μεγάλο πλήθος σωματιδίων (φωτονίων). Αυτό βρίσκεται και σε συμφωνία με την αρχή της αντιστοιχίας (βλέπε σχέση 3.83γ), αφού στην κλασική φυσική τα σωματάρια είναι σωματάρια και τα κύματα είναι κύματα. Σαν αποτέλεσμα του μεγάλου πλήθους των φωτονίων, **τα πειράματα αυτά δίνουν αποτελέσματα που είναι «μέσοι όροι» της συμπεριφοράς των ανεξαρτήτων σωματιδίων.**

Για να το δούμε αυτό καλύτερα ας θεωρήσουμε μια δέσμη μονοχρωματικού φωτός συχνότητας ν η οποία προσπίπτει κάθετα επάνω σε ένα πέτασμα (λευκή λεία επιφάνεια), εμβαδού ΔS . Επειδή η ενέργεια των φωτονίων μίας δέσμης μονοχρωματικού φωτός συχνότητας ν είναι κβαντισμένη, ο μόνος τρόπος για να αυξήσουμε την ενέργεια της δέσμης ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας (ένταση της δέσμης) είναι να αυξήσουμε τον αριθμό των φωτονίων (Δn) που φτάνουν ανά μονάδα χρόνου (Δt) σε μία μοναδιαία επιφάνεια του πετάσματος. Εάν N είναι αυτός ο αριθμός των φωτονίων ανά μονάδα χρόνου και επιφάνειας ($N = \Delta n / \Delta t \Delta S$) τότε η ένταση, I , της δέσμης θα είναι ίση προς:

$$I = N \times (h\nu) \quad (5.19)$$

Αυτό βέβαια με την προϋπόθεση ότι η ένταση της δέσμης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη πάνω στο πέτασμα. Εάν η ένταση δεν είναι ομοιόμορφη όπως συνήθως συμβαίνει τότε ο αριθμός N στην (5.19) παριστάνει τον μέσο αριθμό σωματιδίων. Προφανώς, όσο μεγαλύτερος γίνεται αυτός ο αριθμός N τόσο δυσκολότερα διακρίνονται οι τυχόν ανομοιογένειες επάνω στην οθόνη. Έτσι, για μεγάλη φωτεινή ένταση της δέσμης, ο αριθμός των φωτονίων που φτάνουν στο πέτασμα είναι τόσο μεγάλος ώστε να καλύπτει την διάκριτη και κοκκώδη μορφή της ακτινοβολίας τόσο που οι τυχαίες και μεμονωμένες αναλαμπές να ενώνονται και να φαίνονται σαν μία συνεχής και σταθερά φωτισμένη περιοχή.

Απ' την άλλη μεριά όταν η ένταση της δέσμης γίνει εξαιρετικά μικρή, τότε αντί για την ομοιόμορφα φωτισμένη περιοχή, που είχαμε με ισχυρή δέσμη, εμφανίζονται μεμονωμένες και διακριτές αναλαμπές κατανεμημένες με τυχαίο τρόπο επάνω στο πέτασμα. Κάθε μία τέτοια αναλαμπή αντιστοιχεί στην άφιξη ενός ξεχωριστού φωτονίου. Αν και δεν μπορούμε να καθορίσουμε ούτε τον χρόνο ούτε την θέση που ένα μοναδικό φωτόνιο θα χτυπήσει το πέτασμα, επειδή η κατανομή των φωτονίων είναι τελείως

τυχαία, εντούτοις, γνωρίζοντας την ένταση I της δέσμης, μπορούμε να προβλέψουμε από την (5.19) τον μέσο αριθμό φωτονίων τα οποία φτάνουν στο πέτασμα ανά μονάδα επιφανείας και ανά μονάδα χρόνου. Εάν βέβαια αντί πετάσματος χρησιμοποιήσουμε φωτογραφικό φιλμ και το εκθέσουμε για μεγάλο χρονικό διάστημα, θα παρατηρήσουμε ξανά μία ομοιόμορφη κατανομή της φωτεινότητας. Η όλη συζήτηση για την περιγραφή των διακυμάνσεων φωτεινότητας της δέσμης πάνω στο φιλμ ή το πέτασμα γίνεται πιο παραστατική εάν, αντί για μια απλή «λευκή» δέσμη φωτός, θεωρήσουμε μια ολόκληρη εικόνα, η οποία μέσα από κατάλληλο σύστημα φακών εστιάζεται επάνω στην πλάκα του φωτογραφικού φιλμ.

Από την κατασκευή της η φωτογραφική πλάκα αποτελείται από λεπτότατους κόκκους φωτοευαίσθητου υλικού, οι οποίοι ενεργοποιούνται με την πρόσπτωση των φωτονίων. Στον συνολικό (συνήθως πάρα πολύ μικρό) χρόνο που το φιλμ εκτίθεται στην ακτινοβολία της δέσμης ενεργοποιούνται μόνο οι κόκκοι στους οποίους έχει επιδράσει τουλάχιστον ένα φωτόνιο. Όπου δεν έχει προσπέσει κανένα φωτόνιο θα υπάρξει μαύρη περιοχή στην τελική φωτογραφία. Έτσι η κατανομή της φωτεινότητας στην τελική φωτογραφία είναι ανάλογος του αριθμού των φωτονίων που προσπίπτουν σε κάθε σημείο της πλάκας μέσα στον (πολύ μικρό) χρόνο εκθέσεως του φιλμ.



Σχήμα 5.3

Η διαδοχική μεταβολή της ποιότητας μίας φωτογραφικής εικόνας καθώς αυξάνεται ο αριθμός των φωτονίων τα οποία συνεισφέρουν στον σχηματισμό της.

Το πλήθος των φωτονίων από εικόνα σε εικόνα μεταβάλλεται λογαριθμικά. Ο αριθμός των φωτονίων στην εικόνα (α) είναι περίπου 3×10^3 ενώ στην εικόνα (f) είναι περίπου 3×10^7 .

Εάν λοιπόν μεταβάλλουμε τον αριθμόν των φωτονίων της δέσμης, που συνεισφέρουν στον σχηματισμό μιας φωτογραφικής εικόνας, μεταβάλλοντας την ένταση της δέσμης (ή του χρόνου εκθέσεως του φιλμ στο φως της δέσμης), θα έχουμε φωτογραφίες μεταβλητής ποιότητας. Αυτό φαίνεται καθαρά στις εικόνες του σχήματος 5.3. Βλέπουμε λοιπόν πολύ καθαρά, την μεταβολή από μία κοκκώδη και ασαφή εικόνα σε μία καθαρή και φαινομενικά συνεχή εικόνα, καθώς μεταβάλλεται ο αριθμός των σωματιδίων (φωτονίων). Το γεγονός αυτό δείχνει ότι **η αντιστοιχία ή μη της κβαντικής (κοκκώδους) και της κλασικής (συνεχούς) εικόνας εξαρτάται, εκτός από το μήκος κύματος και από την ευαισθησία της συσκευής** (του φιλμ, εν προκειμένω).

Το ίδιο φαινόμενο τώρα, με βάση την κυματική φύση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας περιγράφεται από το στιγμιαίο ηλεκτρικό πεδίο E σε κάθε σημείο του πετάσματος. Το μέτρο αυτού του ηλεκτρικού πεδίου καθορίζει την ένταση του φωτεινού κύματος σύμφωνα με την σχέση:⁵⁹

$$I = \epsilon_0 c E^2, \quad (5.20)$$

όπου κατά τα γνωστά c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό και ϵ_0 η διηλεκτρική σταθερά του κενού. Βλέπουμε τώρα πως η ένταση I είναι η ποσότητα - κλειδί που αποτελεί τον συνδετικό κρίκο ανάμεσα στις δύο διαφορετικές περιγραφές της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας επειδή έχει ακριβές νόημα και έκφραση τόσο στην σωματιδιακή (φωτόνια) όσο και στην κυματική (ηλεκτρομαγνητικά κύματα) περιγραφή. Συγκρίνοντας τις σχέσεις (5.19) και (5.20) βλέπουμε πως το τετράγωνο του μέτρου του στιγμιαίου ηλεκτρικού πεδίου E σε κάποιο σημείο του πετάσματος είναι ανάλογο του πλήθους N των φωτονίων που φτάνουν στο πέτασμα ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα

⁵⁹ Η σχέση (5.20) προέρχεται από τη γνωστή σχέση $I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E^2 + \frac{1}{2 \mu_0} c B^2$ που περιέχει την ηλεκτρική και

μαγνητική συνεισφορά στην ενέργεια. Επειδή όμως οι δύο συνεισφορές είναι ίσες, έχουμε την σχέση (5.20). Βέβαια εξίσου καλά θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο το μαγνητικό πεδίο, B αντί του ηλεκτρικού στην έκφραση της έντασης I : $I = c B^2 / \mu_0$, όπου μ_0 η μαγνητική διαπερατότητα του κενού. Αυτό δεν θα άλλαζε, προφανώς, τα επιχειρήματα αυτής της παραγράφου.

επιφανείας. Αυτή η παρατήρηση φαίνεται να επιβεβαιώνει την υπόθεση ότι οι κυματικές ιδιότητες είναι συνυφασμένες με ένα μεγάλο πλήθος σωματιδίων, όπως αρχικά υποψιάστηκε ο Einstein. Έτσι σαν μια ανοικτή δυνατότητα μπορούμε να διατυπώσουμε το εξής ερώτημα-υποψία ⁶⁰, το οποίο εν μέρει περιέχει την πλήρη απάντηση: ***Μήπως δηλαδή το φως αποτελείται τελικά από σωματίδια, αλλά το μεγάλο πλήθος απ' αυτά, που συνήθως υπάρχει στα συνήθη κλασικά πειράματα, κινείται έτσι ώστε κατά μέσο όρο, στατιστικά, να περιγράφεται από ένα (ηλεκτρομαγνητικό) κύμα;***

Η μέχρι τώρα συζήτηση δείχνει ότι η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα πρέπει να είναι καταφατική. Όμως σ' αυτή την περίπτωση, θα πρέπει να γίνει μια γενικότερη συζήτηση στην οποία θα πρέπει να τεθούν τα θεμέλια μια τέτοιας παραδοχής και θα απαντηθούν μια σειρά από άλλα σχετικά ερωτήματα που αφορούν την επί μέρους και την συνολική κίνηση ενός πλήθους (μιας δέσμης) φωτονίων. Αυτή η γενικότερη συζήτηση, η οποία θα δώσει την πλήρη και οριστική απάντηση, θα περιμένει μέχρι το τέλος του κεφαλαίου 9.

Ασκήσεις

5.7 Επιλέξατε ένα από τα δυο, σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) στις παρακάτω προτάσεις :

α) Η αρχή του Δυϊσμού για το φως διατυπώνεται ως εξής : « Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το φως, ανάλογα με το πείραμα, συμπεριφέρεται άλλοτε σαν σωματίο και άλλοτε σαν κύμα.

Σ Λ

β) Η αρχή της Συμπληρωματικότητας ορίζει ότι : «Τα σωματιδιακά και τα κυματικά χαρακτηριστικά δεν είναι αντίθετα αλλά συμπληρώνουν το ένα το άλλο ». Σ Λ

γ) Έτσι μπορούμε ταυτόχρονα να χρησιμοποιήσουμε στο ίδιο πείραμα και τις δύο εικόνες, σωματιδιακή και κυματική, ώστε να κατανοήσουμε καλύτερα το φαινόμενο. Σ
Λ

δ) Η σύνδεση των δύο χαρακτηριστικών, μπορεί να κατανοηθεί καλύτερα με βάση την αρχή της αντιστοιχίας. Σ Λ

ε) Η αρχή της αντιστοιχίας προβλέπει ότι στο όριο του πολύ μεγάλου πλήθους φωτονίων η σωματιδιακή και η κυματική περιγραφή συμπίπτουν. Σ Λ

στ) Αυτό (το ε) συμβαίνει επειδή το φως αποτελείται από σωματίδια, αλλά το μεγάλο πλήθος απ' αυτά, που συνήθως υπάρχει στα συνήθη κλασικά πειράματα, συμπεριφέρεται έτσι ώστε κατά μέσο όρο, στατιστικά, να περιγράφεται από ένα κύμα. Σ Λ

⁶⁰ Όπως είπαμε και στην εισαγωγή αυτού του βιβλίου ο ΔΡΟΜΟΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΟΦΙΑ ΞΕΚΙΝΑΕΙ ΜΕ

ζ) Έτσι, (λόγω του ϵ και $\sigma\tau$) οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η κβαντική θεωρία δεν είναι κατάλληλη για την περιγραφή ενός μόνο σωματιδίου $\Sigma \quad \Lambda$

η) Έτσι, (λόγω του ϵ και $\sigma\tau$) οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η κλασική θεωρία δεν είναι κατάλληλη για την περιγραφή ενός μόνο σωματιδίου $\Sigma \quad \Lambda$

5.8 Σ' όσες από τις προτάσεις της προηγούμενης άσκησης έχετε σημειώσει την επιλογή Λ (λάθος), ξαναγράψτε τις αντίστοιχες προτάσεις, ώστε να είναι σωστές, κατά την γνώμη σας. Επεξηγήστε.

5.9 Το σχήμα 5.2 δείχνει ότι το ηλεκτρομαγνητικό κύμα, εκτός από την διεύθυνση διαδόσεως, η οποία καθορίζεται από το διάνυσμα \vec{k} , έχει και μια άλλη χαρακτηριστική διεύθυνση, η οποία καθορίζεται από το διάνυσμα πολώσεως, ή αλλιώς από το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου του κύματος (διεύθυνση του άξονα y στο σχήμα 5.2). Μπορείτε να φανταστείτε και να περιγράψετε, εάν υπάρχει, κάποιο χαρακτηριστικό διάνυσμα του φωτονίου το οποίο να αντιστοιχεί στο διάνυσμα πολώσεως;

*5.3 Φωτόνια μέσα σε υλικά μέσα⁶¹.

Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα του σχήματος 5.2, το οποίο περιλαμβάνει το ηλεκτρικό πεδίο E και το μαγνητικό πεδίο B , περιγράφεται μαθηματικά σε μία διάσταση (που χαρακτηρίζεται από την χωρική μεταβλητή x) από το σύστημα των κυματικών εξισώσεων

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (5.21).$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

Οι αριθμητικές των σταθερών ϵ_0 και μ_0 (ηλεκτρική και μαγνητική διαπερατότητα του κενού, αντίστοιχα) στο σύστημα SI (ή MKSA) είναι: $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nt}\cdot\text{m}^2$ και $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Nt}/\text{A}^2$.

Η ταχύτητα του κύματος, η οποία προκύπτει από τις (5.21) είναι η ταχύτητα του φωτός

$$\text{στο κενό } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.998 \times 10^8 \text{ m/sec} \quad (5.22),$$

από την οποία επιβεβαιώνεται ότι το φως είναι ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

ΑΠΟΡΙΕΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΛΛΗΛΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

⁶¹ Καλό είναι ο αναγνώστης που θα αποφασίσει να μελετήσει αυτό το εδάφιο να έχει συμβουλευθεί προηγουμένως τις ενότητες 6.6-6.9 του κεφαλαίου 6 του βιβλίου «Ταλαντώσεις και Κύματα», του Α. Ζδέτση (2003).

Οι κυματικές εξισώσεις (5.21) προήλθαν από τις εξισώσεις του Maxwell (οι οποίες αντιστοιχούν στον νόμο του Faraday και στον γενικευμένο νόμο του Ampere) και οι οποίες γράφονται (στην μία διάσταση)⁶² στον ελεύθερο χώρο ($\rho=0$, $J=0$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial x} &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \frac{\partial B}{\partial x} &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\end{aligned}\quad (5.23).$$

Οι ίδιες εξισώσεις μέσα σ' ένα ομογενές και ισοτροπικό διηλεκτρικό μέσο γράφονται

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial x} &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \frac{\partial B}{\partial x} &= -\mu \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}\end{aligned}\quad (5.24),$$

όπου ε και μ η ηλεκτρική και μαγνητική διαπερατότητα του μέσου. Δηλαδή βλέπουμε ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε μέσα στο υλικό την ηλεκτρική και μαγνητική διαπερατότητα του κενού ε_0 και μ_0 , με την ηλεκτρική και μαγνητική διαπερατότητα του μέσου ε και μ .

Έτσι στην θέση των εξισώσεων (5.21) θα έχουμε τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} &= \mu \varepsilon \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (5.25)$$

Οι (5.25) είναι και αυτές κυματικές εξισώσεις και περιγράφουν ηλεκτρομαγνητικά

κύματα με ταχύτητα διαδόσεως $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = c \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu}}$ (5.26).

Για τα περισσότερα υλικά που μας ενδιαφέρουν, τα οποία είναι πρακτικά μη μαγνητικά, μπορούμε να θέσουμε με πολύ μεγάλη ακρίβεια $\mu = \mu_0$, οπότε η (5.26) γίνεται:

$$v = c \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\kappa}} \quad (5.27).$$

όπου $\kappa \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$, η **σχετική διηλεκτρική σταθερά** του μέσου ($\varepsilon = \kappa \varepsilon_0$).

⁶² Δείτε για παράδειγμα το κεφάλαιο 10 στον «Ηλεκτρομαγνητισμό», Ν. Κυλάφης, εκδόσεις ΕΑΠ (2001) ή/και κεφάλαιο 6 του βιβλίου «Ταλαντώσεις και Κύματα», του Α. Ζδέτση (2003).

Στην περίπτωση που το ϵ είναι σταθερό (στατική διηλεκτρική σταθερά) έχουμε μια συνηθισμένη χαρακτηριστική κυματική εξίσωση με ταχύτητα που δίνεται από την (5.27) Ο

$$\text{λόγος των ταχυτήτων} \quad n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{\kappa} \quad (5.28)$$

ονομάζεται (απόλυτος) **δείκτης διαθλάσεως** του μέσου και είναι μεγαλύτερος από την μονάδα για όλα τα συνηθισμένα διηλεκτρικά.

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω η ταχύτητα ενός φωτονίου v_Φ μέσα σε ένα διηλεκτρικό

$$\text{μέσο θα είναι } v_\Phi = \frac{c}{n} \quad (5.29)$$

Επειδή όμως $v_\Phi = \frac{\omega}{k}$, αν παραστήσουμε με ω', k' (και v', λ' , αντίστοιχα) τις

χαρακτηριστικές ποσότητες ενός φωτονίου στο μέσο με δείκτη διαθλάσεως n , μπορούμε να βρούμε μια αντιστοιχία για τις ίδιες ποσότητες που θα είχε το ίδιο φωτόνιο στο κενό.

Για ένα ομογενές και ισότροπο μέσο, η αποδεκτή (και συνηθισμένη) αντιστοιχία είναι:

$$\begin{aligned} \omega' &\leftrightarrow \omega & , & & v' &\leftrightarrow v \\ k' &\leftrightarrow nk & , & & \lambda' &\leftrightarrow \frac{\lambda}{n} \end{aligned} \quad (5.30).$$

Δηλαδή η συχνότητα (γραμμική και γωνιακή) του φωτονίου στο μέσο (επιλέγουμε να) είναι ίδια με εκείνη στο κενό, ενώ το μήκος κύματος θα πρέπει να διαιρείται με (και ο κυματαριθμός να πολλαπλασιάζεται επί) n .

Σ' αυτό το σημείο, όμως, θα πρέπει να εξηγήσουμε ότι η περίπτωση ενός μεμονωμένου φωτονίου που κινείται σ' ένα ομογενές και ισότροπο μέσο, τις περισσότερες φορές, είναι μη ρεαλιστική και μη ακριβής, ιδιαίτερα για φωτόνια μικρού μήκους κύματος, όπως τα φωτόνια των ακτίνων X.

Μπορούμε να αναφέρουμε πολλούς και διάφορους λόγους για αυτή την «ανακρίβεια»:

(1) Σ' ένα μέσο συνήθως εισέρχεται μια δέσμη φωτονίων και όχι ένα μεμονωμένο φωτόνιο. Στις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις έχουμε ένα φωτεινό κυματοπαλμό πεπερασμένης έκτασης και διάρκειας, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.4. Η ταχύτητα του παλμού (στην συγκεκριμένη περίπτωση η ταχύτητα του φωτός) στο μέσο δεν είναι γνωστή φασική ταχύτητα (η ταχύτητα με την οποία μεταβάλλεται η φάση του κύματος) αλλά η ταχύτητα ομάδας με την οποία κινείται ο παλμός σαν σύνολο. Η ταχύτητα αυτή,

$$v_g, \text{ ονομάζεται ταχύτητα ομάδος και δίνεται από την σχέση } v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (5.31).$$

Αν πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρανομαστή με την σταθερά \hbar , βλέπουμε από τις σχέσεις (5.8) ότι η ταχύτητα ομάδος προσδιορίζεται από τον ρυθμό μεταβολής της ενέργειας ως προς την μεταβολή της ορμής καθενός από τα φωτόνια που συνιστούν τον φωτεινό κυματοπαλμό. Η ταχύτητα των φωτονίων στο μέσο ισούται με την φασική ταχύτητα

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = v \equiv c \quad (5.32).$$

Αντικαθιστώντας αυτή την τελευταία σχέση στην (5.31) βρίσκουμε:

$$v_g = v + k \frac{dv}{dk} \quad (5.33),$$

την ταχύτητα με την οποία ταξιδεύει το φως στο μέσο. Οι δύο ταχύτητες δεν είναι ίδιες

Η ταχύτητα v_g υπολογίζεται για $k = \langle k \rangle = k_0 = 2\pi/\lambda_0$.

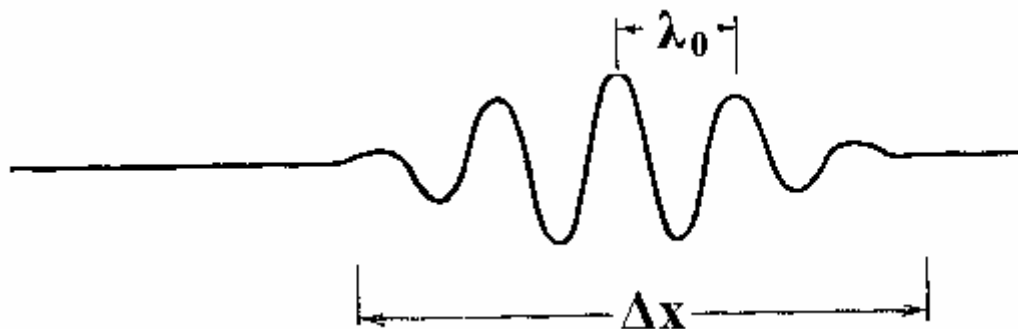
Για υλικά στα οποία ο δείκτης διαθλάσεως n εξαρτάται από το μήκος κύματος ή, ισοδύναμα, τον κυματαριθμό k , η σχέση για την φασική ταχύτητα γίνεται:

$$v_\phi(k) = n(k) \frac{\omega}{k}, \quad \text{ή} \quad \omega = \frac{1}{n} k v \quad (5.34)$$

Οπότε η (5.33) γράφεται:

$$v_g = \frac{v}{n} - \frac{k v}{n^2} \cdot \frac{dn(k)}{dk}, \quad \text{ή} \quad v_g = v \left(1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk} \right) \quad (5.35).$$

Για συνηθισμένα οπτικά μέσα, στις περιοχές της ομαλής διασποράς, ο δείκτης διαθλάσεως αυξάνεται με την συχνότητα και τον κυματαριθμό (ελαττώνεται με το μήκος κύματος), δηλαδή $\frac{dn}{dk} > 0$. Οπότε, βλέπουμε από την (5.35) ότι η ταχύτητα διαδόσεως του παλμού (η



Σχήμα 5.4

Ένας πεπερασμένος κυματοπαλμός με «κεντρικό» μήκος κύματος λ_0 και εύρος Δx .

Ο παλμός αυτός προέρχεται από ένα (άπειρο) συνεχές πλήθος αρμονικών κυμάτων .
Οι κυματαριθμοί των συνιστώντων κυμάτων κατανέμονται με συνεχή τρόπο γύρω από μια
κεντρική τιμή $k_0=2\pi/\lambda_0$, με εύρος Δk . Το εύρος Δk είναι περίπου ίσο προς το αντίστροφο
του εύρους Δx , Δηλαδή: $(\Delta x)(\Delta k) \cong 1$.

ταχύτητα ομάδας) σ' αυτές τις περιπτώσεις, είναι μικρότερη από την ταχύτητα του
κύματος (την φασική ταχύτητα). Είναι λοιπόν ξεκάθαρο ότι θα πρέπει να ορίσουμε και

έναν «ομαδικό δείκτη διαθλάσεως» n_g , από τη σχέση $n_g \equiv \frac{v}{v_g}$ (5.36),

για να χαρακτηρίζει την συμπεριφορά ολόκληρου του κυματοπαλμού.

Από την (5.35) βρίσκουμε : $\frac{1}{n_g} = \frac{1}{n} - \frac{k}{n^2} \cdot \frac{dn(k)}{dk}$ (5.37).

(2) Ένα φωτόνιο μικρού σχετικά μήκους κύματος, σαν ένα «στοιχειώδες σωματίο»
διαστάσεων της τάξεως του μήκους κύματος αλληλεπιδρά με τους μεμονωμένους
δομικούς λίθους του μέσου και υφίσταται σκεδάσεις και κρούσεις, μεταβάλλοντας την
ορμή ή/και την ενέργεια του, ανάλογα με το είδος της αλληλεπιδράσεως και του υλικού.
Για μεγαλύτερα μήκη κύματος, οι ανομοιογένειες του υλικού μέσου δεν γίνονται
«αισθητές», εφόσον η χωρική τους εξάπλωση είναι μικρότερη από το μήκος κύματος
(συνεχής προσέγγιση).

(3) Τα συνηθισμένα υλικά μέσα δεν είναι ούτε ομογενή ούτε ισότροπα. Για μεγάλα
μήκη κύματος όμως, μπορούν να συμπεριφέρονται σαν ομογενή και ισότροπα, οπότε
η προσέγγισή μας είναι σ' αυτή την περίπτωση ικανοποιητική.

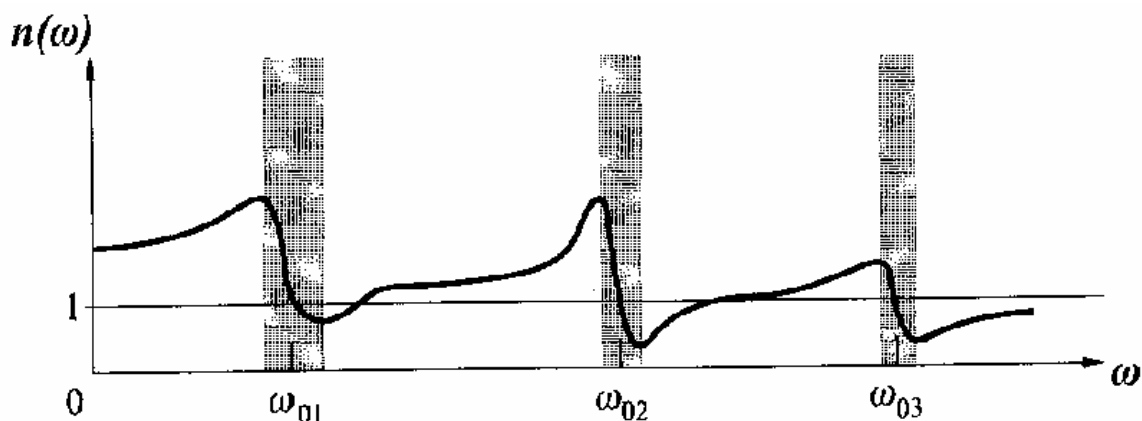
(4) Στα περισσότερα υλικά ο δείκτης διαθλάσεως εξαρτάται από το μήκος κύματος
(διασπορά). Για ένα υλικό με μια μόνο συχνότητα απορροφήσεως ω_0 (μέσα στην
περιοχή συχνοτήτων που εξετάζουμε) ο δείκτης διαθλάσεως δίνεται από τη σχέση:

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (5.38),$$

όπου m είναι η μάζα του ηλεκτρονίου και N το πλήθος των ατόμων του υλικού (ανά
μονάδα όγκου). Σε μια πιο ρεαλιστική προσέγγιση (όπου έχουμε περισσότερες
συχνότητες απορροφήσεως ω_0 και ηλεκτρόνια ανά άτομο, η (5.38) αντικαθίσταται
από την:

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \cdot \sum_j \frac{f_j}{(\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\gamma_j\omega)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (5.39).$$

Στην παραπάνω σχέση έχουμε χρησιμοποιήσει τον «βουβό» δείκτη αθροίσεως j (αποφύγαμε τον δείκτη i , προς αποφυγή συγχύσεως με τη φανταστική μονάδα i στον παρανομαστή του κλάσματος) για τις διάφορες συχνότητες απορροφήσεως. Ο συντελεστής γ_j , ο οποίος κυριαρχεί στο φάσμα κατά τον συντονισμό με την συχνότητα ω_{0j} δείχνει, ως γνωστόν (δείτε για παράδειγμα το υποκεφάλαιο 3.3 του τόμου «Ταλαντώσεις και Κύματα», του συγγραφέα) και το αντίστοιχο εύρος της καμπύλης απορρόφησης. Ο συντελεστής f_j είναι γνωστός σαν «σθένος ταλαντωτού» (*oscillator strength*) για τη συγκεκριμένη συχνότητα ταλάντωσης. Στο σχήμα 5.5 φαίνεται μια πρόχειρη γραφική παράσταση του δείκτη διαθλάσεως στην για $j=1,2$ και 3. Αυτές οι τιμές του j , για απλά άτομα συνήθως καλύπτουν ένα μεγάλο μέρος του φάσματος συχνοτήτων από το υπέρυθρο μέχρι τις ακτίνες X. Για συνηθισμένα υλικά, η συχνότητα ω_{01} ανήκει στην υπέρυθρο-ορατή περιοχή του φάσματος, η ω_{02} στην ορατή-υπεριώδη, ενώ η ω_{03} συνήθως βρίσκεται στην περιοχή μεταξύ υπεριώδους και ακτίνων X.



Σχήμα 5.5

Ο δείκτης διαθλάσεως, όπως προκύπτει από την (5.39) για $j=1,2,3$.

Οι σκιασμένες περιοχές δηλώνουν τις ζώνες απορροφήσεως.

Όπως αναφέραμε και πριν, τα άχρωμα και διαφανή υλικά (π.χ. γυαλιά, κρύσταλλα) έχουν τις χαρακτηριστικές τους συχνότητες έξω απ' την ορατή περιοχή του φάσματος. Τα περισσότερα άχρωμα γυαλιά έχουν τις χαρακτηριστικές τους συχνότητες ω_{0i} στην υπεριώδη περιοχή του φάσματος, όπου γίνονται αδιαφανή (άρα μας προστατεύουν από τις υπεριώδης ακτινοβολίες).

(5) Όπως βλέπουμε από την σχέση (5.39), σε αρκετά υλικά σε ειδικές (και μη) περιπτώσεις η συμπεριφορά του φωτός, η οποία προέρχεται από την συνεισφορά ενός εξαιρετικά μεγάλου πλήθους φωτονίων μέσα στο υλικό είναι πολύπλοκη και πολυσύνθετη. Ο δείκτης διαθλάσεως μπορεί να είναι μιγαδικός. Για παράδειγμα, στα μέταλλα, μέσα στα οποία υπάρχουν ελεύθερα ηλεκτρόνια, ο δείκτης διαθλάσεως είναι καθαρά φανταστικός. Τι σημαίνει αυτό; (την οριστική απάντηση θα έχουμε στον τόμο «Ταλαντώσεις και Κύματα»).

Σ' αυτό τον τόμο, παραπέρα φαινόμενα για την συμπεριφορά του φωτός μέσα σε «ειδικά προετοιμασμένα υλικά» θα εξετάσουμε συνοπτικά στο ειδικό θέμα 1.

***5.4 Ειδικό θέμα 1:**

«Γρήγορο Φως», «Αργό Φως», «Σταματημένο Φως»

Φυλακίζονται τα Φωτόνια ;

Δεν χρειάζεται να συζητήσουμε εδώ για την επίδραση και της επιπτώσεις της επιστήμης στην Κοινωνία και το αντίστροφο. Όμως, δεν είναι πλέον ασυνήθιστο κοινωνικό φαινόμενο να ασχολούνται καθημερινές εφημερίδες με νέα και εντυπωσιακά θέματα της επιστήμης. Έτσι, σε αρκετές εφημερίδες τον Ιανουάριο του 2001 υπήρχαν εντυπωσιακοί τίτλοι και σχόλια για την καινούργια ανακάλυψη ομάδας φυσικών στην Αγγλία (και την Αμερική ταυτόχρονα) για την «φυλάκιση» του φωτονίου (την ακινητοποίησή του δηλαδή), Είναι αυτό δυνατόν ;

Και εάν είναι, γιατί είναι τόσο σπουδαίο αυτό το φαινόμενο ;

Ας ξεκινήσουμε από το σχήμα 5.5 και τις σχέσεις (5.21)-(5.39) του προηγούμενου εδαφίου.

Από το σχήμα 5.5 διαπιστώνουμε ότι για συχνότητες μακριά από τις συχνότητες συντονισμού ο δείκτης διαθλάσεως αυξάνεται ελαφρά με την συχνότητα. Αυτού του είδους η διασπορά (εξάρτηση από την συχνότητα του δείκτη διαθλάσεως, με $\frac{dn}{d\omega} > 0$)

ονομάζεται ομαλή διασπορά ή ομαλός διασκεδασμός, προς διάκριση από την ανώμαλη διασπορά, η οποία χαρακτηρίζεται από (ραγδαία) ελάττωση του δείκτη διαθλάσεως με την συχνότητα, $\frac{dn}{d\omega} < 0$, μέχρι που γίνεται μικρότερος από την μονάδα

(ταχύτητα φάσεως μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός στο κενό). Βλέπουμε ότι ανώμαλη διασπορά έχουμε γύρω από τις συχνότητες συντονισμού (σκιασμένη περιοχή στο σχήμα 6.15) δηλαδή, στην περιοχή του συντονισμού απορροφήσεως ή αλλιώς

μέσα στις ζώνες απορροφήσεως. Επειδή όλα τα υλικά έχουν κάποιες ζώνες (συχνότητες) απορροφήσεως σε κάποια περιοχή του φάσματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, ο όρος «ανώμαλη διασπορά» ίσως δεν είναι και τόσο επιτυχής, επειδή δεν συμβαίνει τίποτα «ανώμαλο». Αντίθετα, το μεγαλύτερο μέρος της ερευνητικής δραστηριότητας στην οπτική με σύγχρονα laser εστιάζεται στην «ανώμαλη» περιοχή. Ένας απ' τους κυριότερους λόγους είναι ότι οι ερευνητές, εκμεταλλεζόμενοι την ραγδαία μεταβολή του δείκτη διαθλάσεως και τα ισχυρά πεδία των laser, μπορούν να «σχεδιάσουν» και να προετοιμάσουν κατάλληλα υλικά ώστε να επιχειρήσουν να υπερκεράσουν την πρόκληση του ορίου της ταχύτητας του φωτός. Έτσι, έχουν αναφερθεί τα τελευταία χρόνια (γύρω και μετά το 2000) ταχύτητες του φωτός⁶³ σε «υλικά μέσα», οι οποίες είναι είτε μεγαλύτερες από την ταχύτητα του φωτός στο κενό, είτε μικρότερες από την ταχύτητα ενός συνηθισμένου αυτοκινήτου. Μιλάμε τότε για «γρήγορο» φως⁶⁴ (“fast” light) και «υπερφωτινές ταχύτητες» (superluminal velocities) ή για «αργό» φως⁶⁵ (“slow” light) αντίστοιχα. Σαν οριακή περίπτωση του αργού φωτός έχει αναφερθεί και «σταματημένο» φως⁶⁶ (“stopped” light). Αυτά όλα τα «εξωτικά» φαινόμενα, δεν αφορούν συνηθισμένα υλικά μέσα σε συνηθισμένες συνθήκες, αλλά εξαιρετικά ειδικές περιπτώσεις, στα όρια ακρίβειας ειδικά σχεδιασμένων συσκευών και συνθηκών. Στις περισσότερες περιπτώσεις, τα πειράματα, η ερμηνεία των οποίων δεν είναι πάντα μονοσήμαντη, αφορούν ομάδες ατόμων σε ειδική κατάσταση (π.χ. σε πολύ χαμηλή θερμοκρασία), παγιδευμένων με μαγνητικά πεδία και ντυμένων⁶⁷ (τροποποιημένων) με ισχυρή ακτινοβολία laser. Σ' αυτές τις περιπτώσεις, μη γραμμικά φαινόμενα, στα οποία δεν θα αναφερθούμε εδώ, παίζουν σημαντικό ρόλο. Θα πρέπει πάντως να σχολιάσουμε ότι οι φράσεις «σταματημένο» ή «ακινητοποιημένο» φως, αναφέρονται στην ελαχιστοποίηση, πρακτικά μέχρι μηδενισμού, της ταχύτητας v_g . Περισσότερα γι αυτό το θέμα, είναι έξω από τα πλαίσια αυτού του βιβλίου. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης θα πρέπει να ανατρέξει σε άλλες πηγές.

⁶³ Ταχύτητες ομάδας, όχι ταχύτητες φάσεως για τις οποίες δεν υπάρχει ουσιαστικό πρόβλημα (δείτε και εδάφιο 6.8.2 παρακάτω).

⁶⁴ “Nature”, **406**, 243 (2000).

⁶⁵ “Nature”, **397**, 559 (1999)

⁶⁶ Liu, C. *et al* “Nature” **409**, 490 (2001).

⁶⁷ Η αλληλεπίδραση σ' ένα πρόβλημα πολλών σωμάτων αντιστοιχεί στο «ντύσιμο» των σωμάτων. Με άλλα λόγια, οι ανεξάρτητες οντότητες του συστήματος δεν είναι τα αρχικά σώματα, αλλά τα τροποποιημένα («ντυμένα») από τις αλληλεπιδράσεις σωμάτια.

5.5 Ειδικό θέμα 2:*Τα φωτόνια από την μεγάλη έκρηξη – Ακτινοβολία υποβάθρου.**

Σύμφωνα με την θεωρία της «μεγάλης έκρηξης» (big bang), το Σύμπαν, ξεκινώντας από μηδενικές σχεδόν διαστάσεις (υλικό σημείο), συνεχώς διαστέλλεται. Καθώς διαστέλλεται, ψύχεται ταυτόχρονα, όπως ψύχεται ένα αέριο το οποίο εκτονώνεται αδιαβατικά. Υπάρχει μια ποικιλία από αδιαμφισβήτητα δεδομένα και φαινόμενα τα οποία συνηγορούν για το ότι η μεγάλη έκρηξη έλαβε χώρα πριν από 10-15 δισεκατομμύρια χρόνια. Αυτή είναι και η «ηλικία του Σύμπαντος». Στα αρχικά στάδια της διαστολής του Σύμπαντος, η θερμοκρασία του ήταν εξαιρετικά μεγάλη (εκατομμύρια βαθμών Κέλβιν), ώστε ήταν αδύνατον να σχηματιστούν άτομα, αφού η υπερβολικά μεγάλη ενέργεια των φωτονίων αποσπούσε τα ηλεκτρόνια που προσωρινά ενωνόντουσαν με τα πρωτόνια προς σχηματισμό ατόμων. Η ακτινοβολία (τα φωτόνια), η οποία αλληλεπιδρούσε με τα φορτισμένα σωματίδια της ύλης (π.χ. ηλεκτρόνια) παρέμενε σε θερμική ισορροπία (μέσα στον όγκο του Σύμπαντος). Σε τέτοιες υψηλές θερμοκρασίες, η μέση ενέργεια των φωτονίων της θερμικής ακτινοβολίας, η οποία εξ ορισμού ήταν ακτινοβολία μέλανος σώματος (αφού δεν υπήρχε ανακλώμενο φως από άλλες πηγές), ήταν αρκετές χιλιάδες ηλεκτρονιοβόλτ ($k_B T \gg 1 \text{ eV}$). Αυτή η τεράστια ενέργεια συσσωρευμένη σε πολύ μικρό (σχετικά) όγκο εμπόδιζε τον σχηματισμό σταθερών ουδέτερων ατόμων.⁶⁸ Η σύσταση λοιπόν του Σύμπαντος σ' αυτά τα αρχικά στάδια ήταν όπως ένα «πλάσμα», ένα αέριο από φορτισμένα (και ουδέτερα) ελεύθερα σωματίδια, και φωτόνια. Αφού δεν μπορούσαν να σχηματισθούν σταθερά άτομα, τα φωτόνια παρέμεναν παγιδευμένα και ταξίδευαν πολύ μικρές αποστάσεις μέχρι να σκεδαστούν ή να απορροφηθούν από τα ελεύθερα ηλεκτρόνια (κάτι παρόμοιο με τα φωτόνια που εισέρχονται σε ένα μέταλλο). Σαν αποτέλεσμα, παρόλο που υπήρχε ένα τεράστιο πλήθος φωτονίων, το Σύμπαν ήταν «αδιαφανές», αφού δεν υπήρχε καθαρή ροή φωτονίων προς καμία διεύθυνση. Με την πάροδο του χρόνου, καθώς το Σύμπαν ψυχότανε, τα σταθερά σωματίδια, όπως τα πρωτόνια και τα ηλεκτρόνια (τα οποία σχηματίστηκαν και από την διάσπαση άλλων ασταθών σωματίων) συνενώθηκαν ώστε να σχηματίσουν τελικά την ύλη όπως την γνωρίζουμε σήμερα. Για να συμβεί κάτι τέτοιο έπρεπε η θερμοκρασία του αερίου (του «πλάσματος») να ελαττωθεί αρκετά, ώστε η αντίστοιχη ενέργεια των

⁶⁸ Η ενέργεια των φωτονίων ήταν κατά πολύ μεγαλύτερη από την ενέργεια ιονισμού (13.6 eV) του ατόμου του υδρογόνου και άλλων ατόμων.

φωτονίων να γίνει μικρότερη από την ενέργεια ιονισμού των ατόμων. Αυτό συνέβη μερικές εκατοντάδες χιλιάδες ($10^5 - 10^6$) χρόνια μετά την μεγάλη έκρηξη. αργότερα. Σ' αυτή την εποχή η θερμοκρασία του Σύμπαντος έφτασε τους $3000 \text{ }^\circ\text{K}$ ($k_B T \cong \frac{1}{4} eV$) και άρχισαν να σχηματίζονται άτομα υδρογόνου. Τότε «φωτίστηκε» το Σύμπαν. Αφού δεν υπήρχαν πλέον ελεύθερα ηλεκτρόνια σε μεγάλες ποσότητες, τα φωτόνια μπορούσαν τότε να ταξιδεύουν σε μεγάλες αποστάσεις, όπως σήμερα. Τα φωτόνια λοιπόν που σχηματίστηκαν κατά την μεγάλη έκρηξη, άρχισαν τότε το ταξίδι τους προς όλες τις διευθύνσεις του Σύμπαντος, με τον ίδιο ρυθμό και ένταση (ισοτροπικά). Τα φωτόνια αυτά είχαν την εποχή εκείνη μια θερμική κατανομή φάσματος μέλανος σώματος, θερμοκρασίας $3000 \text{ }^\circ\text{K}$. Από τότε, το Σύμπαν έχει διασταλεί κατά ένα παράγοντα 10^3 και έχει ψυχθεί ακόμη περισσότερο. Τα φωτόνια με τα οποία ήταν γεμάτο Σύμπαν παρέμειναν μέχρι σήμερα, αλλά τα μήκη κύματός τους μεγάλωσαν πολύ με την διαστολή του σύμπαντος. Η ακτινοβολία του Σύμπαντος, με την οποία είναι γεμάτος όλος ο χώρος, υπολογίζεται θεωρητικά ότι έχει σήμερα ένα φάσμα μέλανος σώματος θερμοκρασίας 3°K περίπου (για την ακρίβεια $2.73 \text{ }^\circ\text{K}$). Αυτή η ακτινοβολία, η οποία οφείλεται στα «απομεινάρια» της μεγάλης έκρηξης και ονομάζεται **ακτινοβολία κοσμικού υποβάθρου** (*cosmic background radiation*) παρατηρήθηκε πειραματικά για πρώτη φορά το 1965. Όπως θα δούμε παρακάτω, καθένας από μας μπορεί εύκολα στο σπίτι του, χωρίς ιδιαίτερα επιστημονικά όργανα, να αντιληφθεί την ύπαρξη αυτής της ακτινοβολίας. Σύμφωνα με τον νόμο μετατοπίσεως του Wien το μήκος κύματος λ_{max} , το οποίο αντιστοιχεί στο μέγιστο της έντασης (άσκηση 5.9) είναι $\lambda_{max} = 0.001\text{m} = 1\text{mm}$ και αντιστοιχεί στην κατηγορία των μικροκυμάτων. Γι αυτό τον λόγο, η ακτινοβολία κοσμικού υποβάθρου ονομάζεται και **ακτινοβολία του ενός χιλιοστομέτρου** (*1 mm radiation*). Η ακτινοβολία κοσμικού υποβάθρου ανακαλύφθηκε τυχαία το 1965 από τους A. Penzias και R.W. Wilson, σε μήκος κύματος 73.5 mm , ενώ προσπαθούσαν να βρουν τρόπους να ελαχιστοποιήσουν τον θόρυβο σε μια μεγάλη δορυφορική κεραία. Παρόλο ότι προσπάθησαν να απαλλαγούν από τον «θόρυβο» στα 73.5 mm στρέφοντας την κεραία προς άλλες διευθύνσεις, το σήμα είχε την ίδια ένταση αμετάβλητη σε όλες τις διευθύνσεις. Το γεγονός αυτό οδήγησε τους ερευνητές να συμπεράνουν ότι η πηγή της ακτινοβολίας αυτής είναι ολόκληρο το Σύμπαν. Από την σχέση: $\rho_T(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$

(3.99), που συνδέει την κατανομή της έντασης $\rho_T(\lambda)$ με το μήκος κύματος, οι Penzias

και Wilson βρήκαν ότι η εν λόγω ακτινοβολία αντιστοιχεί σε θερμοκρασία μέλανος σώματος $3 \text{ }^\circ\text{K}$, σε πλήρη συμφωνία με τις θεωρητικές προβλέψεις για την ακτινοβολία κοσμικού υποβάθρου. Αργότερα, το 1990, σχεδιάστηκε και εκτοξεύθηκε ειδικός τεχνικός δορυφόρος στο διάστημα, για την λεπτομερή και ακριβή μέτρηση του φάσματος της ακτινοβολία κοσμικού υποβάθρου σε πολλά διαφορετικά μήκη κύματος. Στο σχήμα 5.6 φαίνονται τα αποτελέσματα των μετρήσεων για την φασματική πυκνότητα $u(\lambda, T)$ αυτού του δορυφόρου, ο οποίος ονομάστηκε COBE από τα αρχικά «Cosmic Background Explorer».

Τα αποτελέσματα αυτά δικαίωσαν πλήρως την υπόθεση της μεγάλης έκρηξης και της εναπομείνουσας ακτινοβολίας κοσμικού υποβάθρου. Η ένταση της ακτινοβολίας είναι ίδια προς όλες τις διευθύνσεις με ακρίβεια $1/10^6$. Νεώτερα δεδομένα από τον δορυφόρο COBE το 1992 έδειξαν κάποιες εξαιρετικά μικρές διακυμάνσεις τις έντασης προς ορισμένες διευθύνσεις. Η διερεύνηση αυτών των δεδομένων θα βοηθήσει την κατανόηση του σχηματισμού των πρώτων Γαλαξιών του Σύμπαντος. Στο σχήμα 5.7 δίνονται σε μεγέθυνση τα ίδια αποτελέσματα για την κατανομή της έντασης $\rho_T(\lambda)$. Όπως φαίνεται καθαρά και στα δύο σχήματα, έχουμε ένα τέλειο φάσμα μέλανος σώματος, θερμοκρασίας $2.735 \text{ }^\circ\text{K}$. Χρησιμοποιώντας αυτή τη θερμοκρασία και τη σχέση (5.16) βρίσκουμε τον αριθμό των φωτονίων n_ϕ από την μεγάλη έκρηξη ανά κυβικό μέτρο ίσον περίπου προς:

$$n_\phi = 4 \times 10^8 \text{ φωτόνια} / \text{m}^3 .$$

Δηλαδή 10^8 φωτόνια από την μεγάλη έκρηξη διαπερνούν το σώμα μας αυτή τη στιγμή. Δεν είναι εντυπωσιακό;

Δεν διατρέχουμε όμως κάποιο κίνδυνο, αφού η μέση ενέργεια ενός τέτοιου φωτονίου είναι περίπου ίση προς 0.0006 eV . Η ένταση αυτής της ακτινοβολίας είναι περίπου 5 τάξεις μικρότερη από την ένταση μιας κοινής λάμπας φωτισμού των 100W , όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε.

Πράγματι! Η Ολική ενέργεια των φωτονίων από την μεγάλη έκρηξη ανά μονάδα όγκου προκύπτει από τον νόμο του Boltzmann:

$$U_\phi = \int_0^\infty u(\lambda; T) d\lambda = \frac{\sigma}{c/4} T^4 = (4.73 \times 10^3 \text{ eV} / \text{m}^3 \text{ }^\circ\text{K}^4) T^4 \quad (5.40),$$

$$\text{για } T = 2.735 \text{ }^\circ\text{K} : U_\phi \cong 2.5 \times 10^5 \text{ eV} / \text{m}^3 .$$

Στην παραπάνω σχέση σ είναι η γνωστή σταθερά των Stefan-Boltzmann και c είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό.

Η πυκνότητα ενέργειας $U_{\Phi} \cong 2.5 \times 10^5 \text{ eV/m}^3$, είναι χοντρικά ίδια με την μέση ενεργειακή πυκνότητα του φωτός από τα άστρα του Γαλαξία μας.

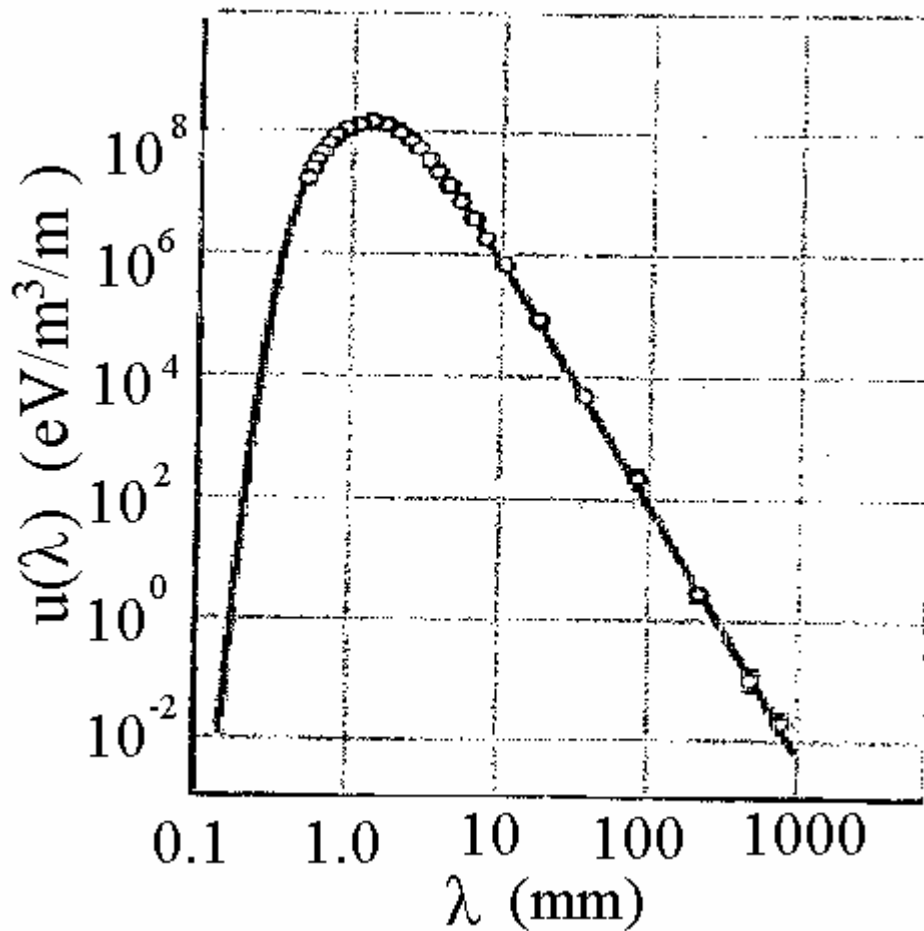
Η μέση ενέργεια των φωτονίων \bar{E}_{Φ} προκύπτει ίση προς: $\bar{E}_{\Phi} = \frac{U_{\Phi}}{n_{\Phi}} \cong 6.3 \times 10^{-4} \text{ eV}$.

Αν και φαίνεται απίστευτο, μπορούμε εύκολα να ανιχνεύσουμε τα φωτόνια της ακτινοβολίας κοσμικού υποβάθρου στο σπίτι μας με ένα κοινό δέκτη τηλεόρασης ή ένα ραδιόφωνο FM⁶⁹.

Το «χιόνι» στην τηλεόραση σε κάποιο κανάλι που δεν υπάρχει σήμα από κάποιον σταθμό, οφείλεται (εν μέρει) στον ηλεκτρομαγνητικό θόρυβο από τα (περίπου 10^8 ανά κυβικό μέτρο) φωτόνια της μεγάλης έκρηξης που περιβάλλουν την κεραία από όλες τις διευθύνσεις.

Ορισμένα φωτόνια προέρχονται από την ίδια την κεραία, ένα μέρος όμως των φωτονίων προέρχεται από τα απομεινάρια της μεγάλης έκρηξης. Τον ίδιο θόρυβο, υπό μορφή σφυρίγματος, μπορούμε να ανιχνεύσουμε και με ένα ραδιόφωνο στην άκρη-άκρη της ζώνης των FM, κοντά στην συχνότητα των 108 MHz. Είναι πράγματι απίστευτο!

⁶⁹ Δείτε το κεφάλαιο «Η Μεγάλη Έκρηξη στην οθόνη σας» από το βιβλίο του Jay Ingram, «Η επιστήμη της Καθημερινής Ζωής», Εκδόσεις ΚΑΤΟΠΤΡΟ, 1992.



Σχήμα 5.6

Η φασματική πυκνότητα $u(\lambda; T)$ της ακτινοβολίας κοσμικού υποβάθρου από μετρήσεις του δορυφόρου COBE

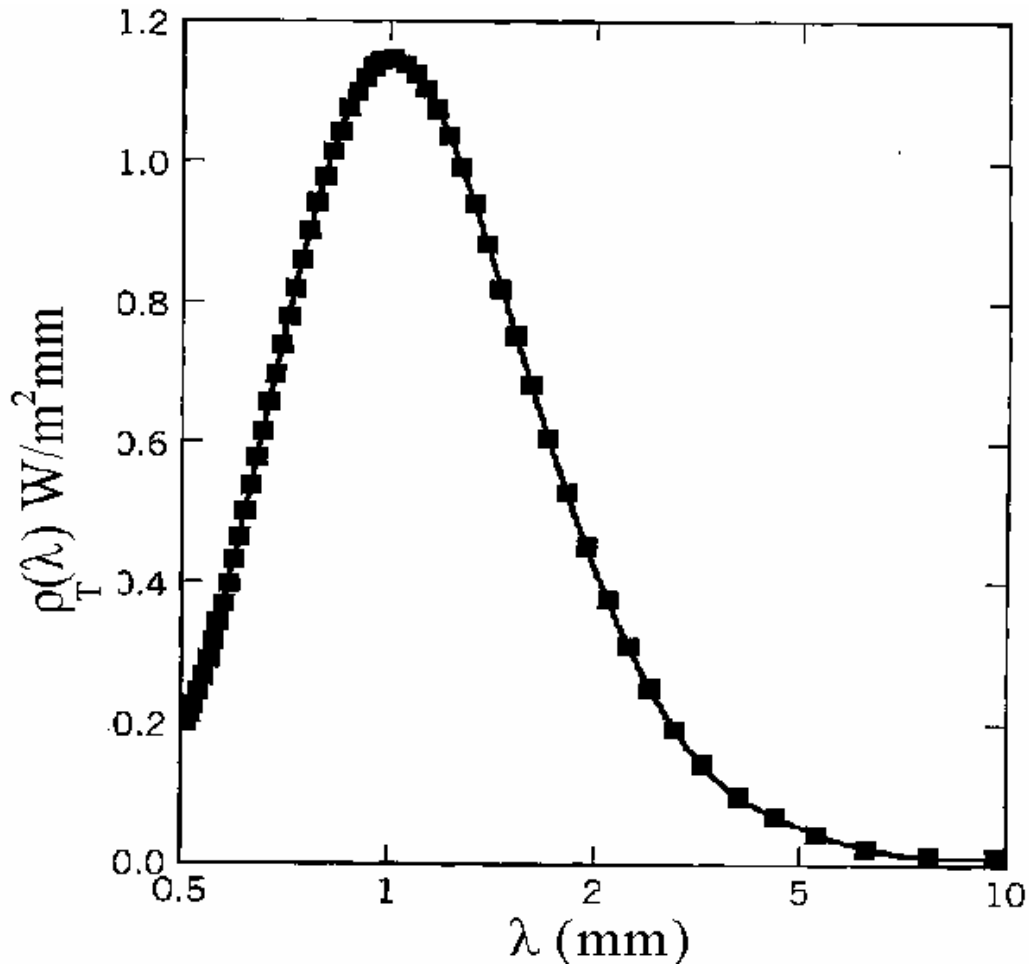
Οι ανοικτοί κύκλοι δηλώνουν τα πειραματικά δεδομένα. Η συνεχής καμπύλη αντιστοιχεί σε φάσμα μέλανος σώματος θερμοκρασίας $T = 2.735 \text{ }^\circ\text{K}$.

*5.6 Ειδικό θέμα 3:

Η μάζα του φωτονίου σαν μέτρο αδράνειας και βαρύτητας.

Ένα από τα ερωτήματα που θέσαμε νωρίτερα για το φωτόνιο και την μάζα του αφορούσε την βαρυτική έλξη του από άλλα σώματα. Στο εδάφιο αυτό παρουσιάζουμε θεωρητικά παραδείγματα και πειραματικές αποδείξεις, που θεμελιώνουν την βαρυτική έλξη του φωτονίου από την Γη και άλλα ουράνια σώματα.

Στη μηχανική συναντούμε δυο είδη μαζών, τη βαρυτική μάζα που καθορίζει τις βαρυτικές αλληλεπιδράσεις και την αδρανειακή μάζα, η οποία καθορίζει την αντίσταση του σώματος στην αλλαγή της κινητικής του κατάστασης, υπό την επίδραση εξωτερικών



Σχήμα 5.7

Λεπτομερής απεικόνιση (στην περιοχή από 0.5 έως 10 mm) της κατανομής της έντασης $\rho_T(\lambda)$ συναρτήσει του μήκους κύματος της ακτινοβολίας κοσμικού υποβάθρου από τον δορυφόρο COBE

Η συνεχής καμπύλη αντιστοιχεί σε φάσμα μέλανος σώματος θερμοκρασίας $T = 2.735$ °K.

δυνάμεων. Αυτές οι δυο ποσότητες (βαρυτική και αδρανειακή μάζα) έχει αποδειχθεί ότι είναι ίσες με ακρίβεια καλύτερη από ένα στα δέκα δισεκατομμύρια. Για το φωτόνιο η αδρανειακή μάζα, η οποία υπεισέρχεται στον 2^ο νόμο του Νεύτωνα και καθορίζει την συμπεριφορά του όταν υφίσταται μια δύναμη, δίνεται από τις (5.11)-(5.12). Εάν δεχθούμε ότι το φωτόνιο έχει βαρυτική μάζα, θα πρέπει και αυτή να δίνεται από τις σχέσεις (5.11)-(5.12). Για να ελέγξουμε αυτή την υπόθεση ας υποθέσουμε ότι ένα φωτόνιο «πέφτει» (κατευθύνεται προς την Γη) από

το σημείο Η (που είναι η πηγή) προς το οριζόντιο επίπεδο στο σημείο Ο, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.8. Το σημείο Η βρίσκεται σε ύψος η από το οριζόντιο επίπεδο, οπότε η δυναμική ενέργεια $E_{\delta\nu H}$ ενός φωτονίου μάζας m σ' αυτό το σημείο θα είναι mgh . Η αντίστοιχη κινητική ενέργεια θα είναι $E_{κινH} = h\nu_H$. Στο Ο η δυναμική ενέργεια $E_{\delta\nu O}$ θα είναι εξ ορισμού μηδέν, ενώ η αντίστοιχη κινητική ενέργεια θα είναι $E_{κινO} = h\nu_O$. Εφαρμόζοντας την αρχή διατηρήσεως της ενέργειας στα σημεία Η και Ο βρίσκουμε:

$$E_{κινH} + E_{\delta\nu H} = E_{κινO} + E_{\delta\nu O} \quad (5.41),$$

ή

$$h \cdot \nu_O + 0 = h \cdot \nu_H + \left(\frac{h\nu_H}{c^2}\right)g\eta \quad (5.42).$$

Από την (5.42) βρίσκουμε: $\nu_O = \nu_H \left(1 + \frac{g\eta}{c^2}\right)$ (14) (5.43).

Βλέπουμε ότι η συχνότητα ν_O στο Ο είναι μεγαλύτερη από την συχνότητα ν_H στο Η. Η σχετική μεταβολή της συχνότητας ($\Delta\nu/\nu$) είναι:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_H} = \frac{\nu_O - \nu_H}{\nu_H} = \frac{g\eta}{c^2} \quad (5.44).$$

Η μεταβολή αυτή έχει παρατηρηθεί πειραματικά.

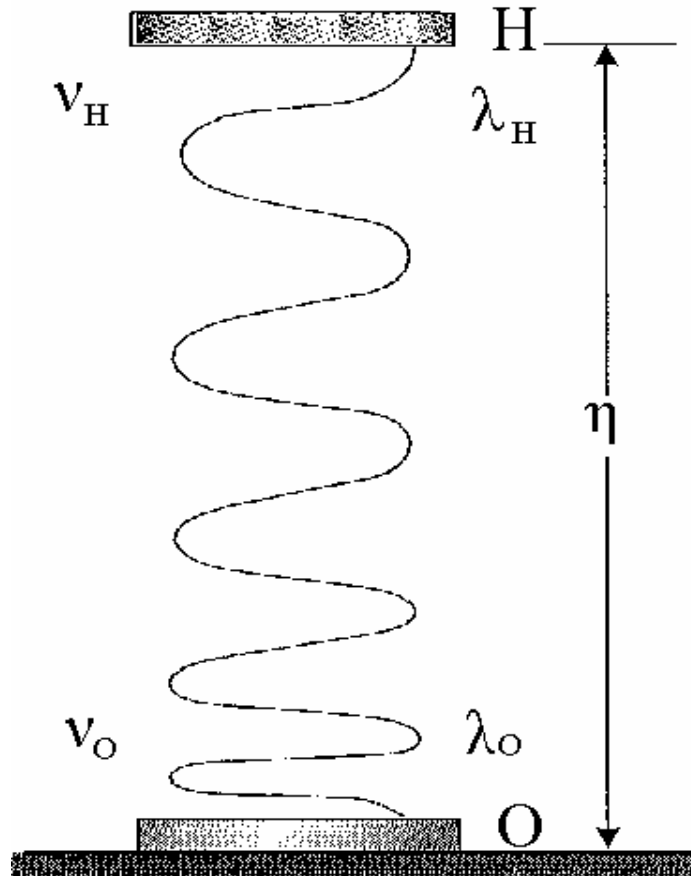
Αν υποθέσουμε ότι το πείραμα γίνεται σε ένα μικρό ύψος $\eta = 100m$ από την (5.44)

προκύπτει ότι:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_H} = \frac{(9.8m/sec^2)(100m)}{(3 \times 10^8 m/sec)^2} = 10.8 \times 10^{-15}.$$

Η ποσότητα αυτή, η οποία είναι εξαιρετικά μικρή (μικρότερη κατά πολύ και από το φυσικό πλάτος μιας μονοχρωματικής γραμμής του φάσματος στην περιοχή των ακτίνων Χ ή των ακτίνων γ) έχει γίνει δυνατόν να μετρηθεί.

Αφού ένα φωτόνιο το οποίο κινείται προς την Γη αυξάνει την συχνότητα του, ένα φωτόνιο το οποίο απομακρύνεται από τη Γη προς το άπειρο θα παρουσιάζει ελάττωση της συχνότητα του. Ένα φωτόνιο, λοιπόν, στην ορατή περιοχή του



Σχήμα 5.8

Σχηματική παράσταση της αύξησης της συχνότητας (ελάττωσης του μήκους κύματος) ενός φωτονίου το οποίο πλησιάζει («πέφτει») προς τη Γη, λόγω βαρυτικής έλξης.

Η συχνότητα ν_0 στο O είναι μεγαλύτερη από την συχνότητα ν_H στο H. Το αντίστροφο συμβαίνει για τα αντίστοιχα μήκη κύματος λ_0 και λ_H .

φάσματος, το οποίο απομακρύνεται από τη Γη θα παρουσιάζει μετατόπιση της συχνότητας του προς το ερυθρό άκρο του φάσματος. Αυτού του είδους η μετατόπιση ονομάζεται μετατόπιση προς το ερυθρό. Η αντίθετη μετατόπιση, για ένα φωτόνιο που πλησιάζει προς την Γη, ονομάζεται μετατόπιση προς το ιώδες. Μπορούμε να υπολογίσουμε την μετατόπιση προς το ερυθρό ενός φωτονίου που απομακρύνεται από την Γη προς το άπειρο, εφαρμόζοντας με όμοιο τρόπο την αρχή διατηρήσεως της ενέργειας στην επιφάνεια της Γης, απόσταση από το κέντρο ίση με την ακτίνα της Γης, R_Γ και στο άπειρο όπου η δυναμική ενέργεια γίνεται μηδέν. Γενικότερα αντί για την Γη μπορούμε να θεωρήσουμε ένα αστέρα A.

Ερώτηση Ποια η βαρυτική μετατόπιση προς το ερυθρό ενός φωτονίου συχνότητας ν το οποίο απομακρύνεται από την επιφάνεια ενός αστέρα Α ακτίνας R_A ;

Απάντηση

Με τον ίδιο τρόπο (διατήρηση της ενέργειας) με τον οποίο βρήκαμε την μετατόπιση (προς το ιώδες) στην συχνότητα ενός φωτονίου που πέφτει από κάποιο ύψος στη Γη, θα υπολογίσουμε την βαρυτική μετατόπιση προς το ερυθρό για τον αστέρα. Το μόνο που θα αλλάξουν στη σχέση της αρχής διατήρησης της ενέργειας είναι ότι η δυναμική ενέργεια του φωτονίου στην επιφάνεια του αστέρα θα ισούται με $\frac{-GMm}{R_A}$, ενώ όταν βρίσκεται στο άπειρο ($R \Rightarrow \infty$) η δυναμική του ενέργεια μηδενίζεται.

$$\text{Γράφουμε λοιπόν: } E_{\text{κιν}A} + E_{\text{δυν}A} = E_{\text{κιν}B} + E_{\text{δυν}B} \quad (5.45),$$

$$\text{ή} \quad h\nu_A - \frac{GM}{R_A} \left(\frac{h\nu}{c^2} \right) = h\nu_\infty - 0 \quad (5.46),$$

$$\text{απ' όπου:} \quad \nu_\infty = \nu_A \left(1 - \frac{GM}{R_A c^2} \right) \quad (5.47).$$

Όπως και πριν, η σχετική μεταβολή της συχνότητας είναι:

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_A} = \frac{\nu_\infty - \nu_A}{\nu_A} = - \frac{GM}{R_A c^2} \quad (5.48).$$

Το αρνητικό πρόσημο στην παραπάνω σχέση δείχνει την μείωση της συχνότητας (αύξηση του μήκους κύματος) προς το ερυθρό. Το αρνητικό πρόσημο μπροστά από τον όρο $\frac{GM}{R_A c^2}$ στην (5.47) και την (5.48) δείχνει ότι αυτός ο όρος πρέπει να

είναι μικρότερος από την μονάδα, ώστε η συχνότητα ν_∞ να είναι θετική και η

σχετική μετατόπιση $\frac{\Delta \nu}{\nu_A} = \frac{\nu_\infty - \nu_A}{\nu_A}$ μικρότερη από την μονάδα κατ' απόλυτη τιμή.

Εντούτοις, σε κάποια φάση της ζωής ενός αστέρα μπορεί η μάζα του να γίνει πολύ μεγάλη και η ακτίνα του πολύ μικρή (μπορεί να συρρικνωθεί). Μπορεί, τότε ο όρος

$\frac{GM}{R_A c^2}$ να γίνει μεγαλύτερος από την μονάδα;

Μεγάλοι αστέρες με μάζα περίπου 5 φορές μεγαλύτερη από αυτή του Ηλίου, οι οποίοι έχουν αρχίσει να χάνουν την ενέργεια τους μπορούν να συμπυκνωθούν και η μάζα τους να συγκεντρωθεί σε ελάχιστο όγκο. Τότε ο όρος $\frac{GM}{R_A c^2}$ μπορεί να γίνει

μεγαλύτερος από την μονάδα. Τι συμβαίνει στην περίπτωση αυτή;

Απ' όσα ξέρουμε δεν μπορεί να έχουμε αρνητική συχνότητα. Για να δούμε τι συμβαίνει πρέπει να πάμε πίσω στη σχέση (5.46). Η σχέση αυτή δείχνει ότι το φωτόνιο δεν μπορεί να διαφύγει, αφού η ενέργεια που απαιτείται είναι μεγαλύτερη από την ενέργεια που έχει το φωτόνιο αρχικά (στη θέση R_A). Ένας τέτοιος αστέρας, από τον οποίο ούτε το φως μπορεί να διαφύγει ονομάζεται **μελανή οπή**, αφού δεν μπορεί να εκπέμψει φως. Προφανώς και άλλα σώματα με σαφώς μεγαλύτερες μάζες από το φωτόνια δεν μπορούν να διαφύγουν από την τεράστια βαρυτική έλξη μιας μελανής οπής. Η παρατήρηση λοιπόν, μιας μελανής οπής μπορεί να είναι μόνο έμμεση και διόλου εύκολη. Υπάρχουν δυο βασικές τεχνικές. Η πρώτη, αφορά την μελέτη της τροχιάς ενός φωτεινού αστέρα ο οποίος εισέρχεται στη μελανή οπή λόγω της βαρυτικής έλξης. Η δεύτερη τεχνική βασίζεται στην παρατήρηση των ακτίνων X, οι οποίες παράγονται κατά την εισροή ύλης μέσα στην οπή. Με βάση την παρατήρηση των ακτίνων X πιστεύεται ότι έχει ανιχνευθεί μια μελανή οπή στον αστερισμό του Κύκνου.

*5.7 Ένθετο 5.1: Ο δεκάλογος των φωτονίων .

Ιδιότητες Φωτονίων

- 1)** Τα φωτόνια κινούνται με την ταχύτητα του φωτός c , όπως η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία.
- 2)** Η μάζα ηρεμίας των φωτονίων είναι μηδέν ($m_0 = 0$). Αυτό απορρέει από την αρχή της σχετικότητας, που δεν επιτρέπει σε συνηθισμένα σώματα με μάζα ηρεμίας διάφορη του μηδενός να φτάσουν ποτέ την ταχύτητα του φωτός.
- 3)** Φωτόνια συχνότητας ν , μήκους κύματος λ , έχουν ενέργεια E , η οποία δίδεται από τις σχέσεις: $E = h \nu$, ή $E = \hbar \omega$
- 4)** Φωτόνια συχνότητας ν , μήκους κύματος λ , έχουν ορμή \vec{p} , ίση προς $\vec{p} = \hbar \vec{k}$. Η κατεύθυνση του διανύσματος της ορμής συμπίπτει με την

κατεύθυνση διαδόσεως του κύματος. Το μέτρο της ορμής δίνεται από τις

σχέσεις:
$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c} = \frac{E}{c}$$

5) Η μάζα m_ϕ ενός φωτονίου, συχνότητας ν , δίνεται από τη σχέση :

$$m_\phi = \frac{h\nu}{c^2} \quad \text{ή} \quad m_\phi = \frac{p}{c} \quad \text{ή} \quad m_\phi = \frac{E}{c^2}$$

6) Τα φωτόνια μπορούν να δημιουργούνται ή να καταστρέφονται, όταν η ακτινοβολία εκπέμπεται ή απορροφάται

7) Τα φωτόνια μπορούν να σκεδάζονται σαν συνηθισμένα σωματρία και να υφίστανται κρούσεις με άλλα σωματρία, όπως τα ηλεκτρόνια.

*8) Φωτόνια συχνότητας ν' , μέσα σε ένα ομογενές και ισότροπο διηλεκτρικό μέσο με δείκτη διαθλάσεως n , έχουν μήκος κύματος λ' , $\lambda' = \frac{\lambda}{n}$, όπου λ το αντίστοιχο μήκος κύματος στο κενό.

*9) Τα φωτόνια χαρακτηρίζονται από μια «εσωτερική στροφορμή», σπιν, της οποίας το μέτρο είναι $\sqrt{(1+1)\hbar} = \hbar$. Ισοδύναμα λέμε ότι το σπιν του φωτονίου είναι 1, ενώ το σπιν του ηλεκτρονίου είναι $\frac{1}{2}$.

Η διατήρηση της στροφορμής θέτει περιορισμούς (κανόνες επιλογής) στις διεργασίες εκπομπής φωτονίων από άτομα και μόρια.

10) Όλες οι σύνθετες διεργασίες με φωτόνια μπορούν να περιγραφούν με βάση (σαν μια διαδοχική σειρά από) τις στοιχειώδεις διεργασίες δημιουργίας, καταστροφής - απορρόφησης, εκπομπής.

Κεφάλαιο 6 Αλληλεπίδραση ακτινοβολίας-ύλης

Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάστηκε η έννοια , οι ιδιότητες και ο χαρακτήρας του φωτονίου σαν ένα «συνηθισμένο»(;) σωματίο με ασυνήθιστες ιδιότητες. Σ' αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες του φωτονίου, οι οποίες συνοψίσθηκαν στο ένθετο 5.1, για να περιγράψουμε και ερμηνεύσουμε μια σειρά από ενδιαφέροντα φαινόμενα, τα οποία η Κλασική Φυσική αδυνατεί να ερμηνεύσει. Ο τίτλος του κεφαλαίου θα μπορούσε να είναι «**Φωτόνια εν δράσει**». Στα υποκεφάλαια 6.1, 6.2 και 6.3 περιγράφουμε τα συνηθισμένα φαινόμενα του είδους, το *φαινόμενο Compton*, το *Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο* και το φαινόμενο της *ακτινοβολίας πεδήσεως*, βάσει του οποίου περιγράφεται το συνεχές φάσμα των ακτίνων Χ. Στα υποκεφάλαια 6.4 και 6.5 περιγράφουμε πολύ συνοπτικά τα λιγότερο γνωστά φαινόμενα της *διδύμου γενέσεως* και της *εξαύλώσεως* ζεύγους ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου, στα οποία αναφερθήκαμε εν συντομία στο προηγούμενο κεφάλαιο. Η αλληλεπίδραση της ακτινοβολίας με την ύλη είναι πολύ σημαντική, αφού μέσα από αυτή την αλληλεπίδραση αντιλαμβανόμαστε και την ακτινοβολία και την ύλη.

Περιεχόμενα του Κεφαλαίου

6.1 Φαινόμενο Compton

6.1.1 Ορισμός

6.1.2 Περιγραφή του φαινομένου.

6.1.3 Απόδειξη της σχέσεως $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$.

6.1.4 Πειραματικές μετρήσεις και αποτελέσματα.

6.1.5 Αρχή της αντιστοιχίας σε σχέση με το φαινόμενο Compton.

6.2 Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

6.2.1 Περιγραφή του φαινομένου

6.2.2 Πειραματικοί νόμοι

6.2.3 Απόπειρα Κλασικής ερμηνείας

6.2.4 Πλήρης κβαντομηχανική ερμηνεία

6.2.5 Πρακτικές εφαρμογές του φωτοηλεκτρικού φαινομένου

6.3 Ακτινοβολία πεδήσεως

6.3.1 Περιγραφή του φαινομένου

6.3.2 Ερμηνεία του φαινομένου με βάση την Κβαντική Θεωρία

6.4 Δίδυμος Γένεση.

6.5 Εξαΰλωση ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου

6.1 Το φαινόμενο Compton

6.1.1 Ορισμός:

Το φαινόμενο Compton συνίσταται σε *σκέδαση (δηλαδή αλλαγή κατευθύνσεως, λόγω αλληλεπιδράσεως π.χ. «σύγκρουσης») της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, κυρίως ακτίνων X, από ελεύθερα ηλεκτρόνια, η οποία (σκέδαση) συνοδεύεται με αύξηση του μήκους κύματος της σκεδαζομένης ακτινοβολίας*

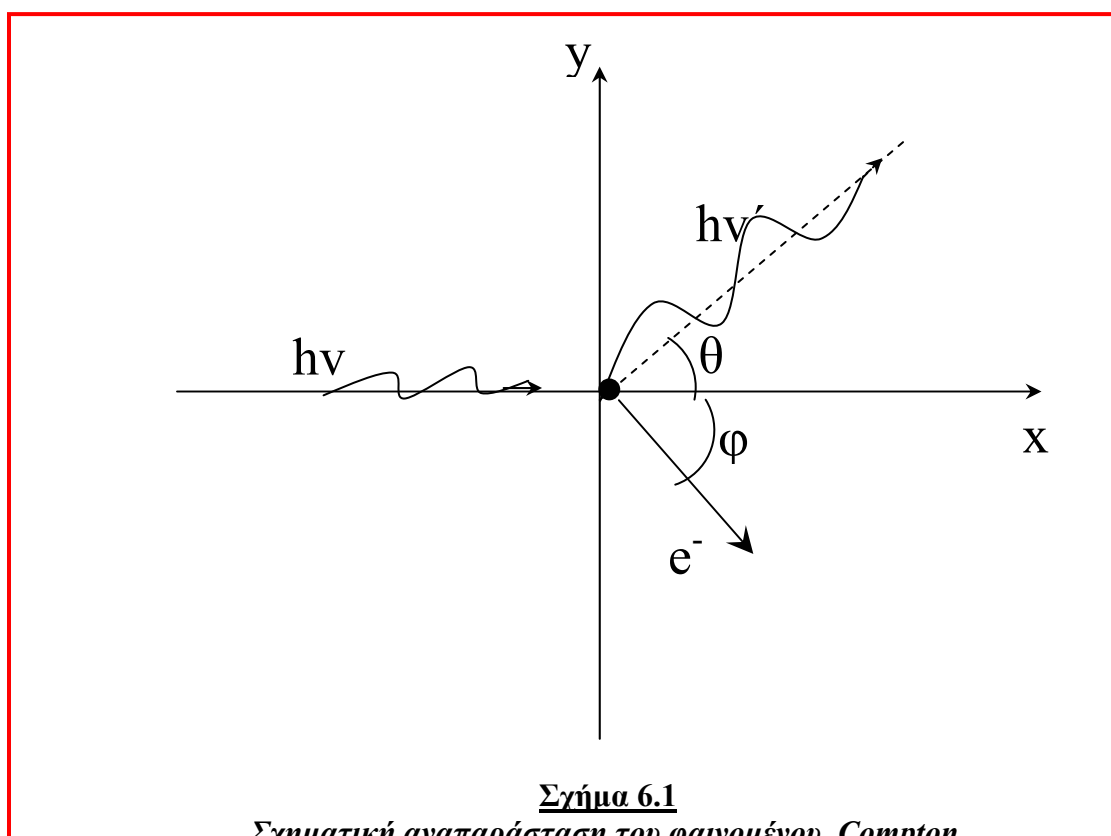
6.1.2 Περιγραφή του φαινομένου.

Όπως καταγράψαμε στις ιδιότητες του φωτονίου, ένα φωτόνιο μπορεί να *σκεδαστεί* από ένα ηλεκτρόνιο. Το φαινόμενο αυτό, που τώρα είναι γνωστό σαν *φαινόμενο Compton*, πρώτος παρατήρησε το 1923 ο Α.Η. Compton, μελετώντας την σκέδαση ακτίνων X από ελεύθερα ηλεκτρόνια. Ο Compton διαπίστωσε μια αύξηση του μήκους κύματος της σκεδαζομένης ακτινοβολίας, η οποία (αύξηση) εξαρτάται μόνο από την γωνία σκεδάσεως θ . Κάτι που, όπως γρήγορα συνειδητοποίησε, δεν ήταν συμβατό με την κλασική εικόνα σκέδασης, την οποία έπρεπε να εγκαταλείψει. Σύμφωνα με την κλασική ηλεκτρομαγνητική θεωρία, το ηλεκτρομαγνητικό κύμα προσπίπτοντας στο ελεύθερο ηλεκτρόνιο το θέτει σε ταλάντωση της ίδιας συχνότητας με συνέπεια το (ταλαντούμενο) ηλεκτρόνιο να εκπέμπει ακτινοβολία της ίδιας συχνότητας. **Σύμφωνα, λοιπόν, με την κλασική θεωρία, η σκεδαζόμενη ακτινοβολία θα έπρεπε να έχει την ίδια ακριβώς συχνότητα και τα χαρακτηριστικά της να είναι ίδια σε όλες τις διευθύνσεις (σφαιρικό κύμα).** Επειδή κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει, ο Compton χρησιμοποίησε την ιδέα των φωτονίων του Einstein τα οποία θεώρησε σαν σημειακά σωμάτια με μάζα ενέργεια και ορμή που δίνονται από τις σχέσεις 4.7 - 4.12 .

Θα πρέπει εδώ να θυμίσουμε, σύμφωνα με την συζήτηση της ενότητας 2.4 για τον δυϊσμό της ακτινοβολίας, ότι τα φωτόνια των ακτίνων X παρουσιάζουν εντονότερα τις σωματιδιακές ιδιότητες και είναι σαφώς πιο εντοπισμένα χωρικά σε σχέση με τα φωτόνια της ορατής περιοχής του φάσματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Η ερμηνεία, λοιπόν, του φαινομένου θεωρώντας τα φωτόνια των ακτίνων X σαν σημειακά σωμάτια (υλικά σημεία)

μπορεί να είναι ικανοποιητική⁷⁰. Απ' την άλλη μεριά δεν θα περιμέναμε να ερμηνεύσουμε (και να παρατηρήσουμε) με τον ίδιο τρόπο το φαινόμενο Compton χρησιμοποιώντας ορατό φως.

Η ερμηνεία του φαινομένου από τον Compton, και ανεξάρτητα από τον Debye, στηρίζεται στην διαδικασία που φαίνεται παραστατικά στο σχήμα 6.1.



Ένα από τα φωτόνια των ακτίνων X, συχνότητας ν (μήκους κύματος $\lambda = c / \nu$) και ενέργειας $h\nu$, εισέρχεται από τα αριστερά στο σχήμα κατά μήκος του άξονα των x , και προσπίπτει σε ένα ακίνητο ελεύθερο ηλεκτρόνιο, που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, και του μεταβιβάζει μέρος της ενέργειας και της ορμής του. Το φωτόνιο σκεδαζείται ελαστικά κατά μια γωνία θ , ενώ το ηλεκτρόνιο αποκτά κινητική ενέργεια και ορμή \mathbf{p} , της οποίας (ορμής) το διάνυσμα σχηματίζει γωνία ϕ με τον άξονα x . Απ την άλλη μεριά, το σκεδαζόμενο φωτόνιο, λόγω της

⁷⁰ Προφανώς τα ίδια επιχειρήματα ισχύουν, περισσότερο ενισχυμένα, και για φωτόνια ακόμα μεγαλύτερης ενέργειας, όπως τα φωτόνια ακτίνων γ .

κινητικής ενέργειας που μεταβίβασε στο ηλεκτρόνιο χάνει μέρος της ενέργειας του και έτσι η νέα του ενέργεια $h\nu'$ είναι μικρότερη από την αρχική :

$$h\nu' < h\nu, \text{ ή } \nu' < \nu . \quad (6.1)$$

Μ' αυτόν τον τρόπο, το μήκος κύματος του σκεδασθέντος φωτονίου, $\lambda' = c / \nu'$, θα είναι μεγαλύτερο από το μήκος κύματος του προσπίπτοντος φωτονίου, ήτοι :

$$\lambda' > \lambda . \quad (6.2)$$

Η διαφορά $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$, όπως ο Compton διαπίστωσε πειραματικά και απόδειξε θεωρητικά, δεν **εξαρτάται** από καμία άλλη λεπτομέρεια (όπως το υλικό του στόχου ή το αρχικό μήκος κύματος) **παρά μόνο από την γωνία σκεδάσεως θ** .

Η απόδειξη, όπως θα δούμε παρακάτω, βασίζεται στην διατήρηση ενέργειας και ορμής, που εξ ορισμού ισχύουν για ελαστικές κρούσεις συνηθισμένων κλασικών σωματιδίων, και δίνει :

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta) \quad , \quad (6.3)$$

όπου h η σταθερά του Planck, c η ταχύτητα του φωτός, και m η μάζα του ηλεκτρονίου. Εκτός από την γωνία σκεδάσεως θ , όλες οι άλλες ποσότητες στο δεξιό μέλος της (6.3) είναι βασικές σταθερές της φύσεως, που δεν εξαρτώνται από καμία ιδιότητα του στόχου, αλλά ούτε και της δέσμης (αφού δεν υπεισέρχεται στην σχέση το μήκος κύματος λ της εισερχόμενης δέσμης). Η (6.3) ισχύει, λοιπόν, για οποιοδήποτε μήκος κύματος λ .

Η μέγιστη μετατόπιση του μήκους κύματος, $\Delta\lambda_{\max} = \frac{2h}{mc}$, επιτυγχάνεται στην περίπτωση που

$\theta = 180^\circ$. Η σκέδαση κατά γωνία $\theta = 180^\circ$ ονομάζεται και «οπισθο-σκέδαση».⁷¹

Για $\theta = 0$, η αλλαγή μήκους κύματος, σύμφωνα με την (6.3) είναι μηδέν ($\Delta\lambda = 0$).

Η ποσότητα $\lambda_c \equiv \frac{h}{mc}$, (6.4)

έχει διαστάσεις μήκους, ονομάζεται **μήκος κύματος Compton** και ισούται με $\lambda_c = 0.0243 \text{ \AA}$.

Ερώτηση 6.1 Η σχέση 6.3 δείχνει να οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το χρώμα ενός αντικείμενου (που εξαρτάται από το μήκος κύματος της ακτινοβολίας, το οποίο φτάνει στα μάτια μας, αφού σκεδαστεί απ' αυτό το αντικείμενο) αλλάζει ανάλογα με την γωνία παρατηρήσεως. Γιατί δεν έχει παρατηρηθεί κάτι τέτοιο ;

Απάντηση Αντί απαντήσεως, δείτε την άσκηση 6.1 και τη συζήτηση για την αρχή της αντιστοιχίας στο τέλος αυτής της ενότητας.

⁷¹ Ο αγγλοσαξονικός όρος είναι *back-scattering*.

Ασκήσεις

6.1 Μια δέσμη κίτρινου φωτός, μήκους κύματος $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ υφίσταται σκέδαση Compton και παρατηρείται σε γωνία (σκεδάσεως) 90° . Ποιο το μήκος κύματος της σκεδαζομένης ακτινοβολίας σ' αυτή τη γωνία ; Πως αλλάζει το αποτέλεσμα στις 180° ;

6.2 Θεωρήστε μια δέσμη υπεριώδους ακτινοβολίας με μήκος κύματος $\lambda = 10,000 \text{ \AA}$, μια δέσμη με $\lambda = 5000 \text{ \AA}$, μια δέσμη ακτίνων X με $\lambda = 1 \text{ \AA}$, και μια δέσμη ακτίνων γ με $\lambda = 0.01 \text{ \AA}$, που υφίστανται σκέδαση Compton και παρατηρούνται σε γωνία σκεδάσεως 90° .

α) Βρείτε την μεταβολή του μήκους κύματος $\Delta\lambda$ για κάθε μια από αυτές τις δέσμες.

β) Για κάθε μια δέσμη, βρείτε την κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου το οποίο ανακρούεται.

γ) Σε κάθε μια περίπτωση, βρείτε την ποσοστιαία μεταβολή του μήκους κύματος, $\Delta\lambda / \lambda$ και υπολογίστε το ποσοστό της ενέργειας του προσπίπτοντος φωτονίου, που χάνεται κατά την σκέδαση.

6.3 Διαθέτουμε μια μονοενεργητική δέσμη ακτίνων X, ενέργειας 100 keV, αλλά για κάποια εφαρμογή χρειαζόμαστε ακτίνες X ενέργειας 80 keV. Τι θα μπορούσαμε να κάνουμε (εκτός από το να αγοράσουμε καινούργια πηγή ακτίνων X ...) ;

6.1.3 Απόδειξη της σχέσεως
$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta).$$

Ακολουθώντας τους Compton και Debye, με βάση το σχήμα 6.1 μπορούμε να γράψουμε τις σχέσεις για την διατήρηση ενέργειας και ορμής ώστε να καταλήξουμε σε μια έκφραση της διαφοράς μήκους κύματος $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$.

Θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις σχετικιστικές εκφράσεις για την ενέργεια και ορμή, επειδή τα φωτόνια των ακτίνων X (που έτσι κι αλλιώς είναι σχετικιστικά σωματίδια) μεταφέρουν μεγάλη ενέργεια και ορμή στο ηλεκτρόνιο, το οποίο με τη σειρά του αποκτά ταχύτητες που δεν είναι αμελητέες σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός.

Η ενέργεια του ηλεκτρονίου πριν από την σκέδαση είναι $E_0 = m c^2$, όπου m είναι η μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου. Η ενέργεια του ηλεκτρονίου (κινητική ενέργεια συν ενέργεια μάζας ηρεμίας) με ορμή p θα είναι σύμφωνα με την (4.6) :

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (4.6')$$

Οι ενέργειες του φωτονίου πριν και μετά την σκέδαση θα είναι αντίστοιχα $h\nu$ και $h\nu'$, όπου ν και ν' οι αντίστοιχες συχνότητες.

Έτσι η διατήρηση της ενέργειας εκφράζεται :

$$h\nu + m c^2 = h\nu' + E \quad , \quad (6.5)$$

όπου η ενέργεια E δίνεται από την (4.6').

Η διατήρηση της ορμής κατά τον άξονα x , σύμφωνα με το σχήμα 6.1 και την σχέση 4.8 γράφεται :

$$\frac{h\nu}{c} + 0 = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + p \cos \varphi \quad . \quad (6.6)$$

Η διατήρηση της ορμής κατά τον άξονα y γράφεται αντίστοιχα :

$$0 + 0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \theta - p \sin \varphi \quad . \quad (6.7)$$

Η στρατηγική που θα ακολουθήσουμε συνίσταται στην διαδοχική απαλοιφή των χαρακτηριστικών του ηλεκτρονίου (φ , p και E) τα οποία δεν παρατηρούνται στο πείραμα (και τα οποία, όπως εκ των υστέρων βλέπουμε, δεν υπεισέρχονται στην σχέση 6.3). Πρώτα θα απαλείψουμε την γωνία φ ανάμεσα στις (6.6) και (6.7) χρησιμοποιώντας την πολύ γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα : $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, η οποία μας δίνει :

$$p^2 c^2 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h^2\nu\nu' \cos \theta \quad , \quad (6.8)$$

στην οποία δεν υπεισέρχεται η γωνία φ . Για να απαλείψουμε την ενέργεια E και το μέτρο p της ορμής του ηλεκτρονίου, υψώνουμε και τα δύο μέλη της (4.6') εις την δευτέρα δύναμη και αντικαθιστούμε σ' αυτή τη σχέση, την ενέργεια E από την (6.5) και την ποσότητα $p^2 c^2$ από την (6.8). Οπότε, έχουμε την σχέση :

$$(h\nu - h\nu' + m c^2)^2 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h^2\nu\nu' \cos \theta + (m c^2)^2 \quad (6.9)$$

στην οποία δεν υπάρχουν οι ποσότητες φ , p και E του ηλεκτρονίου, παρά μόνο η μάζα του m . Εισάγοντας στην (6.9) τα μήκη κύματος $\lambda = c/\nu$ και $\lambda' = c/\nu'$, στη θέση των συχνοτήτων ν και ν' , αντίστοιχα, παίρνουμε τη ζητούμενη σχέση: $\Delta\lambda \equiv \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta)$.

Ασκήσεις

6.4 Εκτελέστε τα ενδιάμεσα βήματα που οδηγούν από τις σχέσεις 6.5 – 6.9 στην σχέση 6.3 .

6.5 Βρείτε μια έκφραση για την σχετική μεταβολή του μήκους κύματος $\Delta\lambda / \lambda$ και διερευνείστε κάτω από ποιες συνθήκες αυτή η σχετική μεταβολή είναι πολύ μικρή.

α) Δείξτε ότι αυτές οι συνθήκες συνοψίζονται στη σχέση : $m_\phi \ll m$, (6.10)

όπου m_ϕ και m είναι αντίστοιχα η μάζα του φωτονίου και του ηλεκτρονίου

β) Ποιο το φυσικό νόημα της σχέσεως (6.10) ;

γ) Πως συνδέεται η (6.10) με την αρχή της αντιστοιχίας ;

6.6 Δείξτε ότι η κινητική ενέργεια T του ηλεκτρονίου μετά την κρούση δίνεται από τη σχέση:

$$T = h\nu \frac{\lambda_c (1 - \cos \theta)}{\lambda + \lambda_c (1 - \cos \theta)} \quad (6.11)$$

Η σχέση αυτή, εκφράζοντας από γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα το συνημίτονο της γωνίας θ συναρτήσει του ημιτόνου του μισού τόξου, μπορεί να γραφεί και :

$$T = hv \frac{2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\lambda + 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (6.11a)$$

όπου v και λ αντίστοιχα η συχνότητα και το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας και λ_c το μήκος κύματος Compton για το ηλεκτρόνιο.

Έτσι βλέπουμε πως η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι ευθέως ανάλογη προς την ενέργεια $h\nu$ του φωτονίου.

Κάντε αριθμητική εφαρμογή για φωτόνια ακτίνων X με $\lambda = 1 \text{ \AA}$ και ακτίνων γ με $\lambda = 0.01 \text{ \AA}$. Υπολογίστε την ταχύτητα των ηλεκτρονίων και στις δυο περιπτώσεις σαν ποσοστό της ταχύτητας c του φωτός. Τι συμπέρασμα βγαίνει ; Δικαιολογείται η χρήση σχετικιστικών σχέσεων για την ενέργεια και ορμή του ηλεκτρονίου ;

Υπόδειξη : Ξεκινήστε δείχνοντας την σχέση $T = E - E_0 = h\nu - h\nu'$ και εκφράστε την συχνότητα ν' , συναρτήσει των λ και $\Delta\lambda$.

6.7 Δείξτε ότι η γωνία φ και η γωνία θ , στο σχήμα 6.1 συνδέονται με την σχέση :

$$\tan \varphi = \frac{v' \sin \theta}{v - v' \cos \theta}$$

6.8 Ας θεωρήσουμε στο σχήμα 6.1, ότι το ηλεκτρόνιο δεν είναι τελείως ακίνητο, αλλά ότι έχει ορμή μέτρου p_0 και, για ευκολία, κατεύθυνση ίδια με αυτή του προσπίπτοντος φωτονίου (δηλαδή κατά την θετική φορά του άξονα x).

Α) Ποια (ή ποιες) από τις παρακάτω σχέσεις μπορεί να περιγράψει, σ' αυτή την περίπτωση, την μεταβολή του μήκους κύματος $\Delta\lambda$;

$$(a) \quad \Delta\lambda = \frac{h + \lambda mc}{\sqrt{m^2 c^2 + p_0^2} - p_0} (1 - \cos \theta) \quad (b)$$

$$\Delta\lambda = \frac{h + \lambda p_0}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2} - cp_0} (1 - \cos \theta)$$

$$(γ) \quad \Delta\lambda = \frac{h + \lambda p_0}{\sqrt{m^2 c^2 + p_0^2} - p_0} (1 - \cos \theta) \quad (d)$$

$$\Delta\lambda = \frac{h + \lambda p_0}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2} - mc^2} (1 - \cos \theta)$$

$$(\epsilon) \quad \Delta\lambda = \frac{h + \lambda p_0}{\sqrt{m^2 c^2 + p_0^2} - \frac{h}{\lambda}} (1 - \cos\theta) \quad (\sigma\tau)$$

$$\Delta\lambda = \frac{h + 2\lambda p_0 \sin^2 \frac{\phi}{2}}{\sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2} - mc^2} (1 - \cos\theta)$$

Β) Πως αλλάζει το αποτέλεσμα εάν η κατεύθυνση του διανύσματος p_0 είναι αντίθετη από αυτή του προσπίπτοντος φωτονίου ;

Γ) Διερευνείστε την απάντηση ως προς το μέγεθος και το πρόσημο του $\Delta\lambda$.

Συμπληρώστε τις απαντήσεις πριν προχωρήσετε στην επόμενη άσκηση.

*** 6.9** Η άσκηση αυτή αποτελεί συμπλήρωμα της προηγούμενης ασκήσεως. Ας θεωρήσουμε, όπως στην προηγούμενη άσκηση, ότι το ηλεκτρόνιο δεν είναι τελείως ακίνητο, αλλά ότι έχει ορμή μέτρου p_0 και κατεύθυνση ίδια με αυτή του προσπίπτοντος φωτονίου.

α) Γράψτε εκ νέου τις εξισώσεις για την διατήρηση ενέργειας και ορμής σ' αυτή την περίπτωση.

β) Δείξτε ότι η αντίστοιχη με την (6.3) σχέση τώρα είναι :

$$\Delta\lambda = \frac{h + \lambda p_0}{\sqrt{m^2 c^2 + p_0^2} - p_0} (1 - \cos\theta). \quad (6.12)$$

Πως συγκρίνεται το αποτέλεσμα αυτό με την σχέση (6.3) και τις απαντήσεις της προηγούμενης ασκήσεως ;

6.1.4 Πειραματικές μετρήσεις και αποτελέσματα.

Ενώ η μέχρι τώρα συζήτηση, καθώς και η απόδειξη της σχέσεως 6.3, βασίζεται εννοιολογικά στην σκέδαση ενός φωτονίου από ένα ηλεκτρόνιο, κατά την εκτέλεση του πειράματος σε κάθε γωνία θ έχουμε ένα μεγάλο πλήθος από φωτόνια - βλήματα και, αντίστοιχα, από ηλεκτρόνια - στόχους. Γι αυτό χρειάζεται κάποια εξοικείωση για να παρακολουθήσει κανείς εύκολα την μετάβαση από την σχηματική παράσταση του πειράματος του σχήματος 6.1 στα πειραματικά αποτελέσματα του σχήματος 6.2 παρακάτω.

Στην πράξη, η πειραματική διάταξη για την παρατήρηση του φαινομένου Compton αποτελείται από τρία μέρη :

(1^{ον}) από μια συσκευή παραγωγής μονοχρωματικών (μονοενεργειακών) ακτίνων X, συχνότητας ν (μήκους κύματος $\lambda = c / \nu$) και ενέργειας $h\nu$. Η κατεύθυνση της δέσμης των ακτίνων X συμπίπτει με την θετική φορά του άξονα x στο σχήμα 6.1

(2^{ον}) τον (μεταλλικό) στόχο που περιέχει ένα πολύ μεγάλο πλήθος «ελευθέρων» ηλεκτρονίων. Ο στόχος δεν είναι απαραίτητο να είναι μεταλλικός (στο αρχικό πείραμα το

υλικό του στόχου ήταν γραφίτης) αρκεί να περιέχει «ελεύθερα» ηλεκτρόνια με την έννοια του όρου που χρησιμοποιούμε εδώ.

«Ελεύθερα» θεωρούνται τα ηλεκτρόνια τα οποία δεν είναι «δέσμια» επάνω σε κάποιο άτομο, αλλά περιφέρονται σ' ολόκληρο το στερεό του στόχου και η ενέργεια τους είναι πρακτικά αμελητέα σε σχέση με την ενέργεια του προσπίπτοντος φωτονίου. Όπως είδαμε νωρίτερα τα φωτόνια των ακτίνων Χ έχουν ενέργειες της τάξεως των 10^5 eV, ενώ τυπικές ενέργειες «ελευθέρων» ηλεκτρονίων στα στερεά είναι της τάξεως μερικών ηλεκτρονιοβόλτ (eV).

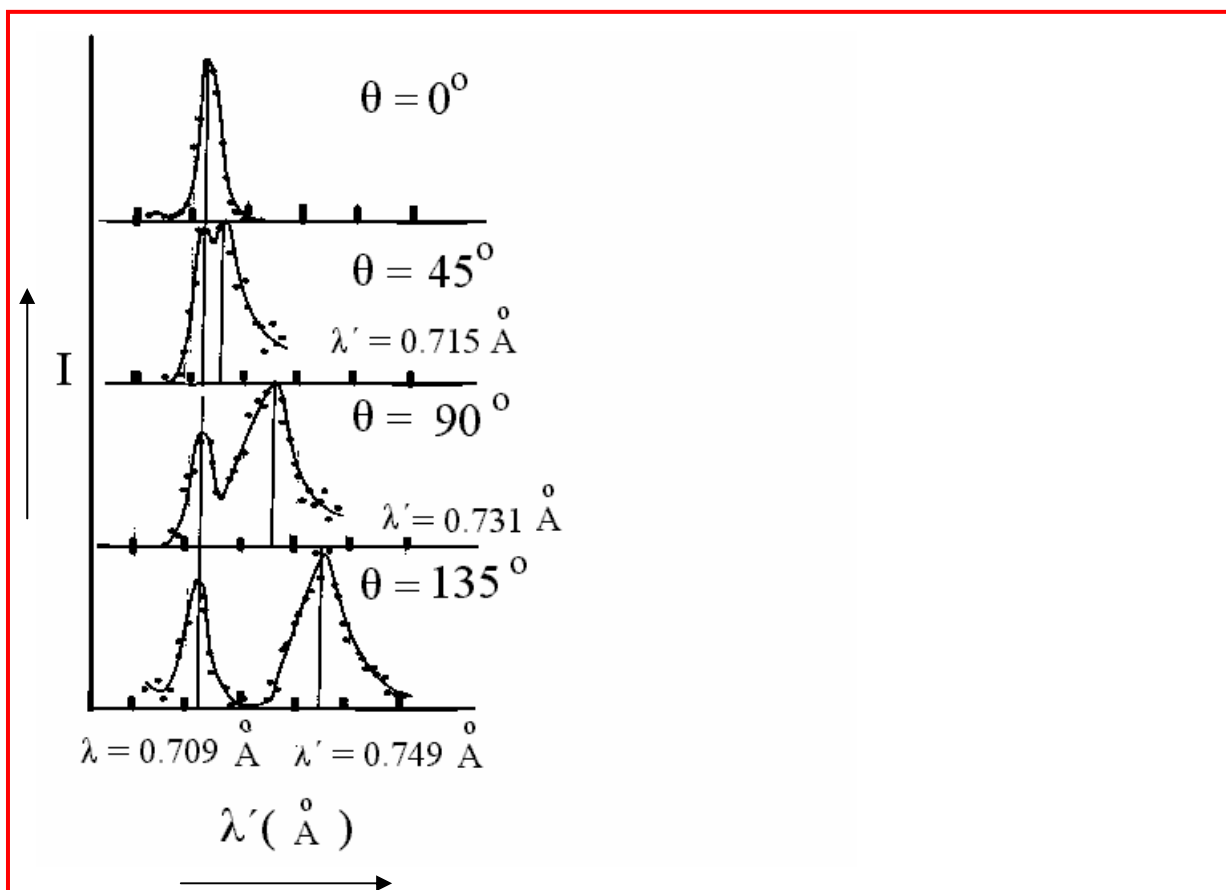
& (3^ο) **την συσκευή παρατήρησης της σκεδαζομένης ακτινοβολίας** η οποία έχει την δυνατότητα να περιστρέφεται κατά (μεταβλητή) γωνία θ περί τον άξονα z (ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος και δεν έχει σχεδιασθεί).

Η συσκευή παρατήρησης έχει την δυνατότητα να μετράει την ένταση I της ακτινοβολίας σαν συνάρτηση του μήκους κύματος λ' σε κάθε θέση της γωνίας θ . Στην πραγματικότητα η συσκευή παρατήρησης αποτελείται από ένα φασματογράφο περιστρεφόμενου κρυστάλλου (για τον προσδιορισμό του μήκους κύματος) και έναν θάλαμο ιονισμού (για την μέτρηση της έντασης της σκεδαζομένης ακτινοβολίας). Περισσότερες λεπτομέρειες για την συσκευή παρατήρησης δεν θα αναφέρουμε εδώ.

Ερώτηση 6.2 Τι μορφή περιμένετε να έχει το φάσμα της σκεδαζομένης ακτινοβολίας ; Συγκρίνατε με το πραγματικό φάσμα. Που οφείλονται οι διαφορές ;

Απάντηση Σύμφωνα, με την σχηματική αναπαράσταση του σχήματος 6.1, θα περιμέναμε το φάσμα της σκεδαζομένης ακτινοβολίας να είναι γραμμικό και να αποτελείται από μια μόνο γραμμή στη θέση $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$. Για κάθε γωνία σκεδάσεως, η μεταβολή $\Delta\lambda$ θα δίνεται από την (6.4). Σύγκριση και συζήτηση των πειραματικών αποτελεσμάτων γίνεται παρακάτω.

Τα αποτελέσματα του αρχικού πειράματος του Compton για τον γραφίτη, που αντιστοιχούν σε τέσσερις γωνίες σκεδάσεως ($\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ και 135°) φαίνονται στο σχήμα 6.2.



Σχήμα 6.2

Σκέδαση Compton : Πειραματικά αποτελέσματα.

Η ένταση της σκεδασθείσας ακτινοβολίας σαν συνάρτηση του μήκους κύματος λ για τέσσερις γωνίες σκεδάσεως : $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ και 135° . Η κατακόρυφη συνεχής γραμμή στα αριστερά, αντιστοιχεί στο μήκος κύματος λ της προσπίπτουσας δέσμης. Η κατακόρυφη γραμμή στα δεξιά αντιστοιχεί στο μήκος κύματος λ' .

Τα αποτελέσματα, για κάθε γωνία σκέδασης, δίνονται σε μορφή διαγράμματος έντασης σαν συνάρτηση του μήκους κύματος. Σ' αυτό το πείραμα το μήκος κύματος λ της εισερχομένης δέσμης ήταν $\lambda = 0.709 \text{ \AA}$. Όπως παρατηρούμε, αντί μιας διάκριτης γραμμής για κάθε γωνία σκεδάσεως θ (εκτός από $\theta = 0^\circ$) υπάρχουν δύο μέγιστα στην συνεχή καμπύλη $I(\lambda')$, εκ των οποίων το ένα παραμένει σταθερό (στο ίδιο μήκος κύματος με το μήκος κύματος λ της προσπίπτουσας ακτινοβολίας) ενώ το άλλο μεταβάλλεται με την γωνία θ και αντιστοιχεί στο μήκος κύματος λ' .

Η διαφορά μεταξύ των δύο μεγίστων της καμπύλης είναι $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ είναι θετική, σε συμφωνία με την (6.2), και ικανοποιεί την βασική σχέση (6.4).

Γιατί όμως η καμπύλη που παριστάνει την συνάρτηση $I' = I'(\lambda')$ έχει αυτή τη μορφή ;

Γιατί, δηλαδή, είναι συνεχής με διαπλατυσμένα μέγιστα ;

Που οφείλονται τα δύο μέγιστα ;

Έστω ότι μπορούμε να δεχθούμε, κατ' αρχήν και προσωρινά, αντί μιας γραμμής στην θέση λ' , (που παριστάνεται μαθηματικά από μια γενικευμένη συνάρτηση $\delta(\lambda-\lambda')$ του Dirac⁷²) ένα μέγιστο στην θέση λ' πάνω σε μια συνεχή καμπύλη (βλέπε και άσκηση 2.1). Που οφείλεται το δεύτερο μέγιστο ;

Ας θυμηθούμε ότι θεωρήσαμε τα ηλεκτρόνια που σκεδάζουν τα φωτόνια των ακτίνων X σαν ελεύθερα (ή σχεδόν ελεύθερα, όταν η ενέργεια συνδέσεως τους είναι αμελητέα σε σχέση με την ενέργεια των φωτονίων των ακτίνων X, που είναι της τάξεως των 10^5 eV). Υπάρχουν όμως και δέσμια ηλεκτρόνια τα οποία είναι ισχυρά δεσμευμένα στο άτομο στο οποίο ανήκουν. Για αυτά τα δέσμια ηλεκτρόνια, τα οποία δεν αποσπώνται από το άτομο κατά την σκέδαση, η μάζα ανακρούσεως δεν είναι η μάζα του ηλεκτρονίου m αλλά, πρακτικά, η μάζα ολόκληρου του ατόμου M . Για τον γραφίτη, με ατομικό βάρος 12 η μάζα M είναι περίπου ίση με 12×2000 φορές μεγαλύτερη από την μάζα m του ηλεκτρονίου, $M \approx 24000 m$. Επειδή $M \gg m$ ή, ακόμη καλύτερα :

$$m_{\Phi} \ll M, \quad (6.13)$$

το φωτόνιο σκεδάζεται ελαστικά από ολόκληρο το άτομο χωρίς ουσιαστικά καμία απώλεια ενέργειας, όπως σκεδάζεται μια πολύ μικρή ατσάλινη σφαίρα όταν συγκρούεται με μια άλλη πολύ μεγαλύτερη της⁷³. Έτσι, σ' αυτή την περίπτωση, η μεταβολή του μήκους κύματος θα είναι πάρα πολύ μικρή και πρακτικά μη μετρήσιμη (θέτοντας στην (6.4) αντί για την μάζα m του ηλεκτρονίου, την ατομική μάζα M , ίση προς $24000 m$ βρίσκουμε $\Delta\lambda \approx 10^{-6} \text{ \AA} \approx 10^{-14} \text{ cm}$). Αυτού του τύπου η σκέδαση (σκέδαση από δέσμια ηλεκτρόνια) είναι γνωστή και σαν **σκέδαση Thomson**, από το όνομα του ερευνητή που πρώτος την μελέτησε κλασικά. Στην σκέδαση Thomson, οφείλεται, λοιπόν, το δεύτερο σταθερό μέγιστο που παρατηρείται στο πείραμα.

⁷² Η γενικευμένη συνάρτηση $\delta(x)$ του Dirac, όπως είδαμε και στο 3 κεφάλαιο του μαθηματικού συμπληρώματος, ορίζεται ίση προς μηδέν για κάθε $x \neq 0$, και $\delta(x) \rightarrow \infty$ για $x=0$, με την ιδιότητα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

⁷³ Μια μικρή ατσάλινη σφαίρα όταν συγκρούεται με μια άλλη πολύ μεγαλύτερη ακίνητη σφαίρα, απλώς αναπηδά χωρίς απώλεια ενέργειας και ορμής. Αντίθετα όταν συγκρούεται με μια παρόμοια ακίνητη σφαίρα συγκρίσιμης μάζας, τότε της μεταβιβάζει ένα μεγάλο μέρος της κινητικής της ενέργειας και ορμής.

Μετά την εξήγηση για την ύπαρξη δύο μεγίστων ⁷⁴ στο φάσμα της σκεδαζομένης ακτινοβολίας εξακολουθούν να παραμένουν αναπάντητα τα ερωτήματα που σχετίζονται με την διαπλάτυνση των μεγίστων και την εμφάνιση, κατά συνέπεια, συνεχούς καμπύλης στο σχήμα 6.2.

Μήπως τα αποτελέσματα της ασκήσεως 6.9 προσφέρουν κάποια απάντηση σ' αυτό το πρόβλημα ;

Η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα είναι κατηγορηματικά καταφατική. Τα ηλεκτρόνια σ' ένα στερεό (όπως ο στόχος) έχουν μια **συνεχή κατανομή ορμών** που περιλαμβάνει μια σειρά τιμών από μηδέν μέχρι μια μέγιστη τιμή. Σαν αποτέλεσμα, λόγω της σχέσεως (6.12), υπάρχουν διαφορετικές μετατοπίσεις για διαφορετικές τιμές της ορμής p_0 οι οποίες οδηγούν στη συνεχή καμπύλη με τα διαπλατυσμένα μέγιστα του σχήματος 6.2. Οι κατανομή των ορμών των ηλεκτρονίων εξαρτάται από το στερεό υλικό του στόχου. **Έτσι, ενώ η θέση των μεγίστων δεν εξαρτάται από το υλικό του στόχου, σύμφωνα και με την (6.3), το προφίλ των μεγίστων στο φάσμα της σκεδαζομένης ακτινοβολίας Compton εξαρτάται αποκλειστικά από το υλικό του στόχου και τις ενεργειακές καταστάσεις των «ελευθέρων» ηλεκτρονίων του.**

Το φάσμα, λοιπόν, του σχήματος 6.2 οφείλεται σε μια μεγάλη γκάμα ηλεκτρονίων των οποίων, τόσο η κινητική ενέργεια πριν από την σκέδαση (που καθορίζει την διαπλάτυνση) όσο και η δυναμική ενέργεια, ή αλλιώς ενέργεια συνδέσεως στο άτομο (που καθορίζει το κατά πόσο είναι «ελεύθερο» το «ελεύθερο ηλεκτρόνιο») μπορεί να ποικίλει. Στα όρια που αυτοί οι παράγοντες (κινητική και δυναμική ενέργεια) μπορούν να θεωρηθούν πάρα πολύ μεγάλοι ή πάρα πολύ μικροί, μπορεί να έχουμε σημαντικές αλλαγές στο φάσμα του σχήματος 6.2 και στην συμπεριφορά των φωτονίων (και ηλεκτρονίων) γενικότερα. Φυσικά, το μέγεθος (μεγάλο ή μικρό) της ενέργειας των ηλεκτρονίων έχει σαν μέτρο σύγκρισης την ενέργεια των φωτονίων της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, οπότε η κρίσιμη παράμετρος είναι η συχνότητα ν . Θα πρέπει λοιπόν να εξετάσουμε τι συμβαίνει στα όρια των πολύ μικρών και των πολύ μεγάλων συχνοτήτων (ή αντίστοιχα, στα όρια των πολύ μεγάλων και πολύ μικρών μηκών κύματος). Κάτι τέτοιο (που έμμεσα κάναμε στις ασκήσεις 6.1, 6.2 και 6.5) φέρνει στο προσκήνιο την αρχή της αντιστοιχίας

6.1.4 Αρχή της αντιστοιχίας σε σχέση με το φαινόμενο Compton.

Όταν η συχνότητα των φωτονίων της εισερχομένης δέσμης γίνεται πάρα πολύ μικρή ($\nu \rightarrow 0$ ή $\lambda \rightarrow \infty$), λόγω της πάρα πολύ μικρής και

⁷⁴ Για $\theta = 0^\circ$, υπάρχει μόνο η σκέδαση Thomson αφού, σύμφωνα με την σχέση 6.3, $\Delta\lambda = 0$

πρακτικά αμελητέας ποσοστιαίας μεταβολής του μήκους κύματος : $\Delta\lambda / \lambda \rightarrow 0$, (6.14)

το δεύτερο μέγιστο που οφείλεται στην σκέδαση Compton δεν μπορεί να παρατηρηθεί, αφού πρακτικά συμπίπτει με το μέγιστο που οφείλεται σκέδαση Thomsom . Τότε, όταν δηλαδή $v \rightarrow 0$, τα αποτελέσματα της κλασικής και της κβαντικής θεωρίας συμπίπτουν, και $\Delta\lambda \approx 0$.

Έτσι, επειδή η (6.14) είναι ισοδύναμη με : $\lambda_c \ll \lambda$ ή $\lambda_c / \lambda \ll 1$, (6.15)

η ορατή περιοχή του φάσματος, και πολύ περισσότερο η υπέρυθρη περιοχή ή η περιοχή των μικροκυμάτων και των ραδιοκυμάτων, θεωρούνται ότι ανήκουν στην περιοχή των πάρα πολύ μικρών συχνοτήτων ($v \rightarrow 0$) . Σ' αυτή την περιοχή, ανεξάρτητα από την χρήση της μάζας του ατόμου ή του ηλεκτρονίου στην (6.3) ή την (6.4), όπως μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε και από τις απαντήσεις των ασκήσεων 6.1, 6.2 και 6.5, τα αποτελέσματα της κλασικής και της κβαντικής θεωρίας συμπίπτουν. Βλέπουμε λοιπόν πως η αρχή της αντιστοιχίας, που γνωρίσαμε νωρίτερα στην περιγραφή της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος εξακολουθεί να ισχύει και να αποτελεί ένα βασικό χαρακτηριστικό της κβαντικής θεωρίας.

Η σχέση, 2.83α που όπως είδαμε, δηλώνει την περιοχή ισχύος της αρχής της αντιστοιχίας εξακολουθεί να ισχύει και εδώ, αφού η (6.14) μπορεί διαδοχικά να γραφεί⁷⁵ :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \ll 1 \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta v}{v} \ll 1 \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta E}{E} \ll 1 \quad .$$

(6.16)

Στην περίπτωση του φάσματος του μέλανος σώματος το περιεχόμενο της (2.83.α) φαίνεται να είναι κάπως διαφορετικό επειδή εκεί, λόγω του συνεχούς φάσματος που οφείλεται σε θερμική ακτινοβολία, αντί της ενέργειας E είχαμε εισαγάγει (για μικρά v) μια «τυπική» (μέση) τιμή $E \approx k_B T$. Στην περίπτωση του φαινομένου Compton, για το οποίο οι τυπικές ενέργειες των φωτονίων είναι της τάξεως των 10^5 eV, η θερμοκρασία T δεν παίζει κανένα ουσιαστικό ρόλο (πέρα από την πιθανή τήξη του στόχου ...)

αφού η ενέργεια $k_B T$ είναι συγκριτικά αμελητέα ακόμα και σε πολύ μεγάλες θερμοκρασίες, όπως η θερμοκρασία της επιφάνειας του ηλίου ($T \approx 6000 \text{ K}^\circ$)

Σε αντίθεση με τις πολύ χαμηλές συχνότητες, που επικρατεί η σκέδαση Thomson (επειδή η ενεργός μάζα του ηλεκτρονίου, σχέση 6.13, που μπορεί να φτάνει την μάζα του ατόμου είναι κατά πολύ μεγαλύτερη από την μάζα του φωτονίου), στις πολύ υψηλές συχνότητες επικρατεί η σκέδαση Compton και σχεδόν πάντα ελευθερώνεται κατά την σκέδαση ένα ηλεκτρόνιο. Έτσι, σε αναλογία με το παράδοξο της υπεριώδους καταστροφής, στις πολύ υψηλές συχνότητες (ενέργειες) των ακτίνων γ , η κλασική περιγραφή αποτυγχάνει τελείως.

Στην ενδιάμεση περιοχή των ακτίνων X, η σκέδαση Compton συνυπάρχει με τη σκέδαση Thomson (βλέπε σχήμα 6.2). Για περισσότερη συζήτηση ως προς τη σύγκριση των κλασικών και κβαντικών ιδεών για το φαινόμενο Compton, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο κλασικό βιβλίο του Bohm ⁷⁶.

Ασκήσεις

Θέματα πολλαπλών επιλογών

Επιλέξτε μια μόνο απάντηση (την πλησιέστερη) και αιτιολογήστε την.

6.10. Το σταθερό μέγιστο στα πειραματικά αποτελέσματα οφείλεται :

- A. Στην πρωτογενή δέσμη, που δεν έχει υποστεί καθόλου σκέδαση.
- B. Σε δέσμη σκεδασθείσα με άλλη γωνία σκεδάσεως, από την παρατηρούμενη.
- Γ. Σε ελαστική σκέδαση από ολόκληρο τον στόχο.
- Δ. Σε ελαστική σκέδαση από δέσμια ηλεκτρόνια .
- E. Σε μη ελαστική σκέδαση.
- ΣΤ. Σε σκέδαση από τον πυρήνα των ατόμων του στόχου.
- Z. Τίποτα από όλα αυτά.

6.11. Εάν, αντί για γραφίτη, χρησιμοποιηθεί σαν στόχος Αλουμίνιο στη σκέδαση Compton, με το ίδιο μήκος κύματος της προσπίπτουσας δέσμης ακτίνων X, τα αποτελέσματα του σχήματος 6.2 :

⁷⁵ Από τη σχέση $h\nu = c$, εύκολα προκύπτει με στοιχειώδη λογισμό $\lambda \Delta\nu + \nu \Delta\lambda = 0$, απ' όπου $\Delta\nu/\nu = -\Delta\lambda/\lambda$.

A. Θα μεταβληθούν αλλά δεν μπορούν να προβλεφθούν οι λεπτομέρειες χωρίς να γνωρίζουμε παραπέρα πληροφορίες για το Αλουμίνιο.

B. Θα μεταβληθεί μόνο η θέση του δεύτερου μεγίστου, αλλά δεν θα αλλάξει η θέση του πρώτου μεγίστου που οφείλεται στη σκέδαση Thomson

Γ. Θα μεταβληθεί μόνο η θέση του πρώτου μεγίστου.

Δ. Δεν θα αλλάξει τίποτα.

E. Θα αλλάξει η θέση των μεγίστων, αλλά δεν θα αλλάξει το σχήμα τους.

ΣΤ. Θα αλλάξει το σχήμα των μεγίστων, αλλά δεν θα αλλάξει η θέση τους.

Z. Τίποτα απ' όλα αυτά.

6.12. Εάν, αντί ακτίνων X, με $\lambda = 0.709 \text{ \AA}$, χρησιμοποιηθούν ακτίνες γ με μήκος κύματος $\lambda = 0.01 \text{ \AA}$ με τον ίδιο στόχο από γραφίτη, τα αποτελέσματα του σχήματος 6.2 :

A. Θα μεταβληθούν αλλά δεν μπορούν να προβλεφθούν οι λεπτομέρειες χωρίς να γνωρίζουμε παραπέρα πληροφορίες.

B. Θα μεταβληθεί μόνο η θέση του δεύτερου μεγίστου, αλλά δεν θα αλλάξει η θέση του πρώτου μεγίστου που οφείλεται στη σκέδαση Thomson

Γ. Θα μεταβληθεί μόνο η θέση του πρώτου μεγίστου.

Δ. Δεν θα αλλάξει τίποτα.

E. Θα αλλάξει η θέση των μεγίστων, αλλά δεν θα αλλάξει το σχήμα τους.

ΣΤ. Θα αλλάξει το σχήμα των μεγίστων, αλλά δεν θα αλλάξει η θέση τους.

Z. Τίποτα απ' όλα αυτά.

6.13 Η αρχή της αντιστοιχίας στην περίπτωση του φαινομένου Compton μπορεί να διατυπωθεί ως εξής :

A. Για πάρα πολύ μεγάλο πλήθος φωτονίων τα αποτελέσματα της κλασικής και της κβαντικής περιγραφής συμπίπτουν.

B. Για πάρα πολύ μικρές συχνότητες των φωτονίων της εισερχομένης ακτινοβολίας τα αποτελέσματα της κλασικής και της κβαντικής περιγραφής συμπίπτουν.

Γ. Για πάρα πολύ μεγάλες θερμοκρασίες του στόχου τα αποτελέσματα της κλασικής και της κβαντικής περιγραφής συμπίπτουν.

Δ. Όταν τα ηλεκτρόνια του στόχου δεν είναι δέσμια αλλά έχουν μεγάλες κινητικές ενέργειες τα αποτελέσματα της κλασικής και της κβαντικής περιγραφής συμπίπτουν.

⁷⁶ D. Bohm, "QUANTUM THEORY". Prentice Hall Inc., New York, 1951. (Dover edition 1989).

Ε. Όταν ο στόχος έχει μακροσκοπικές διαστάσεις τα αποτελέσματα της κλασικής και της κβαντικής περιγραφής συμπίπτουν.

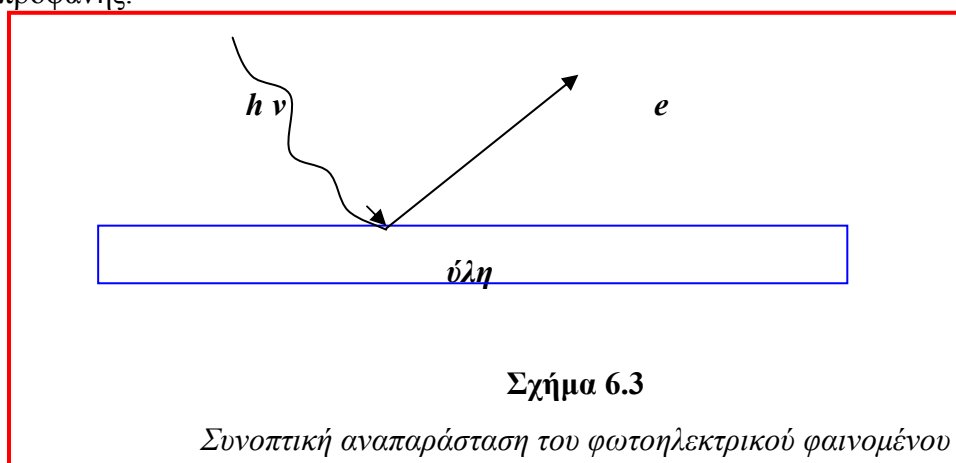
ΣΤ. Όταν το μήκος κύματος Compton, λ_c , είναι πάρα πολύ μικρό τα αποτελέσματα της κλασικής και της κβαντικής περιγραφής συμπίπτουν.

Ζ. Τίποτα απ' όλα αυτά.

6.2 Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

6.2.1 Περιγραφή του φαινομένου.

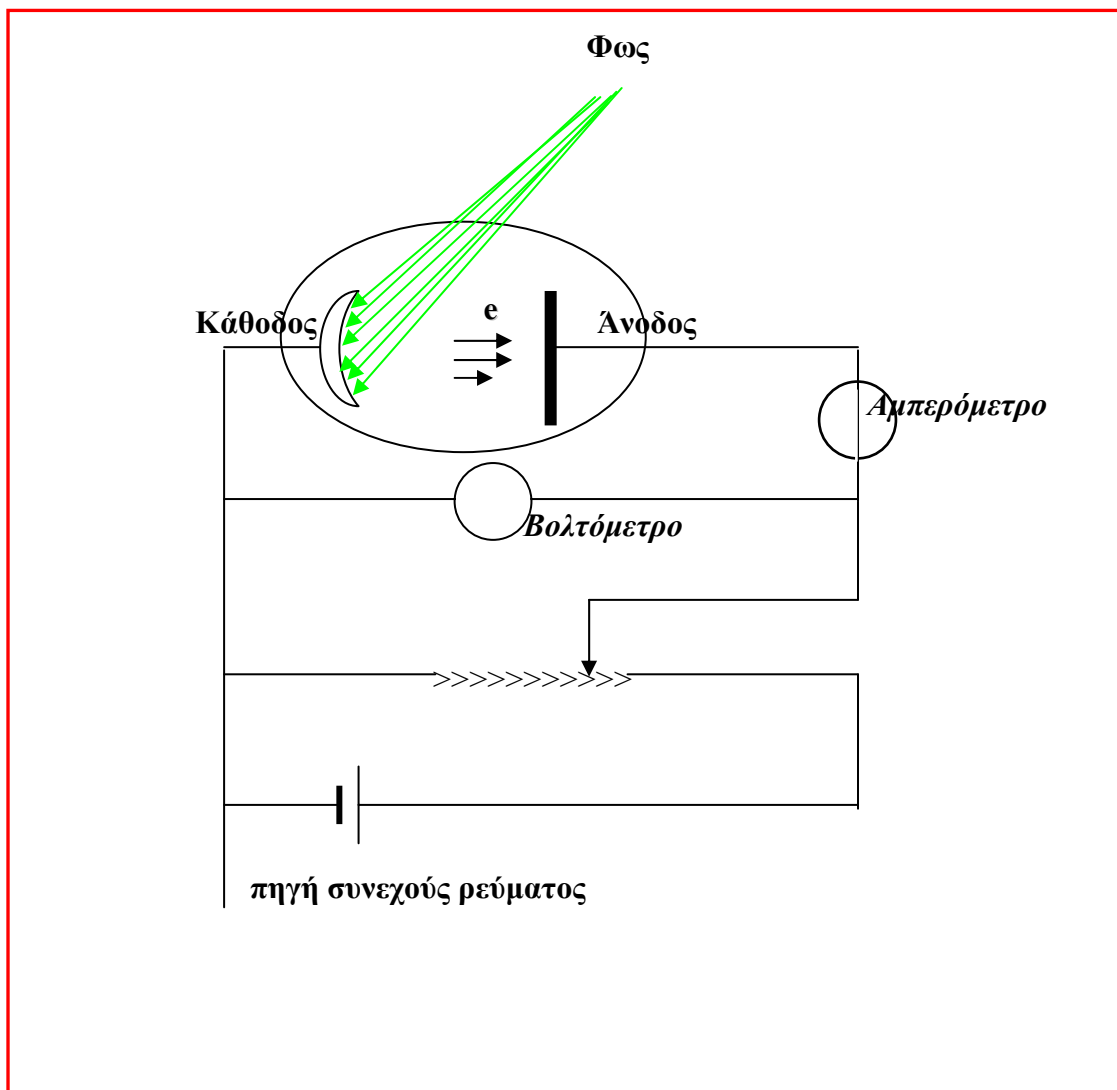
Έχει παρατηρηθεί, για πρώτη φορά από τον H. Hertz το 1887, πως μπορεί να εκπεμφθούν ηλεκτρόνια από μια μεταλλική επιφάνεια, όταν προσπίπτει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία στην επιφάνεια αυτή. Το φαινόμενο αυτό ονομάστηκε *φωτοηλεκτρικό φαινόμενο* και τα εκπεμπόμενα ηλεκτρόνια είναι γνωστά σαν *φωτοηλεκτρόνια*. Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, το οποίο φαίνεται σχηματικά στο σχήμα 6.3, είναι το κατ' εξοχήν κβαντικό φαινόμενο στο οποίο στηρίχθηκε η σωματιδιακή φύση του φωτός, που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα. Ενώ η κλασική ερμηνεία του φαινομένου και των νόμων που το διέπουν είναι αδύνατη, η κβαντική ερμηνεία μετά την εισαγωγή της έννοιας του φωτονίου (από τον Einstein) και των ιδιοτήτων του που συνοψίσαμε πριν, είναι, όπως θα δούμε παρακάτω, σχεδόν προφανής.



Η πειραματική συσκευή που χρησιμοποιείται για την μελέτη του φαινομένου, φαίνεται παραστατικά στο σχήμα 6.4. Αποτελείται ουσιαστικά από ένα γυάλινο αεροστεγή σωλήνα μέσα στον οποίο υπάρχουν δύο μεταλλικά ηλεκτρόδια συνδεδεμένα με μια πηγή συνεχούς ηλεκτρικού ρεύματος, της οποίας η τάση V μπορεί να μεταβάλλεται (με

ένα ποτενσιόμετρο) και καταγράφεται με ένα βολτόμετρο . Όταν φωτίσουμε την κάθοδο (το αρνητικό ηλεκτρόδιο) με μονοχρωματικό φως συχνότητας ν , ελευθερώνονται ηλεκτρόνια λόγω του φωτοηλεκτρικού φαινομένου, τα οποία συλλέγονται στο θετικό ηλεκτρόδιο (άνοδο) και ανιχνεύονται κατάλληλα από το ρεύμα i που διαρρέει το αμπερόμετρο. Όταν η συσκευή δεν φωτίζεται, το ρεύμα i είναι μηδέν.

Οι πειραματικές παράμετροι που μπορούμε να μεταβάλλουμε , πέρα από το μέταλλο της καθόδου, είναι η συχνότητα ν και η ένταση I της φωτεινής πηγής, καθώς και η τάση (και η πολικότητα) της πηγής. Οι φυσικές ποσότητες οι οποίες μπορούν να προσδιορισθούν πειραματικά είναι η ένταση του ρεύματος για διάφορες τιμές της ηλεκτρικής τάσης V (δηλαδή οι καμπύλες $i = i(V)$) και για επιλεγμένες τιμές των παραμέτρων ν και I , καθώς και η μέγιστη κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων. Η τελευταία ποσότητα προσδιορίζεται με αλλαγή της πολικότητας της πηγής. Όταν αλλάξουμε την πολικότητα της πηγής τα ηλεκτρόνια που δημιουργούνται στην κάθοδο από την φωτεινή πηγή, τα οποία θα μπορούσαν να φτάσουν στην άνοδο χωρίς την βοήθεια του ελκτικού ηλεκτρικού πεδίου, απωθούνται από την άνοδο, η οποία τώρα βρίσκεται σε διαφορά δυναμικού $-V$ ως προς την κάθοδο. Σαν αποτέλεσμα, μόνο τα ηλεκτρόνια με κινητική ενέργεια μεγαλύτερη ή ίση προς eV μπορούν να φτάσουν στην άνοδο και να μετρηθούν στο αμπερόμετρο .



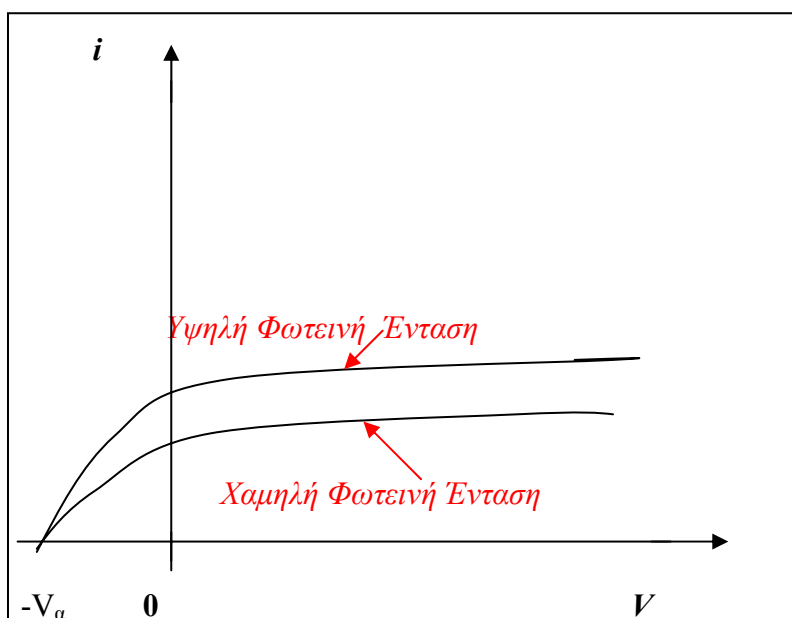
Σχήμα 6.4

Σχηματική απεικόνιση της συσκευής που χρησιμοποιείται για την πειραματική μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου

Μ' αυτό τον τρόπο μπορούμε να μετρήσουμε τη μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων, ρυθμίζοντας την τάση V , έτσι ώστε το ρεύμα i στο αμπερόμετρο να μηδενίζεται. Η τάση $-V = V_\alpha$ για την οποία επιτυγχάνουμε το μηδενισμό του ρεύματος ονομάζεται *τάση αποκοπής*. Σ' αυτή την περίπτωση κανένα ηλεκτρόνιο δεν φτάνει στην άνοδο και η μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων, $K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$, όπου v_{\max} η αντίστοιχη ταχύτητα, θα ισούται με $e V_\alpha$. Δηλαδή :

$$e V_\alpha = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \quad (6.17).$$

Οι χαρακτηριστικές πειραματικές καμπύλες του ηλεκτρικού ρεύματος i σαν συνάρτηση της τάσεως V , για δυο διαφορετικές τιμές της εντάσεως της φωτεινής ακτινοβολίας, έχουν την μορφή του σχήματος 6.5.

**Σχήμα 6.5**

Χαρακτηριστική καμπύλη ρεύματος ανόδου i , σαν συνάρτηση της εφαρμοζόμενης τάσης V , για δυο διαφορετικές εντάσεις της φωτεινής πηγής.

Όπως φαίνεται στο σχήμα, αυξάνοντας την τάση V αυξάνεται το πλήθος των ηλεκτρονίων που φτάνουν στην άνοδο στη μονάδα του χρόνου (1 sec) και έτσι αυξάνεται η τιμή του ρεύματος i . Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι η ένταση I της φωτεινής δέσμης καθορίζει το πλήθος των ηλεκτρονίων τα οποία ελευθερώνονται στην κάθοδο ανά δευτερόλεπτο, ενώ η τάση V καθορίζει το πλήθος των ηλεκτρονίων που φτάνουν στην άνοδο ανά δευτερόλεπτο και μετρώνται, ως ρεύμα i στο Αμπερόμετρο. Όπως φαίνεται στο σχήμα 6.5, από κάποια τιμή της τάσεως και πέρα δεν επέρχεται περαιτέρω αύξηση του ρεύματος και η χαρακτηριστική καμπύλη προσεγγίζει μια σταθερή τιμή ρεύματος. Η σταθερή αυτή τιμή είναι γνωστή σαν **ρεύμα κορεσμού** και οφείλεται στο γεγονός ότι σ' αυτή την περίπτωση όλα τα παραγόμενα ηλεκτρόνια στην κάθοδο στη μονάδα του χρόνου φτάνουν στην άνοδο. Έτσι, παραπέρα αύξηση της τάσεως δεν οδηγεί σε παραπέρα αύξηση του ρεύματος. Από τις καμπύλες του σχήματος 3.2 επίσης φαίνεται πως όταν η τάση είναι μηδέν εξακολουθούν να υπάρχουν αρκετά ηλεκτρόνια που φτάνουν μόνα τους (με την κινητική ενέργεια που έχουν κατά την εκπομπή τους) στη άνοδο, χωρίς την βοήθεια του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ καθόδου – ανόδου. Για να μηδενιστεί το ρεύμα θα πρέπει, όπως είδαμε και πιο πάνω, η τάση να γίνει αρνητική και ίση κατ' απόλυτη τιμή προς την τάση αποκοπής.

6.2.2 Πειραματικοί νόμοι.

Μεταβάλλοντας τις παραμέτρους του πειράματος και καταγράφοντας τα πειραματικά δεδομένα, μπορούμε να διαπιστώσουμε τους πειραματικούς νόμους στους οποίους κατέληξαν στις αρχές του αιώνα διάσημοι πειραματικοί φυσικοί (όπως ο H. Hertz, ο J. J. Thomson, ο Ph. Lenard, μαθητής του Hertz και ο R.A. Millikan, δέκα χρόνια μετά τη θεωρητική ερμηνεία του Einstein) που ασχολήθηκαν με το φαινόμενο. Οι νόμοι αυτοί συνοψίζονται ως εξής :

- 1) Ηλεκτρόνια μπορούν να εκπεμφθούν μόνο όταν η μεταλλική επιφάνεια φωτίζεται.
- 2) Για κάποιο συγκεκριμένο υλικό καθόδου, υπάρχει μια κρίσιμη ελάχιστη συχνότητα ν_0 της προσπίπτουσας ακτινοβολίας κάτω από την οποία είναι αδύνατον να παρουσιαστεί το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, ανεξάρτητα από το πόσο μεγάλη μπορεί να είναι η ένταση της ακτινοβολίας. Η συχνότητα ν_0 , η οποία εξαρτάται μόνο από το υλικό

της καθόδου, αναφέρεται συνήθως ως *κρίσιμη συχνότητα* ή *οριακή συχνότητα*, ή *συχνότητα κατωφλίου*.

3) Η εκπομπή των ηλεκτρονίων είναι ουσιαστικά ακαριαία, ανεξάρτητα από την ένταση του προσπίπτοντος φωτός (ο χρόνος που μεσολαβεί από τη στιγμή του φωτισμού της καθόδου μέχρι την εκπομπή των φωτοηλεκτρονίων είναι μικρότερος από 10^{-9} sec).

4) Εάν και εφόσον η συχνότητα ν της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερη από την οριακή συχνότητα ν_0 , η κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων έχει μια συνεχή κατανομή τιμών από 0 μέχρι μια μέγιστη τιμή K_{\max} . Η μέγιστη τιμή K_{\max} της κινητικής ενέργειας είναι γραμμική συνάρτηση της συχνότητας ν και δεν εξαρτάται από την ένταση της ακτινοβολίας.

5) Με την προϋπόθεση ότι $\nu > \nu_0$, ο αριθμός των ηλεκτρονίων που εκπέμπονται ανά δευτερόλεπτο από την επιφάνεια του μετάλλου (δηλαδή η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος i), είναι ανάλογος της έντασης του προσπίπτοντος φωτός, I .

6.2.3 Απόπειρα κλασικής ερμηνείας.

Κατ' αρχήν η κλασική φυσική, όπως και στην περίπτωση της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος, μπορεί να δώσει μια πρώτη εξήγηση για το φαινόμενο. Είναι γνωστό ότι η μεταλλική επιφάνεια της καθόδου περιέχει ένα μεγάλο πλήθος (της τάξεως του 10^{23}) από ελεύθερα ηλεκτρόνια (δηλαδή ηλεκτρόνια που δεν είναι δέσμια σ' ένα άτομο, αλλά που μπορούν να κινούνται πρακτικά ελεύθερα μέσα σ' όλο το μέταλλο). Αυτά τα ηλεκτρόνια υπό την επίδραση του ηλεκτρικού πεδίου της προσπίπτουσας ακτινοβολίας μπορούν να κερδίσουν αρκετή κινητική ενέργεια, ώστε να υπερνικήσουν το έργο που απαιτείται για να αποσπασθούν τελικά από τη μεταλλική επιφάνεια. Σ' αυτή την κλασική εικόνα, η συχνότητα της ακτινοβολίας δεν έχει κανένα πρωταρχικό ρόλο. Πριν εξετάσουμε τις παραπέρα συνέπειες αυτού του μηχανισμού και συγκρίνουμε με τους πειραματικούς νόμους, ας δούμε ένα ποσοτικό παράδειγμα (με ρεαλιστικές τιμές παραμέτρων).

Παράδειγμα 6.1

Ακτινοβολία εντάσεως $I = 10^{-3}$ W/m² προσπίπτει σε μια μεταλλική επιφάνεια από αλουμίνιο. Η ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για να αποσπασθεί ένα ηλεκτρόνιο από την επιφάνεια του αλουμινίου είναι περίπου 4 eV. Ας υποθέσουμε ότι το ηλεκτρόνιο που αποσπάται είναι περιορισμένο μέσα στο μέταλλο σε μια ακτίνα r της τάξεως της ατομικής ακτίνας του αλουμινίου ($r \approx 10^{-10}$ m) και ας υποθέσουμε, επιπλέον, ότι η

προσπίπτουσα ακτινοβολία έχει μια ομοιογενή και συνεχή κατανομή. Εκτιμείστε τον χρόνο που χρειάζεται το ηλεκτρόνιο για να αποσπασθεί.

Απάντηση

Η ενέργεια ανά μονάδα χρόνου (Ισχύς) P που προσπίπτει στην ενεργό επιφάνεια που βρίσκεται το ηλεκτρόνιο (κυκλικός δίσκος, ακτίνας r) είναι, με βάση τον ορισμό της έντασης :

$$P = I (\pi r^2) = (10^{-3} \text{ W/m}^2) \times (3.14 \times 10^{-20} \text{ m}^2) \approx 3 \times 10^{-23} \text{ Joule / sec} \approx 3 \times 10^{-4} \text{ eV / sec.}$$

Αφού γνωρίζουμε την ισχύ P μπορούμε να βρούμε τον χρόνο Δt , που χρειάζεται για να απορροφηθεί ενέργεια E ίση με 4 eV που απαιτείται για να αποσπασθεί το ηλεκτρόνιο, από τη σχέση :

$$\Delta t = E / P = 4 \text{ eV} / (6 \times 10^{-4} \text{ eV / sec}) \approx \underline{\underline{7 \times 10^3 \text{ sec}}}$$

Όπως βλέπουμε, ο χρόνος αυτός είναι τεράστιος σε σχέση με τον χρόνο των 10^{-9} sec , που είναι, όπως προκύπτει πειραματικά, ένα πάνω όριο για τον χρόνο που μπορεί να μεσολαβεί από την στιγμή που φωτίζεται η μεταλλική επιφάνεια μέχρι την στιγμή που εκπέμπονται τα φωτοηλεκτρόνια. Το αποτέλεσμα αυτό δεν αλλάζει ουσιαστικά ακόμη και εάν θεωρήσουμε πολύ ισχυρότερη ένταση πηγής, π.χ. ένα λέιζερ Ηλίου – Νέου με ένταση 120 W/m^2 , και χρησιμοποιήσουμε άλλο μέταλλο, π.χ. Κ, με μικρότερο έργο εξαγωγής ηλεκτρονίων ίσο προς 2.3 eV, ο χρόνος Δt είναι της τάξεως δεκάτων του δευτερολέπτου :

$$\Delta t = 0.10 \text{ sec, σε πλήρη ασυμφωνία με το πείραμα.}$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η κλασική ερμηνεία έχει πολύ σοβαρό πρόβλημα με το πειραματικό αποτέλεσμα (3).

Έχει όμως ακόμη μεγαλύτερο πρόβλημα με το πειραματικό συμπέρασμα (2), αφού κλασικά η συχνότητα της ακτινοβολίας, σε αντίθεση με την ένταση I , δεν έχει καμία συνέπεια στον μηχανισμό εξαγωγής των ηλεκτρονίων. Αυτό που ίσως θα περιμέναμε με βάση την κλασική ερμηνεία θα ήταν να μη συμβαίνει πρακτικά το φαινόμενο για πάρα πολύ μικρές εντάσεις I , αφού τότε με βάση το παράδειγμα 6.1 θα απαιτούντο εξαιρετικά μεγάλοι χρόνοι για να εκπεμφθούν τα φωτοηλεκτρόνια και να λάβει χώρα το φαινόμενο. Για τον ίδιο λόγο, επειδή δηλαδή η ενέργεια δεν εξαρτάται από την συχνότητα αλλά από το πλάτος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος, ο κλασικός μηχανισμός είναι σε πλήρη αντίθεση και με το πειραματικό συμπέρασμα (4).

Τα πειραματικά αποτελέσματα, λοιπόν, (κυρίως τα 2, 3, 4) σηματοδοτούν την πλήρη αποτυχία της κλασικής κυματικής θεωρίας να ερμηνεύσει το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Κάτι τέτοιο, βέβαια, ήταν αναμενόμενο μετά από την διεξοδική συζήτηση για την σωματιδιακή θεωρία του Einstein στην προηγούμενη υποενότητα.

6.2.4 Πλήρης κβαντομηχανική ερμηνεία.

Η κβαντική θεωρία των φωτονίων μπορεί να ερμηνεύσει όλες τις πειραματικές παρατηρήσεις.

Όπως είδαμε στην ενότητα 2.4, ένα φωτόνιο έχει ενέργεια $E_{\phi} = h \nu$, η οποία εξαρτάται από την συχνότητα μόνο. Κάτι που αναδεικνύει την συχνότητα της ακτινοβολίας σαν την κεντρική παράμετρο του προβλήματος. Αυτή η ενέργεια μπορεί να απορροφηθεί (σύμφωνα με την ιδιότητα υπ' αριθμόν 5 των φωτονίων, της ενότητας 2.4) από ένα ηλεκτρόνιο και να χρησιμοποιηθεί σε έργο για την εξαγωγή του από το μέταλλο (W). Το περίσσειμα της ενέργειας θα μετατραπεί σε κινητική ενέργεια του εξερχομένου ηλεκτρονίου ($K = \frac{1}{2} m v^2$). Δηλαδή: $h \nu = \frac{1}{2} m v^2 + W$. (6.18)

Το έργο W, που απαιτείται για την εξαγωγή ενός ηλεκτρονίου από ένα συγκεκριμένο μέταλλο εξαρτάται από το υλικό και (λιγότερο) από την ενεργειακή κατάσταση και τη θέση του ηλεκτρονίου μέσα στο μέταλλο. Για τα εξωτερικά ηλεκτρόνια που βρίσκονται κοντά στην επιφάνεια το έργο που απαιτείται για την εξαγωγή τους από το μέταλλο είναι ελάχιστο. Το ελάχιστο αυτό έργο, σε αντίθεση με το έργο W, είναι μια χαρακτηριστική ιδιότητα του μετάλλου, ονομάζεται *έργο εξόδου* (ή *έργο εξαγωγής*) και συμβολίζεται με το γράμμα Φ . Όταν το έργο W στην (6.18) παίρνει (για σταθερή συχνότητα ν) την ελάχιστη τιμή του Φ , τότε η αντίστοιχη κινητική ενέργεια γίνεται μέγιστη, $K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$

και η (6.18) γράφεται:

$$h \nu = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 + \Phi \quad (6.19)$$

Η εξίσωση (6.19), που οφείλεται στον Einstein, είναι η κεντρική εξίσωση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου, αφού απ' αυτήν προκύπτουν όλες οι χαρακτηριστικές ιδιότητες και επαληθεύονται όλοι ανεξαιρέτως οι πειραματικοί νόμοι.

Σαν παράδειγμα, από την 6.19 βλέπουμε αμέσως ότι η μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων εξαρτάται μόνο από την συχνότητα ν και το μέταλλο της καθόδου,

μέσω του έργου εξόδου Φ , που δίνεται στον πίνακα 6.1 για μερικά γνωστά μέταλλα. Η ένταση της φωτεινής ακτινοβολίας, που σχετίζεται με το πλήθος των φωτονίων, σύμφωνα και με την (2.4.14), δεν έχει καμία σχέση με την κινητική ενέργεια K_{\max} , οποία προσδιορίζεται πειραματικά από την τάση αποκοπής (βλέπε σχέση 6.17).

Συνδυάζοντας την (6.17) με την (6.19) βρίσκουμε :

$$e V_a = h \nu - \Phi \quad . \quad (6.20)$$

Σύμφωνα με την (6.20), η γραφική παράσταση της τάσης αποκοπής σαν συνάρτηση της συχνότητας ν της ακτινοβολίας θα είναι μια ευθεία γραμμή, η κλίση της οποίας θα μας δίνει τον λόγο h/e . Αυτή τη μέθοδο χρησιμοποίησε ο Millikan το 1917 για να επαληθεύσει την θεωρία του Einstein για τα φωτόνια, προσδιορίζοντας και επαληθεύοντας ταυτόχρονα την τιμή της σταθεράς h ανεξάρτητα από την τιμή που προσδιόρισε ο Planck με βάση την ακτινοβολία του μέλανος σώματος. Ο Millikan βρήκε για τον λόγο h/e την τιμή:

$h/e = 4.1 \times 10^{-15} \text{ V sec}$. Την τιμή της σταθεράς h προσδιόρισε ο Millikan γνωρίζοντας την τιμή του φορτίου του ηλεκτρονίου e , που ο ίδιος είχε προσδιορίσει ωρύτερα με το κλασικό πείραμα της σταγόνας.

Πίνακας 6.1

Έργο εξόδου μερικών μετάλλων

Έργο εξόδου (Φ) μερικών Μετάλλων			
Μέταλλο	Φ (eV)	Μέταλλο	Φ (eV)
Al	4.3	K	2.3
Be	5.0	Mn	3.7
CaΨ Ca	2.9	Na	2.5
Cs	2.1	Ni	5.2
Cu	4.7	Pb	4.3
Fe	4.5	Pt	5.7
Hg	4.5	Zn	4.3

6.2.5 Πρακτικές εφαρμογές του φωτοηλεκτρικού φαινομένου

Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, πέρα από την μεγάλη επιστημονική και ιστορική του σημασία για την φωτονική θεωρία της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας, έχει πολλές πρακτικές εφαρμογές, σε συστήματα, όπως τα φωτοστοιχεία τα οποία στηρίζονται στην ανίχνευση φωτός (και γενικότερα ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας), και μετατροπή της σε ηλεκτρικό ρεύμα. Τέτοια συστήματα, τα οποία συνήθως λειτουργούν με μικρή ή πολύ μικρή ένταση ακτινοβολίας, και τα οποία βασίζονται στην μετατροπή του φωτεινού σήματος σε ηλεκτρικό και στην εν συνεχεία ενίσχυση του, είναι διάφορα συστήματα συναγεμίων και αυτοματισμού (όπως αυτόματο άνοιγμα και κλείσιμο θυρών). Όταν ένας άνθρωπος διακόπτει την ροή μιας φωτεινής δέσμης, τότε η απότομη πτώση του ρεύματος στο αντίστοιχο κύκλωμα ενεργοποιεί έναν διακόπτη (συνήθως ένα σωληνοειδές) που θέτει σε λειτουργία κάποιο κουδούνι ή κάποιον μηχανισμό ανοίγματος της πόρτας. Σε συστήματα συναγεμίων συνήθως χρησιμοποιείται υπεριώδης ή, μερικές φορές, υπέρυθρος ακτινοβολία, επειδή δεν είναι ορατές. Επίσης, πολλοί ανιχνευτές καπνού φωτιάς (καπνού) χρησιμοποιούν το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο για να ανιχνεύσουν εξαιρετικά μικρές ποσότητες καπνού, οι οποίες διακόπτουν την ροή μια φωτεινής δέσμης και μεταβάλουν το ηλεκτρικό ρεύμα στο κατάλληλο κύκλωμα. Το ίδιο κύκλωμα χρησιμοποιείται και σε φωτόμετρα σε φωτογραφικές εφαρμογές, αφού όσο λαμπρότερο (μεγαλύτερης εντάσεως) είναι το φως, τόσο μεγαλύτερο θα είναι το ρεύμα στο κύκλωμα. Παρόμοιοι, αλλά πολύ μικρότεροι, μηχανισμοί χρησιμοποιούνται για διαγνωστικούς σκοπούς στη ιατρική, όπως για την μέτρηση της ρευστότητας του αίματος. Σε πολλές επιστημονικές και άλλες εφαρμογές γίνεται εκτεταμένη χρήση διατάξεων που περιλαμβάνουν φωτοστοιχεία (όπως π.χ. σε φασματοφωτόμετρα) για να μετρήσουν την ένταση του φωτός (της ακτινοβολίας, γενικότερα).

Επίσης, στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο βασίζονται και οι ειδικοί ανιχνευτές απειροελάχιστων ποσοτήτων φωτός, που ονομάζονται **φωτοπολλαπλασιαστές**. Οι φωτοπολλαπλασιαστές ουσιαστικά περιλαμβάνουν μια σειρά από ηλεκτρόδια με όλο και υψηλότερα (θετικά) δυναμικά, κατάλληλα τοποθετημένα, ώστε τα φωτοηλεκτρόνια διαδοχικά να επιταχύνονται σε όλο και υψηλότερες κινητικές ενέργειες και να απελευθερώνουν κατά η πρόσκρουση τους με κάθε ηλεκτρόδιο όλο και περισσότερα ηλεκτρόνια. Δημιουργείται έτσι ένας μηχανισμός χιονοστιβάδας με τελικό αποτέλεσμα την δημιουργία ενός τεράστιου πλήθους ηλεκτρονίων (της τάξεως του 10^6 ηλεκτρόνια)

για κάθε ένα φωτόνιο που προσπίπτει στην (φωτο)κάθοδο. Τέλος, το φωτοηλεκτρικό και άλλα συναφή φαινόμενα, χάρη στην ανακάλυψη των οπτικών ινών και της τεχνολογίας των λέιζερ αποτελούν βασικά συστατικά ενός από τους πιο σύγχρονους τεχνολογικούς κλάδους του κλάδου της **Οπτοηλεκτρονικής**.

Ερωτήσεις

6.3 Διαθέτουμε δύο μονοχρωματικές δέσμες : α) μία ασθενή δέσμη υπεριώδους φωτός, μήκους κύματος $\lambda \cong 3500 \text{ \AA}$, και β) μια κατά πολύ (10φορές) ισχυρότερη δέσμη υπερύθρου φωτός, μήκους κύματος $\lambda \cong 9000 \text{ \AA}$. Ποια από τις δύο δέσμες πιστεύετε ότι είναι περισσότερο επικίνδυνη για ένα άνθρωπο ο οποίος είναι εκτεθειμένος σ' αυτές επί μία ώρα.

Αιτιολογείστε και επεξηγήστε πλήρως την απάντησή σας.

6.4 Τι αλλάζει στην απάντηση της προηγούμενης ερώτησης εάν οι δύο δέσμες έχουν την ίδια ένταση ;

6.5 Στην μελέτη του φαινομένου Compton θεωρήσαμε τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας του μετάλλου ως ελεύθερα (μηδενική ενέργεια συνδέσεως). Αντίθετα, στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο θεωρήσαμε τα ηλεκτρόνια του ίδιου τύπου να είναι συνδεδεμένα στο μέταλλο με ενέργεια ίση τουλάχιστον με το έργο εξόδου. Πως εξηγείται αυτή η «ασυνέπεια»;

Ασκήσεις

6.14 Θεωρήστε μια δέσμη λέιζερ εντάσεως 150 W/m^2 η οποία προσπίπτει σε μια μεταλλική επιφάνεια από Νάτριο. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του πίνακα 6.1 βρείτε κλασικά τον χρόνο που χρειάζεται για να εκπεμφθεί ένα φωτοηλεκτρόνιο από την επιφάνεια του Νατρίου.

Πώς αλλάζει η απάντηση κβαντομηχανικά ;

6.15 Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του πίνακα 6.1 βρείτε για το Νάτριο την οριακή συχνότητα κάτω από την οποία δεν παρατηρείται φωτοηλεκτρικό φαινόμενο.

6.16 Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του πίνακα 6.1, βρείτε ποια θα ήταν η μέγιστη κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων που θα μπορούσαν να εκπεμφθούν από μια μεταλλική επιφάνεια (α) Νατρίου (β) Καισίου και (γ) Χαλκού, όταν φωτίζονται με μονοχρωματικό κόκκινο φως ;

6.17 Η κινητική ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων που παράγονται όταν φως μήκους κύματος 3000 \AA πέσει σε μια μεταλλική επιφάνεια βρίσκεται στην περιοχή από μηδέν

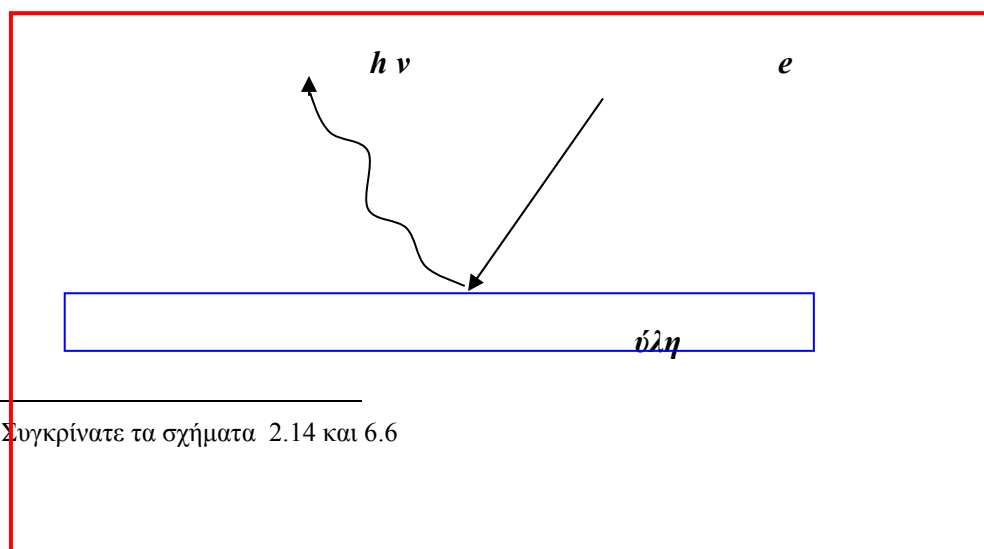
έως 4.0×10^{-11} J. Βρείτε το δυναμικό που πρέπει να εφαρμοσθεί για να σταματήσει η εκπομπή ηλεκτρονίων. Ποιά είναι η οριακή συχνότητα ν_0 και το αντίστοιχο οριακό μήκος κύματος;

6.3 Ακτινοβολία Πεδήσεως

6.3.1 Περιγραφή του φαινομένου.

Όπως είδαμε και στο εδάφιο 1.4.3, όταν ένα ηλεκτρικό φορτίο, για την ακρίβεια ένα ηλεκτρικά φορτισμένο σωματίο, όπως το ηλεκτρόνιο, επιταχύνεται ή επιβραδύνεται, εκπέμπει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Ειδικά στην περίπτωση που το ηλεκτρικό φορτίο επιβραδύνεται, η εκπεμπομένη ακτινοβολία είναι γνωστή ως **ακτινοβολία πεδήσεως**, από την λέξη πέδηση, η οποία σημαίνει φρενάρισμα. Η πιο συνηθισμένη και χαρακτηριστική περίπτωση ακτινοβολίας πεδήσεως συμβαίνει όταν ηλεκτρόνια υφίστανται μεγάλες και απότομες επιβραδύνσεις κατά την πρόσκρουσή τους με μεγάλη ταχύτητα πάνω σε μια μεταλλική επιφάνεια. Αυτή η διαδικασία, με την οποία συνήθως παράγονται οι ακτίνες X, μπορεί να θεωρηθεί, από την σκοπιά της κβαντικής θεωρίας σαν το **αντίστροφο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο**, όπως φαίνεται παραστατικά και στο σχήμα 6.6⁷⁷.

Φυσικά, δεν χρειάζεται να καταφύγουμε στην κβαντική θεωρία για να ερμηνεύσουμε την προέλευση της ακτινοβολίας, αφού η κλασική φυσική έχει ήδη ερμηνεύσει την αρχή του φαινομένου. Τι γίνεται όμως με το φάσμα της εκπεμπομένης ακτινοβολίας ;



⁷⁷ Συγκρίνατε τα σχήματα 2.14 και 6.6

Σχήμα 6.

Συμβολική αναπαράσταση του φαινομένου της ακτινοβολίας πεδήσεως

Μια πειραματική διάταξη για να μελετήσουμε την ακτινοβολία πεδήσεως φαίνεται σχηματικά στο σχήμα 6.7. Μια θερμαινόμενη κάθοδος C χρησιμεύει για την παραγωγή ηλεκτρονίων τα οποία εν συνεχεία επιταχύνονται από μια (υψηλή) ηλεκτρική τάση V, και προσπίπτουν στο θετικό ηλεκτρόδιο της ανόδου A, αφού στο μεταξύ έχουν αποκτήσει μια κινητική ενέργεια K ίση προς $e \text{ επί } V$. Όταν τα ηλεκτρόνια προσκρούουν στο ηλεκτρόδιο της ανόδου, με μεγάλες ταχύτητες υφίστανται μη ελαστική κρούση από τα άτομα, σκεδάζονται, χάνουν ενέργεια και επιβραδύνονται. Τελικά, ύστερα από μερικές διαδοχικές κρούσεις ακινητοποιούνται. Κατά την διάρκεια των διαδοχικών επιβραδύνσεων, λόγω των (μη ελαστικών) κρούσεων με τα άτομα της ανόδου, η ενέργεια που χάνουν τα ηλεκτρόνια εκπέμπεται ως ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία.

Το φάσμα αυτής της ακτινοβολίας, όπως απεικονίζεται σε μια κατάλληλη φωτογραφική πλάκα, φαίνεται στο σχήμα 6.8 για 4 διαφορετικές τιμές της τάσης V. Όπως παρατηρούμε, το φάσμα έχει τα εξής χαρακτηριστικά :

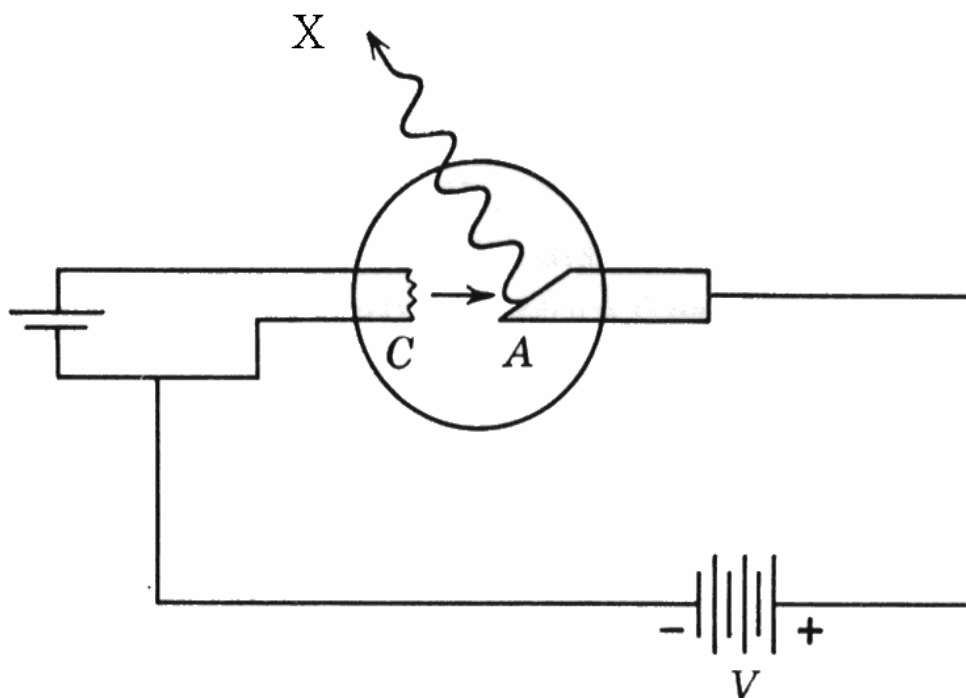
α) Είναι συνεχές.

β) Με την αύξηση της τάσης V, αυξάνεται και η ένταση της ακτινοβολίας

γ) Υπάρχει ένα ελάχιστο μήκος κύματος (μια μέγιστη συχνότητα) κάτω από το οποίο δεν

εκπέμπεται καθόλου ακτινοβολία πεδήσεως.

και δ) Το ελάχιστο μήκος κύματος, λ_0 , εξαρτάται από την τάση V. Αυξάνοντας την τάση V ελαττώνεται το μήκος κύματος λ_0 .

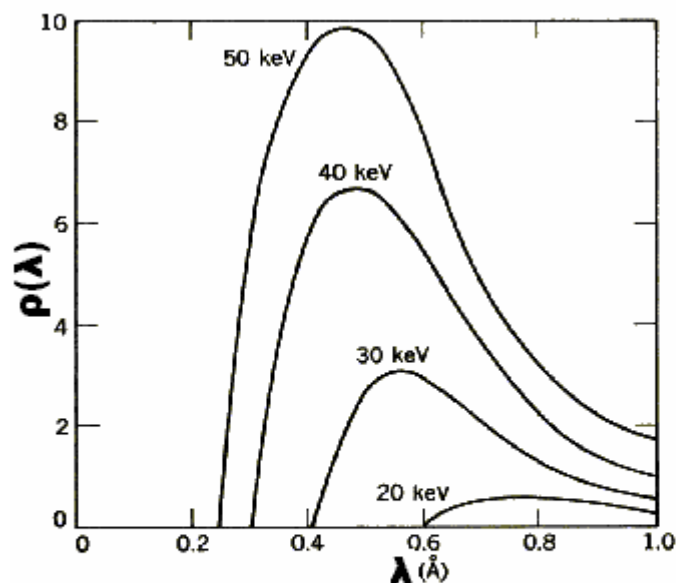


Σχήμα 6.7

Πειραματική Διάταξη για την μελέτη της ακτινοβολίας Πεδήσεως.

Η συσκευή χρησιμοποιείται για την παραγωγή ακτίνων X.

Είναι προφανές, σύμφωνα με τα προαναφερθέντα, πως η εξάρτηση του φάσματος από την ηλεκτρική διαφορά δυναμικού μεταξύ ανόδου - καθόδου, υποδηλώνει εξάρτηση από την κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων. Γεννάται, λοιπόν, ένα εύλογο ερώτημα : Μπορεί η κλασική θεωρία, η οποία ερμηνεύει, όπως είδαμε, την εμφάνιση της ακτινοβολίας πεδήσεως, να ερμηνεύσει τα τέσσερα αυτά χαρακτηριστικά του φάσματος ; Η απάντηση, όπως εύκολα μπορεί να μαντέψει κανείς, κυρίως για τα δύο τελευταία χαρακτηριστικά (δ και ϵ) είναι μάλλον όχι. και τούτο γιατί στην κλασική φυσική δεν υπάρχει άμεσος συσχετισμός μεταξύ μήκους κύματος (ή συχνότητας) και ενέργειας, όπως η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων.

**Σχήμα 6.8**

Φασματική κατανομή της ακτινοβολίας πεδήσεως ως προς το μήκος κύματος, $\rho(\lambda)$ σαν συνάρτηση του μήκους κύματος λ για τέσσερις υψηλές τιμές της τάσης V :

$$V = 20 \text{ kV}, 30 \text{ kV}, 40 \text{ kV} \text{ και } 50 \text{ kV}.$$

Οι αντίστοιχες τιμές της κινητικής ενέργειας των ηλεκτρονίων, σε keV, φαίνονται στο σχήμα.

Ασκήσεις

6.21 Ποια χαρακτηριστικά του φάσματος μπορεί, κατά την γνώμη σας, να εξηγήσει η κλασική θεωρία ;

6.22 Μπορεί η κλασική φυσική να εξηγήσει το χαρακτηριστικό (β), δηλαδή την αύξηση της έντασης της ακτινοβολίας όταν αυξάνεται η τάση V ;

Υπόδειξη : Αναλογιστείτε πως μπορεί (εάν μπορεί) η μεταβολή της κινητικής ενέργειας των ηλεκτρονίων να επηρεάσει το πλήθος των ανά μονάδα χρόνου ηλεκτρονίων που «φρενάρουν».

6.3.2 Ερμηνεία του φαινομένου με βάση την κβαντική θεωρία.

Όπως είδαμε πριν, ένα ηλεκτρόνιο πριν την πρόσκρουση του με το υλικό της ανόδου έχει αποκτήσει μια κινητική ενέργεια K :

$$K = eV \quad (6.21)$$

Μετά την (πρώτη) πρόσκρουση το ηλεκτρόνιο συνεχίζει την κίνηση του με μικρότερη κινητική ενέργεια K' , και συνήθως υφίσταται αρκετές διαδοχικές συγκρούσεις μέχρι να ακινητοποιηθεί τελείως. Κατά την κβαντική θεωρία, αυτή η διαφορά κινητικής ενέργειας χρησιμοποιείται για την δημιουργία ενός φωτονίου συχνότητας ν . Σύμφωνα με την αρχή διατηρήσεως της ενέργειας :

$$K - K' = h\nu \quad (6.22)$$

Το ποσό της ενέργειας που χάθηκε ($K - K'$) και κατά συνέπεια η συχνότητα και το μήκος κύματος του φωτονίου, σύμφωνα με την (6.22) μπορεί να πάρει οποιαδήποτε (μη αρνητική) τιμή επιτρέπουν οι παράμετροι του πειράματος. Άρα θα έχουμε, όπως και πράγματι συμβαίνει, ένα συνεχές φάσμα.

Η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η διαφορά $K - K'$ είναι μηδέν ($K = K'$) και αντιστοιχεί σε ελαστική κρούση χωρίς απώλεια ενέργειας και εκπομπή φωτονίου.

Απ' την άλλη μεριά, για δοσμένη τάση (άρα και κινητική ενέργεια K , σύμφωνα με την σχέση 6.21) η μέγιστη τιμή της διαφοράς $K - K'$ συμβαίνει όταν $K' = 0$ και αντιστοιχεί σε ολική μετατροπή της κινητικής ενέργειας K , με την πρώτη κρούση, στον σχηματισμό φωτονίου με την μέγιστη δυνατή ενέργεια (και συχνότητα) $E_{max} = h\nu_{max}$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι υπάρχει μια **οριακή μέγιστη συχνότητα**, που δίνεται από τη σχέση,

$$h\nu_{max} = eV \quad (6.23)$$

και κατά συνέπεια ένα **οριακό ελάχιστο μήκος κύματος** $\lambda_0 = c / \nu_{max}$:

$$\lambda_0 = \frac{hc}{eV} \quad (6.24)$$

Επειδή, $hc = 12,400 \text{ eV } \text{\AA}$, εάν έχουμε την τάση V σε Volts, ο παρανομαστής, εκφράζεται από το ίδιο νούμερο σε ηλεκτρονιοβόλτ (eV) και (6.24) γράφεται :

$$\lambda_0 (\text{\AA}) = \frac{12,400}{V (\text{Volts})} \quad (6.25)$$

Βλέπουμε πως η κβαντική θεωρία εξηγεί όχι μόνο την ύπαρξη του οριακού μήκους κύματος λ_0 , αλλά και την εξάρτησή του από την τάση V μεταξύ καθόδου ανόδου. Επιπλέον, από την (6.25) γίνεται φανερό (βλέπε το παράδειγμα 6.21) ότι για υψηλές τάσεις, της τάξεως των μερικών δεκάδων χιλιάδων Volts (όπως στην περίπτωση του σχήματος 6.8), τα οριακά μήκη κύματος της ακτινοβολίας πεδήσεως είναι μερικά δέκατα του \AA ngstrom ($1 \text{\AA} = 10^{-10} \text{ m}$) και ανήκουν στην περιοχή των ακτίνων X.

Η Κβαντική θεωρία, λοιπόν, όπως ήταν αναμενόμενο, μπορεί να εξηγήσει όλα τα χαρακτηριστικά του φάσματος (βλέπε και άσκηση 6.23).

Παράδειγμα 6.21

Βρείτε το οριακό μήκος κύματος όταν η τάση V μεταξύ ανόδου – καθόδου είναι 10000 V.

Απάντηση

Η σχέση (6.25) μας δίνει : $\lambda_0 = \frac{12400}{10000} \text{ \AA} = 1.24 \text{ \AA}$

Ασκήσεις

6.23 Δικαιολογείστε ότι η κβαντική θεωρία εξηγεί και το χαρακτηριστικό (β) του φάσματος της ακτινοβολίας πεδήσεως.

6.24 Δείξτε ότι καμπύλες του σχήματος 6.8 επαληθεύουν την σχέση (6.24).

* **6.25** Τι μορφή σας θυμίζει η φασματική κατανομή $\rho(\lambda)$ για $V = 50 \text{ kV}$, του σχήματος 6.8; Εάν έχετε απαντήσει (ορθά) την προηγούμενη άσκηση, χρησιμοποιείστε την απάντησή σας στα επιχειρήματά σας.

6.4 Δίδυμος γένεση

Όταν φωτόνια ακτινοβολίας γ^{78} «χτυπούν» επάνω σε άτομα μία διαδικασία, η οποία μπορεί να συμβεί είναι η *δίδυμος γένεση*. Κατ' αυτήν την διαδικασία το φωτόνιο χάνει όλη του την ενέργεια ενώ συγχρόνως δημιουργούνται δύο νέα σωματίδια: ένα ηλεκτρόνιο και ένα ποζιτρόνιο (ή αντι-ηλεκτρόνιο). Το ποζιτρόνιο είναι ένα σωματίο το οποίο ως προς την μάζα είναι ταυτόσημο με το ηλεκτρόνιο, αλλά το φορτίο του είναι αντίθετο του ηλεκτρονίου (δηλαδή θετικό). Λέμε ότι το ποζιτρόνιο είναι το *αντισωματίο* του ηλεκτρονίου. Γενικότερα, σήμερα γνωρίζουμε (μετά την πειραματική επαλήθευση της υπόθεσης του Dirac για την *αντιύλη*) ότι κάθε ένα από τα γνωστά σωματίια της ύλης (π.χ. ηλεκτρόνιο, πρωτόνιο) συνοδεύεται από ένα αντισωματίο. Το αντισωματίο ενός συνηθισμένου σωματίου (π.χ. το ποζιτρόνιο ή αντιηλεκτρόνιο, το αντιπρωτόνιο) έχει την ίδια μάζα (και χρόνο ζωής) με το σωματίο, αλλά αντίθετες (αντίθετο πρόσημο) άλλες ιδιότητες (όπως π.χ. φορτίο). Απ' αυτή την άποψη, το φωτόνιο δεν έχει αντισωματίο ή ισοδύναμα το αντισωματίο του φωτονίου είναι καθ' όλα ταυτόσημο με το ίδιο με το φωτόνιο.

⁷⁸Ως γνωστόν (δείτε και σχήμα 2.1) τα φωτόνια ακτίνων γ έχουν ενέργειες στην περιοχή των εκατομμυρίων ηλεκτρονιοβόλτ ($10^6 \text{ eV} = 1 \text{ MeV}$) και είναι πιο ενεργητικά από τις ακτίνες X. Ο περιορισμός σε φωτόνια ακτίνων γ προέρχεται από την διατήρηση της ενέργειας, όπως θα δούμε παρακάτω. Η ενέργεια του φωτονίου πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση από δύο φορές την ενέργεια ηρεμίας του ηλεκτρονίου, δηλαδή μεγαλύτερη από $2 \times 0.511 \text{ MeV}$.

Στο φαινόμενο της διδύμου γενέσεως έχουμε την δημιουργία μάζας ηρεμίας, ίσης προς δύο φορές την μάζα του ηλεκτρονίου, από την προσφορά της ενέργειας του φωτονίου γ . Η μετατροπή ενέργειας σε μάζα (και το αντίθετο) προβλέπεται από την θεωρία της Σχετικότητας. Το ηλεκτρόνιο (και το ποζιτρόνιο) δεν υπήρχε πριν το φωτόνιο γ «χτυπήσει» πάνω σε κάποιο άτομο. Δηλαδή το ηλεκτρόνιο δεν ανήκε στο άτομο με το οποίο συγκρούστηκε το φωτόνιο. Δημιουργήθηκε την στιγμή της σύγκρουσης. Αν συμβολίσουμε με m_0 την μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου (και του ποζιτρονίου) και με E_η και E_π τις ενέργειες του ηλεκτρονίου και του ποζιτρονίου, αντίστοιχα, η διατήρηση της ενέργειας γράφεται:

$$h\nu = E_\eta + E_\pi = (m_0c^2 + K_\eta) + (m_0c^2 + K_\pi) \quad (6.26),$$

όπου K_η και K_π , αντίστοιχα, είναι οι κινητικές ενέργειες του ηλεκτρονίου και του ποζιτρονίου. Επειδή αυτές οι ενέργειες είναι θετικές, αν και συνήθως μικρές, η ελάχιστη ενέργεια $h\nu_{min}$ του φωτονίου που απαιτείται για να λάβει χώρα το φαινόμενο αυτό είναι:

$$h\nu_{min} = 2 m_0c^2 \cong 1.02 \text{ MeV} \quad (6.27).$$

Φωτόνια με τέτοιες ενέργειες ανήκουν στην περιοχή των ακτίνων γ . Γι αυτό και από την αρχή θέσαμε αυτό τον περιορισμό στην ενεργειακή περιοχή του «εισερχομένου» φωτονίου. Όπως στην ακτινοβολία πεδήσεως, η παρουσία των ατόμων (της ύλης) επί των οποίων προσπίπτει το φωτόνιο γ είναι απαραίτητη για τη διατήρηση της ορμής και την επιτυχή έκβαση του φαινομένου.

Περισσότερα γι αυτό το φαινόμενο θα δούμε αργότερα στην *Σωματιδιακή Φυσική*.

Ασκήσεις

6.26 Είναι δυνατόν να έχουμε δίδυμο γένεση ζεύγους πρωτονίου-αντιπρωτονίου;

Τι είδους (ενέργειας, μήκους κύματος) φωτόνια θα απαιτούνταν σ' αυτή την περίπτωση;

Επεξηγήστε .

6.5 Εξαύλωση ζεύγους ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου

Το αντίστροφο φαινόμενο, κατά το οποίο αντισωματάρια, ηλεκτρόνια και ποζιτρόνια, εξαυλώνονται με ταυτόχρονο σχηματισμό φωτονίων συμβαίνει επίσης. Όταν ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο και ένα ελεύθερο ποζιτρόνιο συγκρούονται και καταστρέφονται, η διαδικασία της εξαύλωσης απαιτεί την δημιουργία τουλάχιστον δύο φωτονίων με ενέργειες, έστω, E_1 και E_2 .

Η διατήρηση της ενέργειας για αυτή την διαδικασία γράφεται:

$$(m_0c^2 + K_\eta) + (m_0c^2 + K_\pi) = E_1 + E_2 \quad (6.28) .$$

Συνήθως, οι κινητικές ενέργειες του ηλεκτρονίου και του ποζιτρονίου, K_η και K_π , είναι πολύ μικρές σε σχέση με την ενέργεια m_0c^2 , ώστε ουσιαστικά το ηλεκτρόνιο και ποζιτρόνιο να θεωρούνται ότι είναι σε ηρεμία. Σ' αυτή την περίπτωση διατήρηση της ορμής απαιτεί τα φωτόνια να έχουν αντίθετες ορμές (να κινούνται σε αντίθετες διευθύνσεις) και να έχουν την ίδια ενέργεια (και συχνότητα):

$$E_1 = E_2 = h\nu = m_0c^2 \cong 0.511 \text{ MeV} .$$

Λόγω της διαδικασίας της εξαύλωσης, όταν ύλη και αντιύλη (σωματάρια και αντισωματάρια) «έρχονται σε επαφή» εξαυλώνονται. Έτσι, αφού είμαστε φτιαγμένοι από συνηθισμένη ύλη, δεν είναι δυνατόν να «πιάσουμε στα χέρια μας» ένα κομμάτι αντιύλης. Είναι πολύ πιθανόν να υπάρχουν ολόκληροι Γαλαξίες, οι οποίοι σε αντίθεση με τον δικό μας, δεν είναι φτιαγμένοι από την συνηθισμένη ύλη, αλλά από αντιύλη. Όμως δεν θα μπορούσαμε ποτέ να το αντιληφθούμε με τις συνηθισμένες τεχνικές της Αστρονομίας, αφού το φωτόνιο και το «αντιφωτόνιο» είναι ταυτόσημα. Δηλαδή, παρατηρώντας το φως που φτάνει σε μας από μακρινούς Γαλαξίες δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε αν είναι φτιαγμένοι από ύλη ή αντιύλη. Προς το παρόν λοιπόν, θα μάθουμε να ζούμε και χωρίς αυτή την πληροφορία (ανάμεσα σε άλλες)!...

Ασκήσεις

6.27 Σε μια πυρηνική αντίδραση κατά την οποία έχουν σχηματισθεί ζευγάρια σωματιδίων- αντισωματιδίων, παρατηρούνται να εκπέμπονται φωτόνια προς αντίθετες κατευθύνσεις με τεράστιες ενέργειες ίσες προς 938 MeV. Μπορείτε να βρείτε το είδος των σωματιδίων και αντισωματιδίων που είναι υπεύθυνα για την εκπομπή αυτή; Επεξηγήστε .

Ανακεφαλαίωση

- 1) Όταν φωτόνια ακτίνων X σκεδάζονται από «ελεύθερα» ηλεκτρόνια το μήκος κύματος τους αλλάζει (μεγαλώνει) κατά $\Delta\lambda$: $\Delta\lambda \equiv \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta)$. Το φαινόμενο οφείλεται στην απώλεια ενέργειας κατά την σκέδαση του φωτονίου και εξηγείται πλήρως από τους (σχετικιστικούς) νόμους διατήρησης ενέργειας και ορμής (φαινόμενο Compton).
- 2) Ένα Φωτόνιο με συχνότητα ν , το οποίο απορροφάται από την επιφάνεια ενός μετάλλου μπορεί να εκτινάξει ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο από την επιφάνεια του μετάλλου, προσφέροντας όλη την ενέργεια του, $h\nu$, για το έργο εξόδου και την κινητική ενέργεια του εξερχομένου ηλεκτρονίου (φωτοηλεκτρικό

φαινόμενο).

3) Κατά την σύγκρουση ελευθέρων ηλεκτρονίων με μια μεταλλική επιφάνεια (θετικά φορτισμένο ηλεκτρόδιο) παράγεται ένα συνεχές φάσμα ακτινοβολίας (ακτίνων X) με μια μέγιστη συχνότητα, η οποία καθορίζεται από την κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων (ακτινοβολία πεδήσεως). Η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων, με την σειρά της, καθορίζεται από την τάση μεταξύ καθόδου-ανόδου.

4) Η ακτινοβολία πεδήσεως είναι υπεύθυνη για το συνεχές φάσμα των ακτίνων X.

5) Ένα φωτόνιο ακτίνων γ με ενέργεια $h\nu \geq 1.02 \text{ MeV}$ μπορεί να καταστραφεί, προσφέροντας την ενέργειά του για τον σχηματισμό ενός ζεύγους ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου (δίδυμος γένεση).

6) Κατά το αντίστροφο φαινόμενο της διδύμου γενέσεως, ένα ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου εξαλλώνεται, προσφέροντας την ενέργεια τους για τον σχηματισμό δύο (τουλάχιστον) φωτονίων. Εάν το ζεύγος ηλεκτρονίου ποζιτρονίου έχει αμελητέα κινητική ενέργεια, τα δύο φωτόνια που παράγονται έχουν την ίδια ενέργεια $E_\phi \cong 0.511 \text{ MeV}$ (και συχνότητα) και κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις.

Κεφάλαιο 7. Ατομικά Φάσματα

Εισαγωγή

Το μεταβατικό αυτό κεφάλαιο συνδέει και επεκτείνει της Κβαντικές ιδέες από την ακτινοβολία στην ύλη. Αποτελεί ουσιαστικά τον πρόλογο και προπομπό του κεφαλαίου 8. Σύμφωνα με την εννοιολογική ταξινόμηση του διαγράμματος [2.1] είναι το τελευταίο από τα κεφάλαια τα αφιερωμένα στην ακτινοβολία (γραμμικά φάσματα) και το πρώτο από τα κεφάλαια που ασχολούνται με την κβάντωση των σωματίων της ύλης. Αυτό συμβαίνει επειδή η ερμηνεία των ατομικών φασμάτων απαιτεί την κατανόηση της ατομικής δομής. Αντιστρόφως, οι πιο σημαντικές πληροφορίες για την ατομική δομή προέρχονται από την μελέτη των ατομικών φασμάτων.

Σε αντίθεση με το συνεχές φάσμα του μέλανος σώματος, το οποίο εξαρτάται μόνο από την θερμοκρασία (και άρα περιέχει πληροφορίες μόνο για την θερμοκρασία) τα ατομικά φάσματα διαφορετικών ατόμων είναι διαφορετικά. Έτσι, τα ατομικά φάσματα περικλείουν «την υπογραφή» και την ταυτότητα του συγκεκριμένου ατόμου. Όμως τα ατομικά φάσματα, τα οποία είναι γραμμικά⁷⁹, φαίνονται πολύπλοκα και ακανόνιστα. Θα

⁷⁹ Δείτε υποκεφάλαιο 2.3

δείξουμε ότι μέσα από την συνθετότητα και την ακανόνιστη μορφή των ατομικών φασμάτων, υπάρχουν κάποιες «κανονικότητες» και κρυμμένες συμμετρίες. Αυτές οι κανονικότητες θα χρησιμεύσουν αποφασιστικά κατά την κατασκευή ατομικών προτύπων.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε το πειραματικό φάσμα του ατόμου του υδρογόνου, το οποίο είναι το απλούστερο άτομο, και κατόπιν θα γενικεύσουμε την περιγραφή σε άτομα με περισσότερα από ένα ηλεκτρόνια. Θα προσπαθήσουμε να ερμηνεύσουμε τα ατομικά φάσματα με βάση την Κλασική Φυσική, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τις κβαντικές ιδέες. Θα δείξουμε ότι αυτό είναι αδύνατο. Έτσι θα θεμελιώσουμε την ανεπάρκεια της Κλασικής Φυσικής να ερμηνεύσει την ατομική δομή και θα προετοιμάσουμε το έδαφος για την Ατομική θεωρία στο κεφάλαιο 8, η οποία εκ των πραγμάτων θα είναι «Κβαντική ατομική Θεωρία».

Περιεχόμενα του Κεφαλαίου

7.1 Το φάσμα εκπομπής του ατόμου του υδρογόνου.

7.2 Το φάσμα εκπομπής άλλων στοιχείων.

7.3 Εις αναζήτηση Κλασικής ερμηνείας.

7.4 Κλασικά ατομικά πρότυπα.

7.4.1 Το ατομικό πρότυπο του Thomson

7.4.2 Το ατομικό πρότυπο του Rutherford

7.1 Το Φάσμα εκπομπής του ατόμου του Υδρογόνου.

Όπως είδαμε στην ενότητα 2.1, το φάσμα εκπομπής του ατόμου του υδρογόνου λαμβάνεται με την πειραματική διάταξη του σχήματος 2.2 όταν χρησιμοποιηθεί ως φωτεινή πηγή το φως ηλεκτρικής εκκενώσεως μέσα σε ατμόσφαιρα αραιού μονατομικού αερίου υδρογόνου⁸⁰.

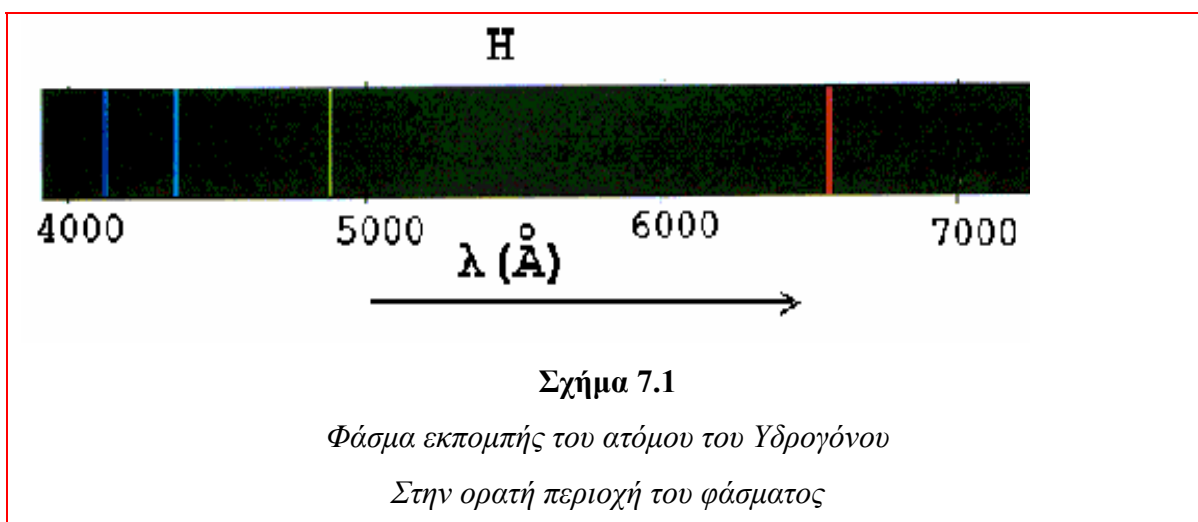
Λόγω της ηλεκτρικής εκκενώσεως τα άτομα συγκρούονται με ηλεκτρόνια και μεταξύ τους και διεγείρονται σε καταστάσεις με μεγαλύτερη ενέργεια από την συνηθισμένη τους κατάσταση. Επιστρέφοντας στην κανονική τους κατάσταση, τα άτομα αποδίδουν την περισσευούμενη ενέργεια υπό μορφήν ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, η οποία

⁸⁰ Οι συνθήκες της ηλεκτρικής εκκενώσεως, μαζί με την πίεση και την ύπαρξη κατάλληλων καταλυτών, καθορίζουν την παρουσία και το ποσοστό του ατομικού υδρογόνου. Αν δεν καταβληθούν ιδιαίτερες προσπάθειες μοριακό και ατομικό υδρογόνο συνυπάρχουν και τα αντίστοιχα φάσματα μπορεί να επικαλύπτονται. Το ατομικό υδρογόνο έχει χρόνο ζωής περίπου 1/5 του δευτερολέπτου και μπορεί να ταξιδεύει μέχρι 10 cm, σε πίεση 0.1 mm στήλης Hg, πριν ανασχηματισθεί σε μοριακό υδρογόνο.

συγκεντρώνεται μέσα από την λεπτή σχισμή και καταλήγει τελικά στην φωτογραφική πλάκα.

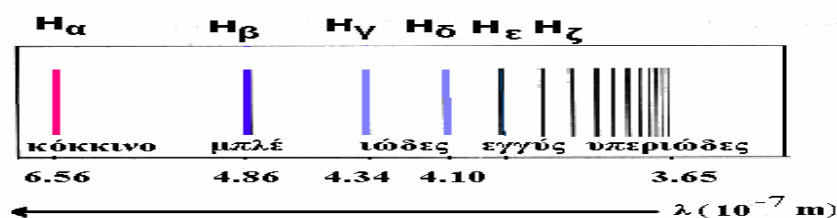
Προς αποφυγήν παρεξηγήσεως θα πρέπει να διευκρινίσουμε ότι το ατομικό φάσμα εκπομπής δεν οφείλεται σε ένα μόνον άτομο υδρογόνου, αλλά σε πάρα πολλά όμοια και ανεξάρτητα άτομα, το πλήθος των οποίων καθορίζει την συνολική ένταση του φάσματος.

Το φάσμα αυτό, το οποίο έχουμε αναπαράγει στο σχήμα 7.1 όπως αποτυπώνεται στην φωτογραφική πλάκα, είναι *γραμμικό*, δηλαδή αποτελείται από ένα χαρακτηριστικό σύνολο φωτεινών γραμμών (πάνω σ' ένα σκοτεινό υπόβαθρο).



Οι γραμμές αυτές, οι οποίες είναι διαφορετικές (σε πλήθος, θέση και ένταση) για διαφορετικά άτομα (π.χ. για άτομα αζώτου ή οξυγόνου) συνιστούν την φασματική «ταυτότητα» του ατόμου του υδρογόνου και το χαρακτηρίζουν πλήρως. Οι χρωματικές αυτές συνιστώσες αντιστοιχούν στα διάφορα μήκη κύματος (ή στις διάφορες συχνότητες) του φάσματος, τα οποία είναι σημειωμένα στον οριζόντιο άξονα σε μονάδες Å ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$). Για παράδειγμα, η κόκκινη γραμμή του φάσματος αντιστοιχεί σε μήκος κύματος 6563 \AA (για την ακρίβεια, 6562.8 \AA), ενώ η ιώδης γραμμή στο άλλο άκρο του φάσματος αντιστοιχεί στα 4102 \AA . Εάν επεκτείνουμε την περιοχή του φάσματος προς το εγγύς υπεριώδες, με το κατάλληλο φωτογραφικό φιλμ και με βελτιωμένη διάταξη παρατηρήσεως (π.χ. αυξημένη διαθλαστικότητα του πρίσματος ή πυκνότητα των εγκοπών του οπτικού φράγματος) εύκολα μπορούμε να διακρίνουμε, όπως φαίνεται παραστατικά στο σχήμα 7.2, περί τις είκοσι φασματικές γραμμές. Προς τα μικρότερα μήκη κύματος, γύρω στα 3650 \AA , οι γραμμές πλησιάζουν πάρα πολύ μεταξύ τους ενώ ταυτόχρονα εξασθενούν σε ένταση, ώστε να είναι πρακτικά αδύνατον να τις διακρίνουμε.

Όπως βλέπουμε, και στα δύο σχήματα, το φάσμα είναι πολύπλοκο χωρίς κάποια εμφανή κανονικότητα (όπως οι νόμοι του Wienn και του Boltzmann για το μέλαν σώμα) που θα διευκόλυνε την θεωρητική ερμηνεία του.



Σχήμα 7.2

Λεπτομερής παραστατική παρουσίαση του φάσματος του ατόμου του υδρογόνου.

Τα Σύμβολα $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, \dots$ κ.τ.λ., χρησιμοποιούνται για τον χαρακτηρισμό των φασματικών γραμμών.

Πρώτος ο Ελβετός J. J. Balmer το 1885 παρατήρησε ότι τα μήκη κύματος του σχήματος 7.2 ταιριάζουν τέλεια στον ακόλουθο εμπειρικό τύπο :

$$\lambda_n = 3646 \frac{n^2}{n^2 - 4} \text{ \AA} \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (7.1)$$

Ο φυσικός αριθμός n παίρνει τιμές μεγαλύτερες από το 2 (για $n=2$, ο παρανομαστής μηδενίζεται). Για $n=3$, η σχέση (2.1.8) δίνει $\lambda = 6562.8 \text{ \AA}$, που αντιστοιχεί στην κόκκινη γραμμή του φάσματος, χαρακτηρισμένη με το γράμμα α στο σχήμα 7.2, ενώ η ιώδης γραμμή στα 4101.8 \AA , αντιστοιχεί σε $n = 6$.

Η σχέση (7.1) προβλέπει μια άπειρη σειρά φασματικών γραμμών, γνωστή σαν **σειρά Balmer** με μέγιστο μήκος κύματος 6562.8 \AA (που αντιστοιχεί στην κόκκινη γραμμή) και ελάχιστο μήκος κύματος ίσο προς 3646 \AA , που αντιστοιχεί στην εγγύς υπεριώδη περιοχή του φάσματος. Την εποχή κατά την οποία ο Balmer πρότεινε την εμπειρική σχέση (7.1), μόνον εννέα φασματικές γραμμές του υδρογόνου ήταν γνωστές .

Παράδειγμα 7.1

Άσκηση

Βρείτε το ελάχιστο μήκος κύματος της σειράς Balmer.

Απάντηση

Όπως είδαμε παραπάνω, όσο μεγαλώνει ο αριθμός n τόσο μικραίνει το μήκος κύματος λ_n , όμως πάντα παραμένει μεγαλύτερο από 3646 \AA , αφού το κλάσμα :

$$\frac{n^2}{n^2 - 4}, \quad \text{με το οποίο πολλαπλασιάζεται ο σταθερός αριθμός } 3646, \text{ είναι}$$

πάντα κατά τι μεγαλύτερο της μονάδας. Μοιραία λοιπόν, το κάτω όριο της σειράς είναι 3646 \AA . Από μαθηματική σκοπιά διαπιστώνουμε ότι το όριο του κλάσματος $\frac{n^2}{n^2 - 4}$,

καθώς το n τείνει στο άπειρο είναι η μονάδα, αφού για πολύ μεγάλα n μπορούμε ασφαλώς να αγνοήσουμε το 4 στον παρανομαστή, δηλαδή :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^2 - 4} \right) \rightarrow \frac{n^2}{n^2} \rightarrow 1 \quad (7.2)$$

Ο τύπος του Balmer, ως εμπειρική σχέση, δεν προσφέρει φυσική ερμηνεία του φάσματος. Εντούτοις, αυτή η σχέση βοήθησε στην πρόβλεψη νέων γραμμών, οι οποίες δεν είχαν παρατηρηθεί αρχικά, και συνέβαλλε αποφασιστικά στην μετέπειτα διαμόρφωση μιας πλήρους θεωρητικής ερμηνείας του φάσματος του υδρογόνου. Μια από τις μεγαλύτερες παραπέρα συνεισφορές του Balmer υπήρξε η αναζήτηση παρομοίων σχέσεων για άλλα στοιχεία και η ανακάλυψη και άλλων φασματικών σειρών και κανόνων για το υδρογόνο. Μια σημαντική αρχή (κανονικότητα) προκύπτει εάν αντί του μήκους κύματος θεωρήσουμε τα αντίστροφα μήκη κύματος $1/\lambda$. Τότε, για πολλές γραμμές σ' ένα φάσμα το αντίστροφο μήκος κύματος τους ισούται με το άθροισμα ή την διαφορά των αντιστρόφων μηκών κύματος δύο άλλων γραμμών του ίδιου φάσματος. Αυτή η παρατήρηση (ή αρχή) είναι γνωστή σαν **συνδυαστική αρχή των Rydberg – Ritz**, από το όνομα των ερευνητών, που την ανακάλυψαν. Η συνδυαστική αρχή έχει το πλεονέκτημα να οδηγεί σε μια απλουστευμένη περιγραφή ενός πολύπλοκου φάσματος συναρτήσει μερικών βασικών όρων των φασματικών σειρών. Μάλιστα, σε συνδυασμό με γενικεύσεις και επεκτάσεις του εμπειρικού τύπου του Balmer μπορεί να δώσει μια ικανοποιητική εμπειρική περιγραφή των ατομικών φασμάτων των περισσότερων στοιχείων.

Ο τύπος του Balmer σε μορφή αντιστρόφου μήκους έχει την μορφή :

$$\frac{1}{\lambda_n} = R_H \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right) = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, 5, \dots, \quad (7.3)$$

όπου R_H είναι μια πειραματικά προσδιορισμένη σταθερά γνωστή σαν **σταθερά του Rydberg**, της οποίας η τιμή (για το υδρογόνο) είναι περίπου 109700 cm^{-1} .

Η ακριβής τιμή από πιο πρόσφατα πειραματικά δεδομένα είναι :

$$R_H = 10967757.6 \pm 1.2 \text{ m}^{-1} \quad (7.5)$$

Επέκταση των μετρήσεων του φάσματος και σε άλλες περιοχές πέρα από την ορατή και την περιοχή του εγγύς υπεριώδους έκανε δυνατή και την ανακάλυψη και άλλων φασματικών σειρών σαν του Balmer, που έχουν την γενική μορφή :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad m = 1, 2, 3, \dots, n = m+1, m+2, m+3, \dots \quad (7.6)$$

Μια φασματική σειρά γραμμών χαρακτηρίζεται από μια σταθερή τιμή του ακέραιου αριθμού m και αποτελείται από τους όρους που προκύπτουν με τις διάφορες τιμές του ακέραιου αριθμού n .

Σαν παράδειγμα, στην υπέρυθρη περιοχή του φάσματος ισχύει ο εμπειρικός τύπος :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 4, 5, 6, \dots \quad (7.7)$$

και η αντίστοιχη φασματική σειρά, που αντιστοιχεί σε $m = 3$, είναι γνωστή σαν **σειρά του Paschen**.

Η σειρά με $m = 1$ είναι γνωστή σαν **σειρά του Lyman** και βρίσκεται εξ ολοκλήρου (από το ελάχιστο έως το μέγιστο μήκος κύματος) στο υπεριώδες .

Η σχέση (7.6) μπορεί να ονομασθεί **γενικευμένη σχέση του Balmer** . Από την γνωστή σχέση μεταξύ μήκους κύματος λ και συχνότητας ν , βλέπουμε ότι ουσιαστικά η σχέση (7.6), πολλαπλασιασμένη επί την ταχύτητα του φωτός c , περιγράφει τις αντίστοιχες συχνότητες του φάσματος :

$$\nu_{\phi} = c R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad m = 1, 2, 3, \dots, n = m+1, m+2, m+3, \dots \quad (7.8)$$

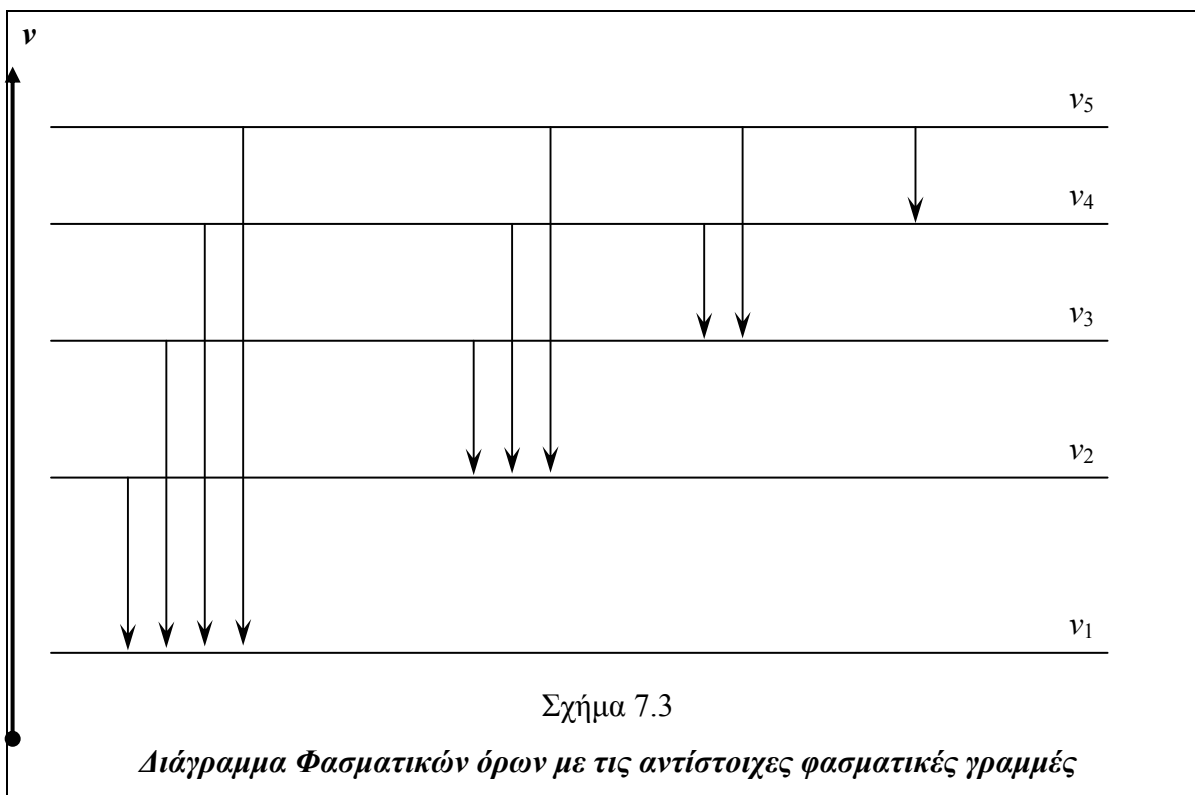
Μετά απ' αυτό, βλέπουμε ότι η συνδυαστική αρχή αφορά ουσιαστικά τις συχνότητες του φάσματος και μπορεί να διατυπωθεί ως εξής : **κάθε συχνότητα του φάσματος μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα ή διαφορά δύο άλλων συχνοτήτων**⁸¹.

Αυτό είναι πολύ σημαντικό διότι μας επιτρέπει την παρουσίαση ενός πολύπλοκου φάσματος, με πάρα πολλές φασματικές γραμμές, με βάση μερικούς μόνο θεμελιώδεις **φασματικούς όρους**. Η θεμελιώδης ακολουθία των φασματικών όρων επιλέγεται έτσι ώστε οι υπόλοιπες φασματικές γραμμές να προκύπτουν (από την συνδυαστική αρχή)

συνδυάζοντας όλες τις δυνατές διαφορές των φασματικών όρων. Προς τον σκοπό αυτό, οι φασματικοί όροι παρουσιάζονται σαν οριζόντιες γραμμές σε κατάλληλο **διάγραμμα φασματικών όρων**, ώστε να κόβουν τον κατακόρυφο άξονα συχνοτήτων⁸² στις κατάλληλες τιμές των συχνοτήτων (οι οποίες αντιστοιχούν στους συγκεκριμένους φασματικούς όρους). Οι φασματικές γραμμές τότε, παρουσιάζονται σαν κατακόρυφα βέλη, όπως στο σχήμα 7.3.

Για παράδειγμα η συχνότητα ν της πρώτης, από αριστερά προς τα δεξιά, φασματικής γραμμής δίνεται από την σχέση $\nu = \nu_2 - \nu_1$, ενώ η συχνότητα της τελευταίας γραμμής είναι $\nu = \nu_5 - \nu_4$.

Είναι προτιμότερο να γράψουμε για την συχνότητα της μεν πρώτης γραμμής : $\nu_{2,1} = \nu_2 - \nu_1$, της δε τελευταίας, $\nu_{5,4} = \nu_5 - \nu_4$, ώστε να αναγνωρίζεται αμέσως η προέλευση τους. Βλέπουμε λοιπόν πως κάθε συχνότητα του φάσματος χαρακτηρίζεται από δύο ακέραιους, οι οποίοι χαρακτηρίζουν Να σημειώσουμε ότι τα διαγράμματα φασματικών όρων σαν αυτό του σχήματος 7.3 ήταν ευρέως διαδεδομένα στην ατομική φασματοσκοπία πολύ νωρίτερα από την κβαντική θεωρία και τα ενεργειακά διαγράμματα, σαν αυτό του σχήματος 3.6. Όμως η ομοιότητα μεταξύ των δύο σχημάτων δεν είναι



⁸¹ Για μερικές συχνότητες μπορεί να μην ισχύει αυτό

⁸² Τα συνήθη διαγράμματα φασματικών όρων αναφερόντουσαν από παλιά, αντί για συχνότητες, σε αντίστροφα μήκη κύματος $1/\lambda$.

τυχαία. Μετά την συζήτηση για τις ενεργειακές στάθμες και την κβάντωση της ενέργειας, είναι σχετικά εύκολο να αναγνωρίσουμε την προέλευση της βαθύτερης σχέσης μεταξύ των δύο διαγραμμάτων.

Διαπιστώνουμε επίσης, ότι οι συχνότητες στην (7.8) προκύπτουν σαν διαφορές δυο όρων, οι οποίοι χαρακτηρίζονται αντίστοιχα από τους ακέραιους αριθμούς m και n .

Που είχαμε ξανασυναντήσει τέτοια περίπτωση ;

Μια σχετιζόμενη έννοια με το φάσμα εκπομπής του ατόμου του υδρογόνου είναι, όπως είδαμε και στο εδάφιο 2.3, **το ατομικό φάσμα απορρόφησης** του, το οποίο φαίνεται στο σχήμα 2.3α. Το φάσμα αυτό λαμβάνεται, αναλύοντας (με την διάταξη του σχήματος 2.2) την ακτινοβολία που προκύπτει από μια πηγή συνεχούς φάσματος (όπως ο Ήλιος) μετά την απορρόφηση μέρους της, από αέριο υδρογόνο που υπάρχει σε κατάλληλο υάλινο δοχείο μπροστά από την σχισμή παρατηρήσεως. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στο σχήμα 2.3, οι φασματικές γραμμές που έχουν απορροφηθεί από το υδρογόνο και λείπουν (φαίνονται σκοτεινές) από το συνεχές ηλιακό φάσμα, αντιστοιχούν ακριβώς (έχουν ακριβώς το ίδιο μήκος κύματος) σε γραμμές που παρατηρούμε στο ατομικό φάσμα εκπομπής. Κατά συνέπεια, ο μηχανισμός που θα ερμηνεύει το ατομικό φάσμα εκπομπής, θα πρέπει να ερμηνεύει και το ατομικό φάσμα απορρόφησης.

Από την μέχρι τώρα πείρα μας με το μέλαν σώμα, θα περιμέναμε πως κάποιου είδους ταλαντώσεις των ατομικών ηλεκτρονίων θα είναι υπεύθυνες για το ατομικό φάσμα του υδρογόνου. Είναι δηλαδή προφανές, ότι η προέλευση του ατομικού φάσματος εκπομπής του υδρογόνου σχετίζεται άμεσα με τις ενεργειακές καταστάσεις του αντίστοιχου υλικού συστήματος, που εδώ είναι το άτομο του υδρογόνου. Πρέπει λοιπόν να έχουμε κάποιο ατομικό πρότυπο, πριν αποπειραθούμε να δώσουμε κάποια θεωρητική ερμηνεία του ατομικού φάσματος.

Ασκήσεις

7.1 Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις, οι οποίες αφορούν τη συχνότητα ν και το μήκος κύματος λ της πρώτης φασματικής γραμμής (από αριστερά προς τα δεξιά) στο διάγραμμα του σχήματος 7.3, είναι, κατά τη γνώμη σας σωστές :

α) το μήκος κύματος λ δίνεται από τη σχέση $\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$

β) η συχνότητα ν δίνεται από τη σχέση $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2}$

γ) το μήκος κύματος λ δίνεται από τη σχέση $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}$

δ) η συχνότητα ν δίνεται από τη σχέση $\nu = \nu_2 - \nu_1$

ε) το μήκος κύματος λ δίνεται από τη σχέση $\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_1} + \frac{c}{\lambda_2}$

στ) η συχνότητα ν δίνεται από τη σχέση $\frac{cR_H}{\nu} = \frac{cR_H}{\nu_1} + \frac{cR_H}{\nu_2}$

7.2 Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι κατά τη γνώμη σας σωστές ;

α) Η γραμμή, γύρω στα 4800 Å στο σχήμα 7.1 ανήκει στη σειρά Paschen.

β) Η γραμμή, γύρω στα 4800 Å στο σχήμα 7.1 ανήκει στη σειρά Balmer.

γ) Η γραμμή, γύρω στα 4800 Å στο σχήμα 7.1 ανήκει στη σειρά Lyman.

δ) Η γραμμή, γύρω στα 4800 Å στο σχήμα 7.1 ανήκει σε άλλη σειρά, πέρα από τις σειρές Balmer, Lyman, Paschen.

7.3 Για ποιες τιμές των ακεραίων n και m μπορεί η σχέση 7.6 να περιγράψει την γραμμή H_β

του σχήματος 7.2, με μήκος κύματος γύρω στις 4860 Å ;

7.4 Βρείτε το μέγιστο μήκος κύματος της φασματικής σειράς Balmer.

7.5 Βρείτε το ελάχιστο και μέγιστο μήκος κύματος της σειράς του Paschen .

Σε ποια περιοχή του φάσματος βρίσκεται αυτή η φασματική σειρά ;

7.6 Βρείτε το ελάχιστο και μέγιστο μήκος κύματος της φασματικής σειράς του Lyman, καθώς και την περιοχή του φάσματος στην οποία ανήκει αυτή η φασματική σειρά.

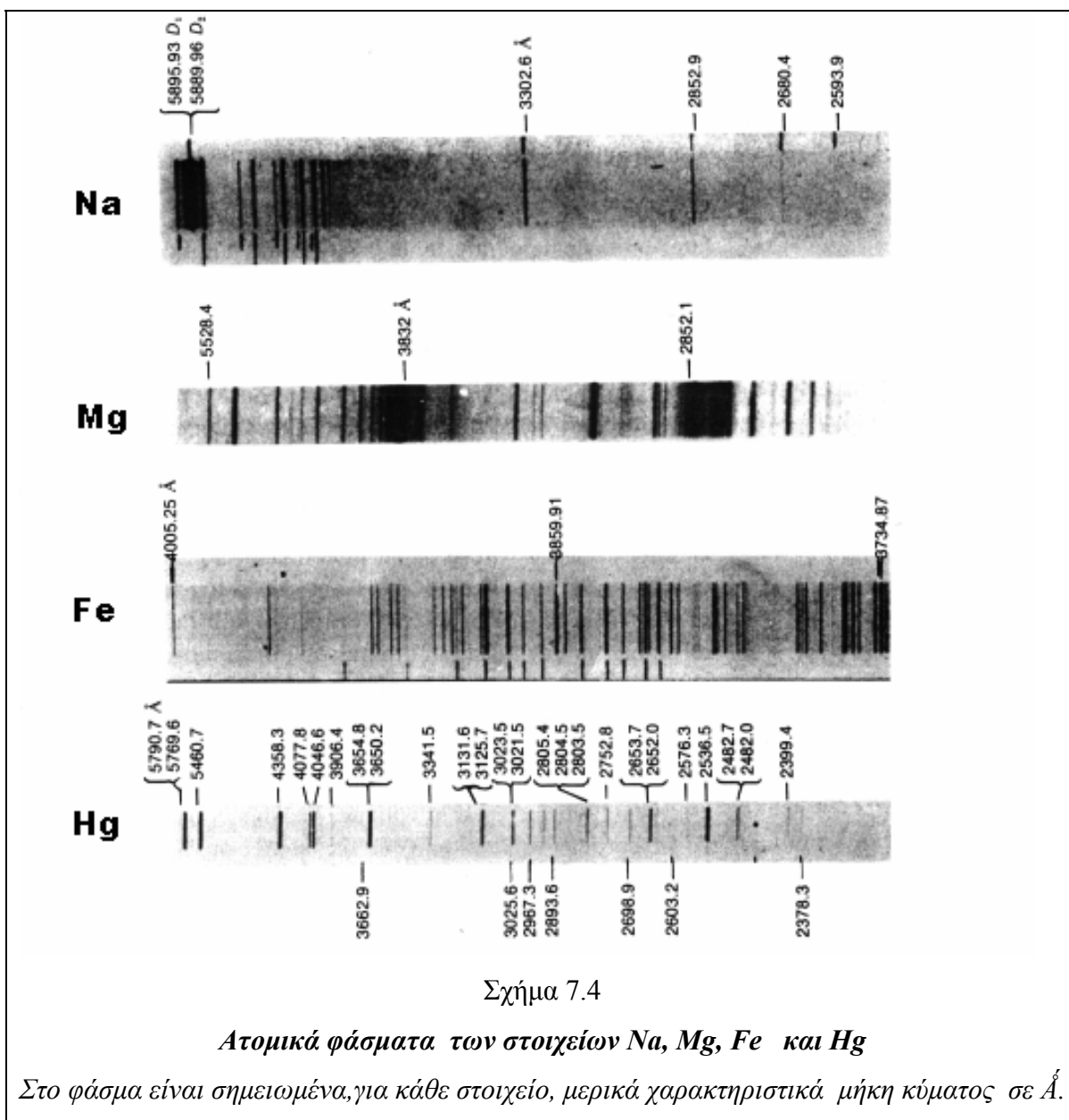
7.2 Ατομικά Φάσματα άλλων στοιχείων.

Για την λήψη του ατομικού φάσματος άλλων στοιχείων, πέρα από το υδρογόνο, χρησιμοποιείται η ίδια πειραματική διάταξη του σχήματος 2.2 με φωτεινή πηγή το φως ηλεκτρικής εκκενώσεως μέσα σε ατμόσφαιρα μονατομικών ατμών, χαμηλής πίεσης και πυκνότητας, του εν λόγω στοιχείου⁸³.

Όπως φαίνεται στο σχήμα 7.4, τα φάσματα αυτά είναι ακόμα πιο πολύπλοκα, από το αντίστοιχο φάσμα του υδρογόνου και δεν φαίνεται να έχουν κάποια προφανή κανονικότητα . Επιβεβαιώνεται πειραματικά ότι ισχύει και εδώ η συνδυαστική αρχή, η

οποία μας επιτρέπει, όπως στο σχήμα 7.3, την παρουσίαση του φάσματος συνδυάζοντας μερικούς θεμελιώδεις φασματικούς όρους. Σε αρκετές περιπτώσεις μπορούν να βρεθούν προσεγγιστικοί εμπειρικοί τύποι ανάλογοι με την γενικευμένη σχέση του Balmer (σχέση 7.6). Σαν παράδειγμα, για τα αλκαλικά μέταλλα Li, Na, K, κ.τ.λ. έχουν βρεθεί εμπειρικοί τύποι, που έχουν την γενική μορφή :

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{(m-a)^2} - \frac{1}{(n-b)^2} \right), \quad m = 1, 2, 3, \dots, n = m+1, m+2, m+3, \dots \quad (7.9).$$



⁸³ Οι ατμοί μεταλλικών στοιχείων, όπως αυτά του σχήματος 7.4, αποτελούν μονατομικά αέρια. Για άλλα στοιχεία, ανεξάρτητα από την κατάσταση τους (στερεά, υγρά ή αέρια) υπό κανονικές συνθήκες, οι κατάλληλες συνθήκες της εκκενώσεως, όπως και στο υδρογόνο, θα εξασφαλίσουν την δημιουργία μονατομικού αερίου ή ατμού.

(Η εικόνα είναι παρμένη από το κλασικό βιβλίο “Atomic Spectra and atomic Structure” του G. Herzberg)

Στην παραπάνω σχέση, a και b είναι εμπειρικές σταθερές για κάθε στοιχείο και για κάθε δεδομένη φασματική σειρά. Ως γνωστόν, κάθε φασματική σειρά χαρακτηρίζεται από μία σταθερή τιμή του ακεραίου αριθμού m και τα μέλη της (σειράς) προκύπτουν δίνοντας όλες τις τιμές στην ακεραία μεταβλητή n , από $m+1$ μέχρι άπειρο.

Η σταθερά R είναι η σταθερά του Rydberg για το εν λόγω στοιχείο, η οποία ελάχιστα διαφέρει από την σταθερά του Rydberg για το υδρογόνο R_H . Εντούτοις, υπάρχει μια πολύ μικρή αύξηση της τιμής της R καθώς αυξάνεται το ατομικό βάρος του στοιχείου.

Η αντίστοιχη σχέση για τη συχνότητα γράφεται:

$$\nu = c R \left(\frac{1}{(m-a)^2} - \frac{1}{(n-b)^2} \right) \quad m = 1, 2, 3, \dots, n = m+1, m+2, m+3, \dots \quad (7.10).$$

Είναι προφανές ότι τα φάσματα απορροφήσεως των στοιχείων θα έχουν αυστηρή αντιστοιχία με τα φάσματα εκπομπής και θα είναι **γραμμικά**, όπως στο άτομο του υδρογόνου. Δεν χρειάζεται, λοιπόν, παραπέρα συζήτηση για τα ατομικά φάσματα απορροφήσεως.

Ερώτηση

Γιατί χρησιμοποιούμε ατμούς χαμηλής πίεσης και πυκνότητας για να πάρουμε τα ατομικά φάσματα των στοιχείων του σχήματος 7.4;

Απάντηση

Σε σχέση με το αντίστοιχο στερεό ή υγρό, ο όγκος των ατμών ενός στοιχείου υπό ατμοσφαιρική πίεση είναι περίπου 1000 φορές μεγαλύτερος, που αντιστοιχεί σε περίπου 10 φορές μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ των ατόμων. Σε μικρότερες πιέσεις η μέση απόσταση μεταξύ ατόμων μπορεί να γίνει ακόμη μεγαλύτερη. Έτσι, οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ ατόμων (έλξεις και απώσεις) οι οποίες έχουν μικρή σχετικά εμβέλεια, είναι πρακτικά αμελητέες και τα άτομα μπορούν να θεωρηθούν ανεξάρτητα. Η ανεξαρτησία των ατόμων είναι μια απαραίτητη προϋπόθεση, ώστε να μπορούμε να χαρακτηρίσουμε το παρατηρούμενο φάσμα *ατομικό* και να αποδώσουμε τα χαρακτηριστικά του στην αντίστοιχη ατομική δομή. Σε αντίθετη περίπτωση, το φάσμα θα έχει διαφορετική μορφή που θα οφείλεται στη μοριακή δομή, η οποία σχηματίζεται λόγω ενδοατομικών αλληλεπιδράσεων.

7.3 Εις αναζήτηση κλασικής ερμηνείας

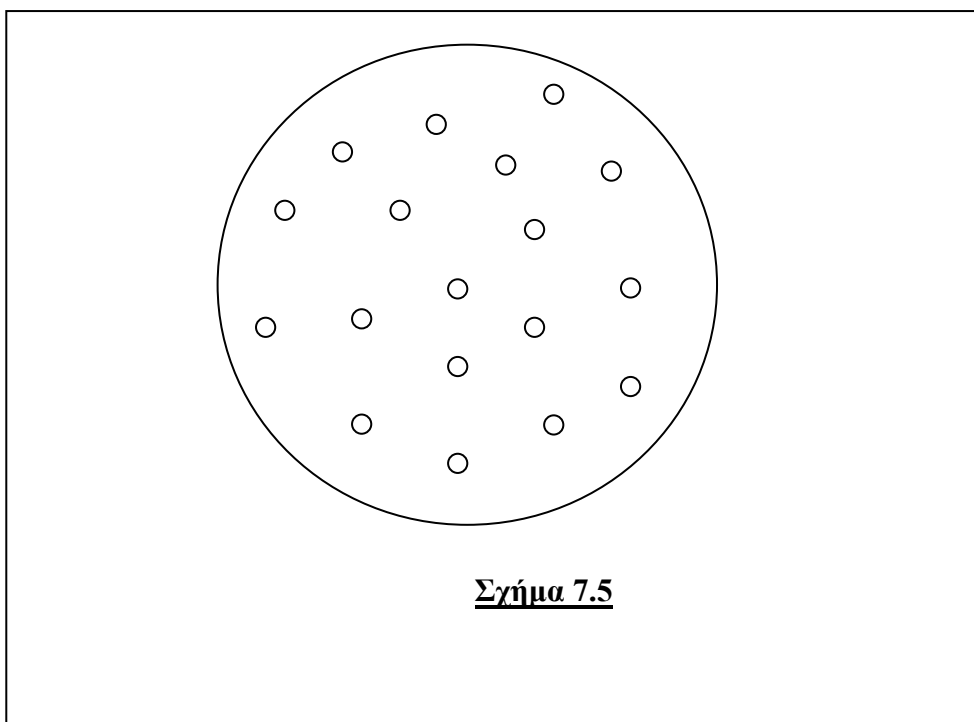
Από την μέχρι τώρα πείρα μας με το μέλαν σώμα, θα περιμέναμε πως κάποιου είδους ταλαντώσεις των ατομικών ηλεκτρονίων θα είναι υπεύθυνες για το ατομικό φάσμα του υδρογόνου. Είναι δηλαδή προφανές, ότι η προέλευση του ατομικού φάσματος εκπομπής του υδρογόνου σχετίζεται άμεσα με τις ενεργειακές καταστάσεις του αντίστοιχου υλικού συστήματος, που εδώ είναι το άτομο του υδρογόνου. Πρέπει λοιπόν να έχουμε κάποιο ατομικό πρότυπο, πριν αποπειραθούμε να δώσουμε κάποια θεωρητική ερμηνεία του ατομικού φάσματος

Αν και γνωρίζουμε, ή διαισθανόμαστε, ότι κάτι τέτοιο δεν μπορεί να γίνει μέσα στα πλαίσια της κλασικής φυσικής, εντούτοις θα κάνουμε μια απόπειρα στο επόμενο κεφάλαιο να παρουσιάσουμε το κλασικό ατομικό πρότυπο, ώστε να διαπιστώσουμε εάν μπορεί να εξηγήσει έστω και μερικά από τα πειραματικά χαρακτηριστικά του φάσματος. Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 3 η κλασική θεωρία δεν μπορεί να ερμηνεύσει ικανοποιητικά, ούτε το φάσμα του απλούστερου ατόμου, του υδρογόνου.

7.4 Κλασικά ατομικά πρότυπα.

7.4.1 Το ατομικό πρότυπο του Thomson

Ιστορικά, το πρώτο κλασικό ατομικό μοντέλο οφείλεται στον J.J. Thomson, ο οποίος αναγνώρισε και ανακάλυψε το ηλεκτρόνιο ως θεμελιώδες συστατικό του ατόμου . Σύμφωνα με το μοντέλο του Thomson, το άτομο αποτελείται από ένα ομοιογενώς φορτισμένο σφαιρικό πυρήνα με θετικό φορτίο μέσα στον οποίο είναι κατανεμημένα, επίσης ομοιογενώς, τα σημειακά αρνητικά φορτία των ηλεκτρονίων, όπως φαίνεται παραστατικά στο σχήμα 7.5 Για να διατηρείται η ηλεκτρική



Σχήμα 7.5

Σχηματική αναπαράσταση του ατομικού μοντέλου του Thomson

ουδετερότητα, το άθροισμα του θετικού και αρνητικού φορτίου του ατόμου στην κανονική του κατάσταση θα πρέπει να είναι ίσο προς μηδέν.

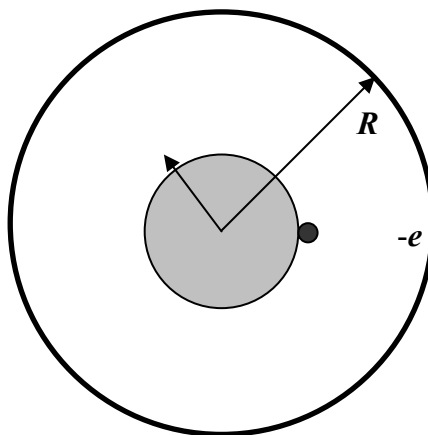
Για το άτομο του υδρογόνου το μοντέλο του Thomson προβλέπει την ύπαρξη ενός μοναδικού ηλεκτρονίου, με φορτίο $-e$, μέσα σε μια ομοιογενώς θετικά φορτισμένη σφαίρα, ακτίνας R ίσης με την ακτίνα του ατόμου και με φορτίο $+e$. Στην κανονική κατάσταση του ατόμου, λόγω της σφαιρικής συμμετρίας, το ηλεκτρόνιο θα βρίσκεται στο κέντρο της σφαίρας χωρίς να ασκείται επάνω του καμία δύναμη. Όταν το άτομο διεγερθεί, λόγω της ηλεκτρικής εκκενώσεως, το ηλεκτρόνιο μπορεί να μετατοπισθεί από το κέντρο σε μια απόσταση R , όπως φαίνεται στο σχήμα 7.6. Σαν αποτέλεσμα, ασκείται επάνω του ακτινικά μια δύναμη $F = -eE$, όπου E το ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται στην σφαιρική κατανομή φορτίου μέσα στην σφαίρα ακτίνας R .

Το πεδίο E προκύπτει εύκολα από τον νόμο του Gauss (στο σύστημα μονάδων MKSA) :

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = Q_s / \epsilon_0 \quad (7.11).$$

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας του προβλήματος, χρησιμοποιούμε σαν επιφάνεια ολοκλήρωσεως S την σφαίρα ακτίνας r και βρίσκουμε κατά γνωστά :

$$4\pi r^2 E = \frac{e}{\epsilon_0} \cdot \frac{r^3}{R^3} \quad (7.12).$$



Σχήμα 7.6

Υπολογισμός της δύναμης επαναφοράς στο ηλεκτρόνιο του ατόμου του H
Η δύναμη οφείλεται στο φορτίο που βρίσκεται μέσα στην σφαίρα ακτίνας R .

Στην (7.12) έχουμε εκφράσει το φορτίο Q_S μέσα στην επιφάνεια S σαν γινόμενο της πυκνότητας φορτίου ρ επί τον όγκο της σφαίρας ακτίνας r . Δηλαδή: $Q_S = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$,

όπου $\rho = \frac{e}{\frac{4}{3} \pi R^3}$.

Από την (7.12) έχουμε $E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r}{R^3}$ (7.13),

και $F = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r}{R^3}$ (7.14).

Βλέπουμε λοιπόν ότι έχουμε μια δύναμη η οποία είναι ανάλογη προς την απομάκρυνση R από τη θέση ισορροπίας. Αυτή η δύναμη είναι όμοια με την δύναμη επαναφοράς ελατηρίου

του οποίου η σταθερά (ελατηρίου) είναι: $D = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}$ (7.15).

Άρα το ηλεκτρόνιο εκτελεί μια αρμονική ταλάντωση με συχνότητα ν_e ίση προς:

$$\nu_e = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}} \quad (7.16)$$

Κατά συνέπεια (σε αναλογία με την ακτινοβολία που προέρχεται από τα ηλεκτρόνια μιας κεραίας, τα οποία εκτελούν αρμονική ταλάντωση) η συχνότητα της ακτινοβολίας που εκπέμπεται, ν_ϕ , θα είναι ίδια με την συχνότητα της ταλάντωσης ν_e , δηλαδή:

$$\nu_\phi = \nu_e \quad (7.17).$$

Θέτοντας $R \approx 10^{-10}$ m, $e \approx 1.6 \times 10^{-19}$ Coulomb και $m \approx 9.1 \times 10^{-31}$ kg, στις σχέσεις (7.16 - 7.17) βρίσκουμε $\nu_\phi \approx 2.5 \times 10^{15}$ sec⁻¹

Το αντίστοιχο μήκος κύματος $\lambda_\phi = c / \nu_\phi$ είναι $\lambda_\phi \approx 1.2 \times 10^{-7}$ m ≈ 1200 Å.

Συγκρίνοντας με το φάσμα του σχήματος 7.2, βλέπουμε ότι αυτή είναι και η σωστή τάξη μεγέθους (10^3 Å) για το μήκος κύματος της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας. Βέβαια θα μπορούσαμε, εάν θέλαμε, να ρυθμίσουμε την τιμή της ατομικής ακτίνας ώστε να βελτιώσουμε ακόμη περισσότερο την τιμή του μήκους κύματος. Όμως το γεγονός ότι το μοντέλο προβλέπει μια μόνο γραμμή (μία συχνότητα ή ένα μήκος κύματος) έρχεται σε πλήρη αντίθεση με το φάσμα του σχήματος 7.2 (ή 7.1) το οποίο αποτελείται από ένα μεγάλο αριθμό χαρακτηριστικών φασματικών γραμμών. Έτσι, το ατομικό πρότυπο του Thomson παρουσιάζει ένα σοβαρό πρόβλημα ασυμφωνίας με το πείραμα.

Όμως την «χαριστική βολή» στο μοντέλο του Thomson έδωσε η εργασία ενός πρώην μαθητή του, του Rutherford, ο οποίος ασχολήθηκε με πειράματα σκεδάσεως σωματίων α από άτομα. Ο Rutherford έδειξε ότι το συμπέρασμα που προκύπτει από τα πειράματα αυτά είναι ότι όλο το θετικό φορτίο του ατόμου είναι συγκεντρωμένο σε μια πάρα πολύ μικρή περιοχή στο κέντρο του ατόμου και δεν είναι απλωμένο σ' όλο το άτομο. Σε πλήρη αντίθεση με ότι θα περίμενε κανείς για την σκέδαση σωματιδίων α (τα οποία είναι θετικά φορτισμένοι πυρήνες He) από τα θετικά φορτία του ατόμου του Thomson, τα πειράματα του Rutherford έδειξαν σημαντική σκέδαση σε μεγάλες γωνίες σκεδάσεως, ακόμα και στις 180° . Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να συμβαίνει μόνο εάν τα θετικά φορτία, τα οποία συγκεντρώνουν όλη σχεδόν την μάζα του ατόμου, ήταν συγκεντρωμένα σε μια πολύ μικρή περιοχή, σχεδόν σημειακών διαστάσεων. Η έκπληξη του Rutherford ήταν πολύ μεγάλη με τα αποτελέσματα των πειραμάτων του. Ήταν, όπως ο ίδιος έλεγε αργότερα, σαν να πυροβολούσες με μια σφαίρα σ' ένα λεπτό φύλο χαρτί και έβλεπες την σφαίρα να γυρίζει πίσω (να σκεδάζεται κατά 180°). Η ακτίνα αυτού του θετικού **ατομικού πυρήνα** προσδιορίστηκε από τα πειράματα σκεδάσεως πως είναι της τάξεως των 10^{-14} m, ενώ η ακτίνα του ατόμου είναι, ως γνωστόν, της τάξεως των 10^{-10} m. Έτσι ο όγκος του ατόμου είναι 12 τάξεις μεγέθους μεγαλύτερος από τον όγκο του ατομικού πυρήνα.

Σύμφωνα λοιπόν με τα πειράματα του Rutherford, οι περιοχές του θετικού και του αρνητικού φορτίου, οι οποίες πρακτικά μπορεί να θεωρηθούν ότι είναι σημειακών διαστάσεων, χωρίζονται μεταξύ τους από μια απόσταση R της τάξεως των 10^{-10} m. Όμως, εάν αφήσουμε ελεύθερα και ακίνητα δυο αντίθετα σημειακά φορτία, αργά ή γρήγορα, λόγω της αμοιβαίας έλξης τους, θα πλησιάσουν μέχρι η απόστασή τους να μηδενιστεί. Έτσι, ο μόνος τρόπος να διατηρηθεί ο πυρήνας και το ηλεκτρόνιο σε κάποια απόσταση R , παρά την αμοιβαία έλξη μεταξύ τους, είναι να έχει το ηλεκτρόνιο κάποια αρχική κινητική ενέργεια και στροφορμή ώστε να εκτελεί κυκλική τροχιά γύρω από τον πυρήνα, σε αναλογία με τις πλανητικές τροχιές γύρω από τον Ήλιο.

7.4.2 Το ατομικό πρότυπο του Rutherford

Σύμφωνα με το «πλανητικό» ατομικό πρότυπο, που υιοθέτησε ο Rutherford το άτομο του υδρογόνου αποτελείται από έναν θετικά φορτισμένο πυρήνα, ένα πρωτόνιο, γύρω από τον οποίο περιστρέφεται ένα ηλεκτρόνιο με ακτίνα τροχιάς R , όπως φαίνεται στο σχήμα 7.7. Η ελκτική δύναμη Coulomb από τον πυρήνα δρα ως κεντρομόλος δύναμη και κρατεί το ηλεκτρόνιο σε κυκλική τροχιά ακτίνας R . Η συνθήκη ισορροπίας γράφεται:

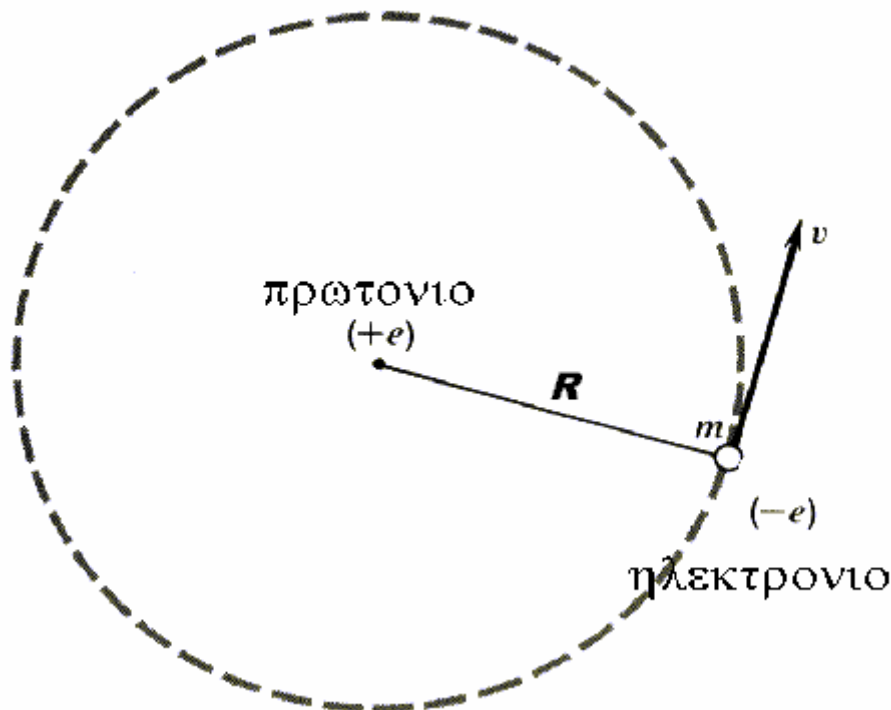
$$F = \frac{m v^2}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} \quad (7.18),$$

από την οποία μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα v του ηλεκτρονίου, εάν έχουμε κάποια εκτίμηση για την ακτίνα R (π.χ. $R \approx 10^{-10}$ m), καθώς και την συχνότητα περιστροφής

$$v_e \text{ του ηλεκτρονίου : } v_e = \frac{v}{2\pi R}, \quad (7.19).$$

Η συχνότητα ν_φ της ακτινοβολίας, θα δίνεται, όπως και πριν από την (7.17), θα είναι δηλαδή ίδια με την ν_e .

Για $R \approx 10^{-10}$ m, βρίσκουμε, όπως και στο μοντέλο Thomson⁸⁴, $\nu_e \approx 2.5 \times 10^{15} \text{ sec}^{-1}$, οπότε και $\nu_\varphi \approx 2.5 \times 10^{15} \text{ sec}^{-1}$ και $\lambda_\varphi \approx 1200 \text{ \AA}$. Παρόλο ότι βρίσκουμε την ίδια τιμή της συχνότητας ν_φ με το μοντέλο Thomson για την ίδια επιλογή της ακτίνας R , το μοντέλο του Rutherford, σύμφωνα με το οποίο όλη η μάζα του ατόμου είναι συγκεντρωμένη (μαζί με το θετικό φορτίο) στον πυρήνα του ατόμου με ακτίνα της τάξεως των 10^{-14} m, είναι πειραματικά επιβεβαιωμένο.



Σχήμα 7.7

Το άτομο του υδρογόνου σύμφωνα με το κλασικό ατομικό πρότυπο του Rutherford

⁸⁴ Βλέπε και άσκηση 7.12

Υπάρχει όμως ένα σημαντικό πρόβλημα : Ένα τέτοιο άτομο, κατ' εικόνα και ομοίωση του πλανητικού συστήματος, δεν μπορεί να είναι κλασικά σταθερό. Το ηλεκτρόνιο επιταχύνεται συνεχώς λόγω της κεντρομόλου επιτάχυνσης, $\gamma_{\kappa} = \frac{v^2}{R}$, οπότε θα χάνει συνεχώς ενέργεια, αφού, σύμφωνα με την κλασική ηλεκτρομαγνητική θεωρία (βλέπε κεφάλαιο 21 ΣΚΦ) εκπέμπει συνεχώς ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με ρυθμό :

$$N = \frac{2}{3} \frac{e^2 \gamma_{\kappa}^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{2}{3} \frac{e^2 v^4}{4\pi\epsilon_0 c^3 R^2} \quad (7.20)$$

Βλέπουμε λοιπόν από την (7.20) ότι η ακτινοβολούμενη ισχύς N (ενέργεια ανά μονάδα χρόνου) είναι συνάρτηση του χρόνου, αφού η ακτίνα και η ταχύτητα, από τις οποίες εξαρτάται η ενέργεια του συστήματος (δυναμική και κινητική αντίστοιχα), θα μειώνονται συνεχώς και το ηλεκτρόνιο θα πλησιάζει όλο και περισσότερο στον πυρήνα μέχρι να πέσει επάνω του, όπως φαίνεται παραστατικά στο σχήμα 7.8. Μάλιστα, από την (7.20) μπορούμε να εκτιμήσουμε (βλέπε άσκηση 7.18) τον χρόνο μέσα στον οποίο προβλέπεται ότι θα συμβεί κάτι τέτοιο, σε περίπου 10^{-11} sec .

Δηλαδή, η συρρίκνωση του ατόμου θα έπρεπε να είναι αστραπιαία .

Αξίζει επίσης να παρατηρήσουμε πως σε μια τέτοια περίπτωση, λόγω της συνεχούς μεταβολής της ταχύτητας και της ακτίνας, η συχνότητα ν_e , σύμφωνα με την σχέση 7.19, και κατά συνέπεια και η συχνότητα ν_{ϕ} θα μεταβάλλονταν συνεχώς από μια μέγιστη τιμή (γύρω στα 2.5×10^{15} sec⁻¹) μέχρι το μηδέν. Έτσι το φάσμα του ατόμου θα ήταν **συνεχές και όχι γραμμικό**.

Βλέπουμε λοιπόν, πως **σύμφωνα το κλασικό ατομικό πρότυπο του Rutherford, το άτομο του υδρογόνου, και κατ' επέκταση και των άλλων στοιχείων, δεν μπορεί να είναι σταθερό**. Το άτομο αυτό συμπεράσμα δεν μπορεί να διορθωθεί στα πλαίσια της κλασικής φυσικής, αλλά ούτε και στα πλαίσια της απλής κβαντικής θεωρίας των φωτονίων.

Πράγματι, εισάγοντας απλώς την έννοια του φωτονίου αντί του συνήθους ηλεκτρομαγνητικού κύματος δεν θα πρόσθετε κάποια σημαντική πληροφορία σε σχέση με την προέλευση του φάσματος, αφού δεν θα μπορούσε να εξηγήσει την σταθερότητα του ατόμου. Εάν πάλι, προς στιγμήν, υιοθετούσαμε το πρότυπο του Thomson, το οποίο οδηγεί σε αρμονική ταλαντωτική κίνηση του ηλεκτρονίου, και προχωρούσαμε σε κβάντωση των ατομικών ταλαντωτών (όπως στο μέλαν σώμα, και τις ειδικές θερμοότητες)

θα έπρεπε όλες οι γραμμές του φάσματος να ισαπέχουν, αφού όλες οι συχνότητες θα ήσαν ακέραια πολλαπλάσια της βασικής συχνότητας ν_e , δίνεται από την 7.16. Προφανώς, ένα τέτοιο μοντέλο θα ήταν διπλά λανθασμένο αφού δεν θα ήταν αντίθετο μόνο στα πειράματα του Rutherford αλλά και στην μορφή του φάσματος.

Μόνο μια πλήρης κβαντική θεωρία της ύλης, η οποία θα προβλέπει τις (κβαντισμένες) ενεργειακές καταστάσεις του ατόμου μπορεί να δώσει πλήρη απάντηση σ' αυτό το θέμα (δηλαδή απάντηση που δεν θα έρχεται σε καμία αντίθεση με τα μέχρι τώρα γνωστά πειραματικά δεδομένα). Μια τέτοια κβαντική θεωρία του ατόμου του υδρογόνου (και αργότερα των υπολοίπων πιο σύνθετων ατόμων), θα αναπτύξουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Ασκήσεις

7.7 Εκτελέστε τα ενδιάμεσα βήματα και δείξτε την σχέση 7.12, από το νόμο του Gauss (σχέση 7.11).

7.8 Γράψτε την διαφορική εξίσωση κινήσεως, η οποία αντιστοιχεί στην δύναμη που δίνεται από την σχέση 7.14 και δείξτε ότι δέχεται λύσεις της μορφής :

$$r = r_0 \sin(2\pi\nu_e t), \text{ όπου } \nu_e \text{ δίνεται από την σχέση 7.16.}$$

7.9 Δείξτε ότι η συχνότητα περιστροφής του ηλεκτρονίου ν_e στο μοντέλο του Rutherford δίνεται από την ίδια σχέση, όπως και στο μοντέλο Thomson.

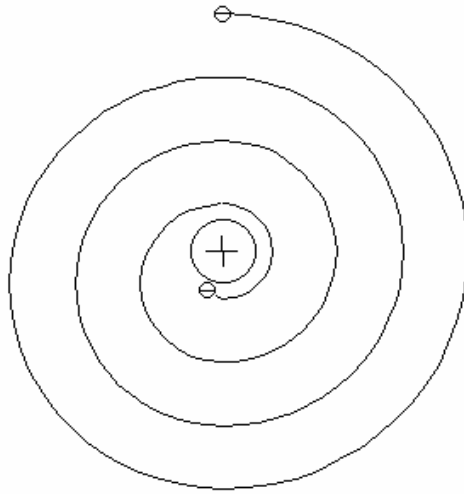
7.10 Πως θα έπρεπε να ήταν το ατομικό φάσμα εκπομπής του υδρογόνου, εάν είχαμε υιοθετήσει το ατομικό πρότυπο του Thomson και την συνθήκη κβαντώσεως του Planck (σχέση 3.82) ;

7.11 Εάν θεωρήσουμε σαν γεγονός δεδομένο (κλασικά ανεξήγητο) ότι η ακτίνα του ατόμου του υδρογόνου έχει μια σταθερή μη μηδενική τιμή, εκτιμείστε πρόχειρα την ακτίνα του ατόμου του υδρογόνου κλασικά, ή όπως αλλιώς νομίζετε, αγνοώντας προς στιγμή το ασυμβίβαστο του κλασικού μοντέλου μ' αυτή την εκτίμηση. Εάν χρησιμοποιήσετε περισσότερους από ένα τρόπους υπολογισμού, συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας. Σχολιάστε !

7.12 Με βάση το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης για την ακτίνα, εκτιμείστε την ταχύτητα v και την συχνότητα περιστροφής ν του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου.

7.13 Εάν παραβλέψουμε προς στιγμή το γεγονός ότι η κλασική φυσική προβλέπει συνεχές φάσμα για το άτομο του υδρογόνου και θεωρήσουμε ότι το φάσμα μπορεί να

είναι γραμμικό. Πως θα έμοιαζε, κατά τη γνώμη σας, αυτό το φάσμα. Σχεδιάστε το πρόχειρα, σε αναλογία με το σχήμα 7.1.



Σχήμα 7.8

Σχηματική αναπαράσταση της « πτωτικής » τροχιάς του ηλεκτρονίου, λόγω ακτινοβολίας, στο πλανητικό μοντέλο του Rutherford για το άτομο του H.

***7.14** Με βάση τις σχέσεις 7.18 και 7.20 δείξτε

α) ότι η ολική ενέργεια του ατόμου E , η οποία ισούται με το άθροισμα της δυναμικής (V) και της κινητικής (T) ενέργειας ($E = V + T$) μπορεί να γραφεί :

$$\text{είτε } E = -T = -\frac{1}{2}mv^2, \quad (7.21)$$

$$\text{είτε } E = V/2 = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (7.22)$$

Υπόδειξη : Θυμηθείτε ότι η δυναμική ενέργεια (και η ολική ενέργεια) είναι αρνητική, λόγω της θέσης ($x = \infty$) στην οποία έχει ορισθεί το μηδέν της δυναμικής ενέργειας.

β) η ακτινοβολούμενη ισχύς N , μπορεί να γραφεί :

$$N \equiv -\frac{dE}{dt} = \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \frac{32E^4}{3c^3m^2}$$

Υπόδειξη : Εκφράστε την ακτίνα και την ταχύτητα του ηλεκτρονίου σαν συνάρτηση της ενέργειας E , με βάση τα αποτελέσματα της προηγούμενης ερώτησης.

γ) Εάν $E_{\text{αρχ}}$ και $E_{\text{τελ}}$ αντίστοιχα είναι η ενέργειες που αντιστοιχούν στην αρχική και τελική ακτίνα, δείξτε ότι ο χρόνος $\Delta t = t_{\text{τελ}} - t_{\text{αρχ}}$ που μεσολαβεί δίνεται από το ολοκλήρωμα :

$$\Delta t = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{3c^3 m^2}{32} \int_{E_{\text{αρχ}}}^{E_{\text{τελ}}} \frac{1}{E^4} dE \quad (7.23)$$

δ) Θεωρείστε τώρα ότι η αρχική ενέργεια, στην κανονική ακτίνα, είναι $E = -14 \text{ eV}$. Δείξτε ότι ο χρόνος που χρειάζεται για να συρρικνωθεί τελείως το άτομο (δηλαδή να φτάσει σε ακτίνα 0) είναι

$$\Delta t \cong 10^{-11} \text{ sec} .$$

Υπόδειξη : Θυμηθείτε ότι η τελική ενέργεια που αντιστοιχεί σε $r = 0$, σύμφωνα με την (7.22), είναι $-\infty$

***7.15** Ποια επίδραση πιστεύετε ότι μπορεί να είχε, εάν είχε: $1^{0\text{v}}$ στον όγκο και $2^{0\text{v}}$ στη μάζα του ατόμου, ένας υποθετικός διπλασιασμός του φορτίου του ηλεκτρονίου; Τι θα λέγατε για την επίσης υποθετική περίπτωση υποδιπλασιασμού του φορτίου του ηλεκτρονίου; Επεξηγήστε.

Ανακεφαλαίωση

1) Τα ατομικά φάσματα, τα οποία είναι γραμμικά (όχι συνεχή) προέρχονται από την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που εκπέμπουν τα ηλεκτρόνια των ατόμων κατά την κίνησή τους.

2) Τα ατομικά φάσματα (τα μήκη κύματος των γραμμών που εμφανίζονται στην φωτογραφική πλάκα) είναι χαρακτηριστικά του κάθε στοιχείου και αποτελούν την «φασματική του ταυτότητα». Το ατομικό φάσμα ενός στοιχείου και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αναγνώριση του σε μακρινές πηγές, όπως οι αστέρες.

3) Παρόλη την πολυπλοκότητα και την ακανόνιστη μορφή των ατομικών φασμάτων, υπάρχουν κάποιες κανονικότητες, που εκφράζονται με τον γενικευμένο τύπο του Balmer και την συνδυαστική αρχή.

4) Ο γενικευμένος τύπος του Balmer για το άτομο του υδρογόνου γράφεται:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad m = 1, 2, 3, \dots, n = m+1, m+2, m+3, \dots \quad (7.6)$$

ή ισοδύναμα: $\nu_{\phi} = c R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad m = 1, 2, 3, \dots, n = m+1, m+2, m+3, \dots \quad (7.8)$

Η σταθερά R_H , στις (7.6-7.8) ονομάζεται σταθερά του Rydberg και η τιμή της, όπως προσδιορίζεται εμπειρικά από το ατομικό φάσμα του υδρογόνου, είναι περίπου 109700 cm^{-1} .

5) Η συνδυαστική αρχή σε απλή γλώσσα λέει ότι κάθε συχνότητα του φάσματος μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα ή διαφορά δύο άλλων συχνοτήτων.

6) Αυτές τις κανονικότητες μας επιτρέπουν την παρουσίαση του φάσματος υπό μορφήν διαγράμματος φασματικών όρων.

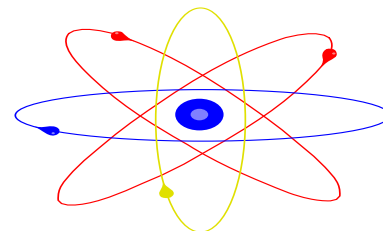
7) Η κλασική Φυσική όχι μόνο δεν μπορεί να εξηγήσει την συνδυαστική αρχή και τον τύπο του Balmer, αλλά ούτε το γεγονός ότι τα ατομικά φάσματα είναι γραμμικά και όχι συνεχή.

8) Η κλασική Φυσική δεν μπορεί να εξηγήσει την σταθερότητα των ατόμων.

9) Σύμφωνα με το επικρατέστερο κλασικό ατομικό πρότυπο του Rutherford, το άτομο του υδρογόνου (και οποιοδήποτε άλλο άτομο) σε χρόνο της τάξεως $\cong 10^{-11}$ sec θα συρρικνωθεί σε μηδενική ακτίνα και το φορτίο του πυρήνα θα εξουδετερωθεί από το φορτίο των ηλεκτρονίων.

10) Η πλήρης αδυναμία της Κλασικής Φυσικής να περιγράψει τα ατομικά φάσματα και την ατομική δομή μπορεί να αντιμετωπισθεί από την εφαρμογή Κβαντική Φυσική.

Κεφάλαιο 8: Η ατομική Θεωρία του Bohr



Εισαγωγή

Μέχρι τώρα, με εξαίρεση το μεταβατικό κεφάλαιο 7 που προηγήθηκε και το κεφάλαιο 4 για τις ειδικές θερμότητες, τα υπόλοιπα κεφάλαια ασχολήθηκαν με την Κβαντική θεωρία της Ακτινοβολίας. Το μεγαλύτερο μέρος ήταν αφιερωμένο στην «παλαιά Κβαντική θεωρία της ακτινοβολίας» η οποία αντιπροσωπεύει «τα νηπιακά χρόνια» της Κβαντικής Θεωρίας. Σ' αυτό το κεφάλαιο (μετά τον «πρόλογο» του προηγούμενου κεφαλαίου, στο οποίο παρουσιάστηκαν τα προβλήματα της Κλασικής Φυσικής με τα ατομικά φάσματα και τα ατομικά πρότυπα) αρχίζει η περιγραφή της παλαιάς Κβαντική θεωρία της ύλης. Αν η παλαιά Κβαντική θεωρία της ακτινοβολίας αντιπροσωπεύει τα νηπιακά χρόνια της Κβαντικής Φυσικής, τότε (στο ίδιο χιουμοριστικό πνεύμα) τα περιεχόμενα αυτού και του επόμενου κεφαλαίου εμπίπτουν στα «παιδικά και εφηβικά χρόνια» της Κβαντικής θεωρίας. Η διάκριση αυτή είναι κυρίως εννοιολογική και παιδαγωγική, αλλά, όπως είναι φυσικό, στο μεγαλύτερο μέρος της είναι και χρονολογική. Έτσι, αν εξαιρέσουμε μερικά απ' τα πιο προχωρημένα θέματα της ακτινοβολίας, τα οποία εξετάστηκαν στα κεφάλαια 5 και 6, η χρονική αλληλουχία, λίγο – πολύ, τηρείται. Αφειρητά της Κβαντική θεωρία της ύλης θα είναι το ατομικό μοντέλο του Bohr για το υδρογόνο. Το μοντέλο αυτό θα γενικευθεί και επεκταθεί σε πιο σύνθετα άτομα (σ' αυτό το κεφάλαιο) και σε άλλα υλικά συστήματα (στο κεφάλαιο 9). Στο κεφάλαιο 9 η Κβαντική Φυσική θα εμπλουτισθεί με καινούργιες ιδέες και έννοιες, οι οποίες θα της δώσουν την δυνατότητα να αυξήσει την γκάμα των φαινομένων που περιγράφει. Αυτές οι νέες ιδέες θα σχηματιστούν και θα χρησιμοποιηθούν στο κεφάλαιο 10 (το τελευταίο κεφάλαιο αυτού του τόμου) για να βάλουν τα θεμέλια της Κβαντομηχανικής. Η Κβαντομηχανική, όπως θα δούμε, στον δεύτερο τόμο της Κβαντικής Φυσικής, αποτελεί μια ολοκληρωμένη, συνεπή και πλήρη μορφή της Σύγχρονης Κβαντικής Θεωρίας των υλικών συστημάτων.

Περιεχόμενα του Κεφαλαίου**8.1 Το Κβαντικό μοντέλο του Bohr για το άτομο του υδρογόνου.****8.1.1** Η υπόθεση του Bohr**8.1.2** Η θεωρία του Bohr**8.2** το αξίωμα της κβάντωσης της στροφορμής.**8.3** Η αρχή της αντιστοιχίας για το άτομο του υδρογόνου.**8.4** Το ατομικό μοντέλο του Bohr για άλλα στοιχεία**8.5** Πειραματική Σύγκριση:**8.5.1** Φάσμα ακτίνων X**8.5.2** Πείραμα Franck-Hertz**8.6** Σύνοψη: Πλεονεκτήματα- Μειονεκτήματα του μοντέλου του Bohr.**8.1 Το Κβαντικό μοντέλο του Bohr για το άτομο του υδρογόνου****8.1.1 Η υπόθεση του Bohr**

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 7, τα εμπειρικά δεδομένα, όπως τα διαγράμματα φασματικών όρων στο σχήμα 7.3 και η γενικευμένη σχέση του Balmer $\nu_{\phi} = c R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$, σχέση 7.8, συνηγορούν για κβάντωση των ενεργειακών καταστάσεων του ατόμου του υδρογόνου σε αναλογία με την κβάντωση των ενεργειακών καταστάσεων των ατομικών ταλαντωτών στην ακτινοβολία του μέλανος σώματος. Με βάση αυτή την αναλογία, για να βοηθήσουμε την σύγκριση του ενεργειακού διαγράμματος του σχήματος 3.6 με το διάγραμμα του σχήματος 7.3, πολλαπλασιάζουμε με την σταθερά του Planck, h , την (7.8), ώστε να εμφανισθεί η ενέργεια του φωτονίου E_{ϕ} :

$$E_{\phi} = h\nu_{\phi} = chR_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (8.1)$$

Εάν θεωρήσουμε τον πρώτο όρο (την μικρότερη συχνότητα) κάθε φασματικής σειράς, ο οποίος προκύπτει θέτοντας $n = m + 1$ στην (8.1) μπορούμε να γράψουμε την ενέργεια των φωτονίων του φάσματος σαν διαφορά δυο όρων που χαρακτηρίζονται από δύο διαδοχικούς ακέραιους, όπως στην σχέση 3.84 :

$$E_{\phi} = h\nu_{\phi} = chR_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{(m+1)^2} \right) = E_{m+1} - E_m \quad (8.2)$$

Οδηγούμαστε λοιπόν στο συμπέρασμα (κατ' αναλογία με την 3.84) ότι οι κβαντισμένες ατομικές καταστάσεις του υδρογόνου θα πρέπει να αντιστοιχούν σε ενέργειες που δίνονται από τη σχέση:

$$E_n = -\frac{chR_H}{n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.3)$$

Αντικαθιστώντας στην (8.3) τις αριθμητικές τιμές των σταθερών c , h και R_H , οι οποίες είναι γνωστές από τα πειραματικά δεδομένα (η τιμή της σταθεράς R_H δίνεται στη σχέση 7.5) βρίσκουμε:

$$E_n = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.4)$$

Ερώτηση 8.1 Εάν δεχθούμε προς στιγμή την κβάντωση της ενέργειας που περιγράφει η (8.3), τι άλλες συνέπειες θα είχε αυτή η σχέση για το άτομο του υδρογόνου ;

Απάντηση Είδαμε στην άσκηση 7.14, ότι η ταχύτητα και η ακτίνα του ατόμου, σχέσεις 7.11 και 7.12 αντίστοιχα, καθορίζονται (και καθορίζουν) μονοσήμαντα από την ενέργεια. Άρα θα πρέπει και η ταχύτητα και η ακτίνα της τροχιάς του ηλεκτρονίου, τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε από την (8.3) ή την (8.4) να είναι κβαντισμένες και να παίρνουν μόνο συγκεκριμένες διάκριτες τιμές. Κατά συνέπεια και άλλες ποσότητες που εξαρτώνται από την ταχύτητα και την ακτίνα, όπως το μέτρο της στροφορμής $|L| = mvr$, θα μπορούσαν να είναι κβαντισμένες.

Από την εμπειρική τιμή της σταθεράς R_H και τις τιμές των σταθερών c και h βρίσκουμε ότι⁸⁵:

$$\left. \begin{aligned} r &= (0.53 \cdot 10^{-10} \text{ m}) \times n^2, \quad v = (2.19 \times 10^6 \text{ m/sec}) \times \frac{1}{n} \quad \text{και} \\ L &= (1.0547 \times 10^{-34} \text{ Kg. m / sec}^2 \cdot \text{m}) \times n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} (8.5)$$

Υπάρχει άραγε κάποιο κρυμμένο νόημα σ' αυτές τις αριθμητικές τιμές και σχέσεις ;

Την απάντηση θα την δούμε αργότερα.

Όμως εάν δεχθούμε αυτές τις σχέσεις, ανεξάρτητα του κατά πόσο αντιλαμβανόμαστε το νόημα τους, εφόσον υπάρχει βέβαια κάποιο νόημα, τότε μπορούμε να εξηγήσουμε την σταθερότητα και την μη συρρίκνωση του ατόμου του υδρογόνου στην κανονική του κατάσταση. Στην κανονική του κατάσταση, η οποία αντιστοιχεί στην χαμηλότερη ενέργεια με $n=1$, το άτομο του υδρογόνου δεν ακτινοβολεί, σε πλήρη αναλογία με τους παγωμένους βαθμούς ελευθερίας των ταλαντωτών του μέλανος σώματος. Αυτό, όπως είδαμε, συμβαίνει επειδή δεν υπάρχουν άλλες ενεργειακές καταστάσεις με ακόμα χαμηλότερη ενέργεια, στις οποίες θα μπορούσε να μεταβεί το άτομο εκπέμποντας φωτόνιο με ανάλογη ενέργεια και συχνότητα.

Θα μπορούσαμε λοιπόν με τις παραδοχές που κάναμε (σχέση 8.3 ή 8.4) να ξεφύγουμε από τα δύο σοβαρότατα προβλήματα, της ευστάθειας του ατόμου και της μορφής του φάσματος, τα οποία είχε το κλασικό ατομικό πρότυπο του Rutherford.

Ακολουθώντας περίπου την ίδια φιλοσοφία, για να αποφύγει τα δύο σοβαρά αυτά προβλήματα, ο διάσημος Δανός Φυσικός Niels Bohr διατύπωσε το 1913 την υπόθεση για το ατομικό πρότυπο του υδρογόνου (και κατ' επέκταση και όλων των άλλων ατόμων)

⁸⁵ Δείτε την άσκηση 8.1, καθώς και το πρώτο μέρος της άσκησης 7.8

που φέρει το όνομά του. Η λύση προβλήματος, από τον Bohr, μοιάζει λίγο-πολύ με τη λύση του Γόρδιου Δεσμού από τον Μ. Αλέξανδρο.

Ο Bohr, ακολουθώντας την αντίστροφη πορεία στους συλλογισμούς που αναπτύξαμε μέχρι τώρα, δέχτηκε απλά σαν αξίωμα ότι:

1) στην «κανονική» του κατάσταση, το άτομο του υδρογόνου (και όλων των άλλων στοιχείων) δεν εκπέμπει ακτινοβολία. Γενικά δεν εκπέμπεται ακτινοβολία όταν το άτομο βρίσκεται σε συγκεκριμένες «στάσιμες καταστάσεις» οι οποίες χαρακτηρίζονται από ένα ακέραιο κβαντικό αριθμό, n και έχουν αυστηρά καθορισμένη ενέργεια E_n . Οι «στάσιμες καταστάσεις» αντιστοιχούν σε καθορισμένες κυκλικές τροχιές του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα με προκαθορισμένη ακτίνα.

Έτσι όπως παρουσιάζεται, φαίνεται απλή σαν παιχνίδι αυτή η ιδέα αλλά πραγματικά αποτελεί μία από τις πιο ριζοσπαστικές απόψεις στη σύγχρονη φυσική σύμφωνα με την οποία πολλοί συνηθισμένοι από την μακροσκοπική εμπειρία νόμοι (εδώ οι κλασικοί νόμοι της ακτινοβολίας) δεν είναι απαραίτητο να ισχύουν αυτούσιοι στην μικροσκοπική κλίμακα.

2) Ακτινοβολία, υπό μορφήν φωτονίων, εκπέμπεται μόνο όταν το ηλεκτρόνιο μεταπηδάει από μία τροχιά με υψηλή ενέργεια E_n σε άλλη με χαμηλότερη ενέργεια E_m ($E_m < E_n$). Η ενέργεια του φωτονίου E_ϕ , το οποίο εκπέμπεται ισούται (από την αρχή της διατηρήσεως της ενέργειας) με την διαφορά $E_n - E_m$.

Η συχνότητα της ακτινοβολίας δεν έχει καμία σχέση με την συχνότητα περιστροφής του ηλεκτρονίου, αλλά συνδέεται με τη μεταβολή ενέργειας, $\Delta E = E_n - E_m$, κατά τη μετάβαση από την τροχιά υψηλότερης ενέργειας στην τροχιά χαμηλότερης ενέργειας.

Επειδή οι ενέργειες των ηλεκτρονίων είναι συγκεκριμένες και διάκριτες σύμφωνα με το πρώτο αξίωμα του Bohr, το φάσμα του ατόμου είναι γραμμικό και χαρακτηριστικό του συγκεκριμένου ατόμου.

Εάν E_n είναι η αρχική ενέργεια του ηλεκτρονίου και E_m η τελική ενέργεια με αντίστοιχους κβαντικούς αριθμούς n και m ($m < n$), τότε

$$h\nu_{nm} = E_n - E_m \quad (8.6)$$

Έτσι, εξηγείται όχι μόνο η «γραμμικότητα» του φάσματος αλλά και η συνδυαστική αρχή του Ritz, που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Αυτό φαίνεται καθαρά στο σχήμα 8.1, που δείχνει τρεις διαφορετικές ενεργειακές καταστάσεις. Ο E_l , E_m και E_n , όπου $E_l < E_m < E_n$. Όπως βλέπουμε στο σχήμα 8.1, υπάρχουν δύο τρόποι με τους οποίους ένα ηλεκτρόνιο στη στάθμη E_n , μπορεί να μεταβεί στην χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση **Error! Objects cannot be created from editing field codes.**, με ενέργεια **Error! Objects cannot be created from editing field codes.** E_l , ($E_l < E_n$).

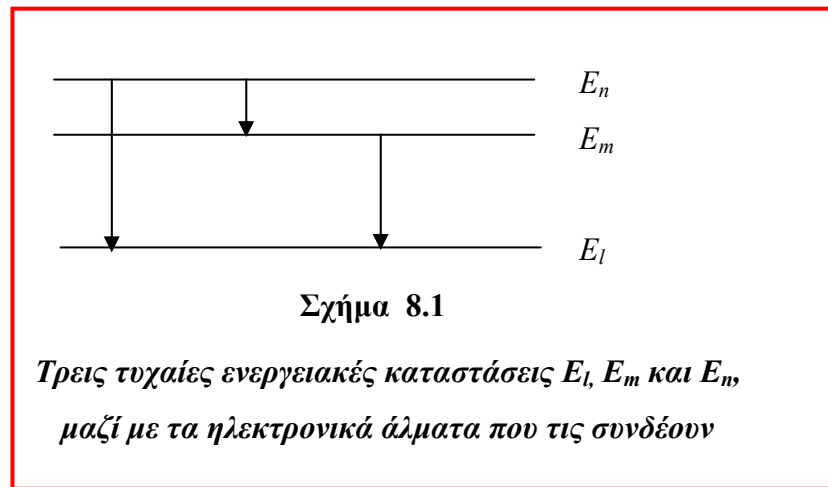
Προφανώς η ενέργεια και στις δύο διαδικασίες πρέπει να είναι ίδια αφού η αρχική (E_n) και η τελική (E_l) ενέργεια είναι και στις δύο περιπτώσεις ταυτόσημες. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε:

$$E_n - E_l = (E_n - E_m) + (E_m - E_l) \quad , \quad (8.7)$$

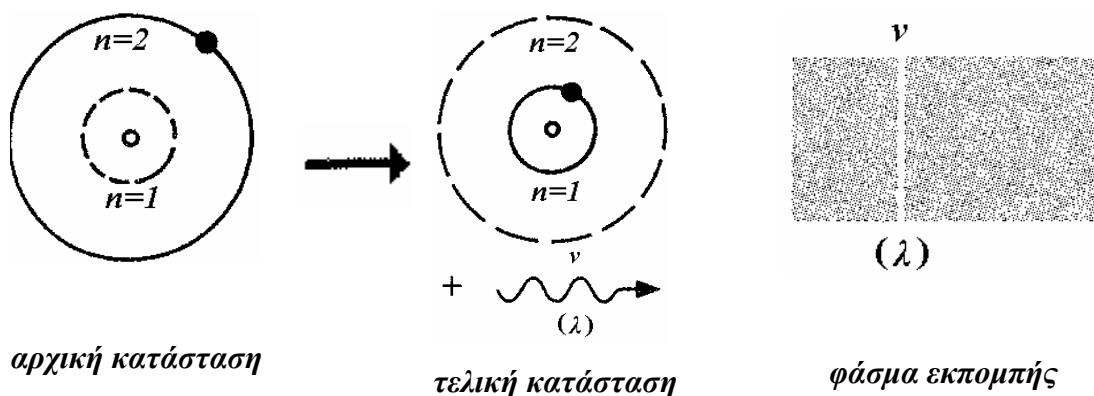
οπότε για τις αντίστοιχες συχνότητες, ισχύει:

$$h\nu_{nl} = h\nu_{nm} + h\nu_{ml} \text{ , ή}$$

$$\nu_{nl} = \nu_{nm} + \nu_{ml} \quad . \quad (8.8)$$



Έτσι φαίνεται πως η συνδυαστική αρχή στο μοντέλο του Bohr είναι ισοδύναμη με την αρχή διατήρησης της ενέργειας. Στο σχήμα 8.2 φαίνεται παραστατικά η δημιουργία του φάσματος εκπομπής του ατόμου του υδρογόνου.



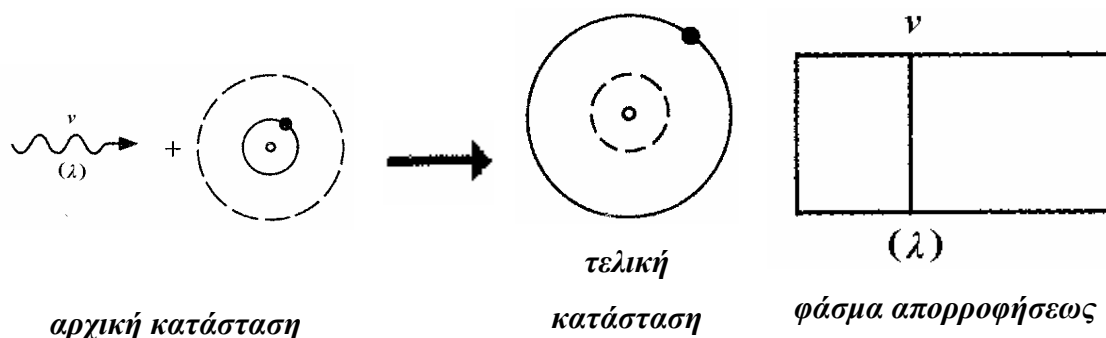
Παραστατική περιγραφή του φάσματος εκπομπής του ατόμου του υδρογόνου με βάση το μοντέλο Bohr.

Ο πυρήνας του ατόμου αντιστοιχεί στον άδειο κύκλο στο κέντρο, ενώ το ηλεκτρόνιο αντιστοιχεί στον γεμάτο κύκλο στην περιφέρεια. Η μεταπήδηση του ηλεκτρονίου(κβαντικό άλμα) από την

τροχιά που βρίσκεται (συνεχής περιφέρεια κύκλου) στην μη-κατειλημμένη τροχιά (διακεκομμένη περιφέρεια κύκλου) συνοδεύεται από την εκπομπή ενός φωτονίου συχνότητας ν (μήκους κύματος λ).

Το γραμμικό φάσμα εκπομπής που προκύπτει (από ένα μεγάλο πλήθος ατόμων) απεικονίζεται σε φωτεινές γραμμές πάνω σε πέτασμα ή φιλμ, το οποίο είναι βαθμονομημένο με βάση το μήκος κύματος.

Στο σχήμα 8.3 δίνεται η αντίστοιχη παραστατική εικόνα για το φάσμα απορροφήσεως.



Σχήμα 8.3

Παραστατική περιγραφή του φάσματος απορροφήσεως του ατόμου του υδρογόνου με βάση το μοντέλο Bohr.

Οι συμβάσεις για την απεικόνιση είναι ίδιες όπως στο σχήμα 8.2. Ένα φωτόνιο συχνότητας ν (μήκους κύματος λ) απορροφάται πλήρως από το άτομο και η ενέργεια του φωτονίου, $h\nu$, διεγείρει το άτομο, σπρώχνοντας το ηλεκτρόνιο σε υψηλότερη τροχιά. Το γραμμικό φάσμα που προκύπτει (από ένα μεγάλο πλήθος ατόμων) απεικονίζεται σαν σκοτεινή γραμμή πάνω σε φωτισμένο πέτασμα ή φιλμ, βαθμονομημένο με βάση το μήκος κύματος.

Σημείωση

Επειδή η «φυσική» μονάδα ενέργειας στα ατομικά προβλήματα είναι το ένα ηλεκτρονιοβόλτ (1 eV) και του μήκους το Ångstrom ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$) ή το νανόμετρο ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$) είναι βολικό στους υπολογισμούς μας να χρησιμοποιούμε μερικούς χαρακτηριστικούς συνδυασμούς των βασικών φυσικών σταθερών h ή \hbar , c , m και e σε κατάλληλες «φυσικές» μονάδες, όπως το eV, το Å, το nm (δείτε για παράδειγμα τον πίνακα 1.1 και 1.4). Στο ένθετο που ακολουθεί δίνουμε μερικούς από αυτούς τους συνδυασμούς, οι οποίοι θα διευκολύνουν πολύ την ταχεία επίλυση των σχετικών ασκήσεων.

Ερώτηση 8.2 Στο σχήμα 8.3, στην τελική κατάσταση το άτομο βρίσκεται σε μια διεγερμένη κατάσταση (αντίστοιχη με εκείνη του σχήματος 8.2). Θα περιμέναμε λοιπόν,

αργά ή γρήγορα, να επανέλθει το άτομο στην θεμελιώδη του κατάσταση εκπέμποντας ένα φωτόνιο της ίδιας συχνότητας, όπως προκύπτει από την διατήρηση της ενέργειας. Κάτι τέτοιο πράγματι συμβαίνει. Τότε όμως, αφού ένα φωτόνιο συχνότητας ν απορροφάται και ένα φωτόνιο της ίδιας συχνότητας εκπέμπεται, γιατί παρατηρούμε την σκοτεινή γραμμή, στη θέση της συχνότητας ν , στο φάσμα απορροφήσεως;

Χρήσιμοι συνδυασμοί φυσικών σταθερών

Μάζα ηλεκτρονίου	$mc^2 = 0.511 \text{ MeV}$	$mc^2 = 0.511 \times 10^6 \text{ eV}$
Μάζα πρωτονίου	$Mc^2 = 938.3 \text{ MeV}$	$c = 3 \times 10^8 \text{ m/sec}$
Φορτίο/μάζα ηλεκτρονίου	$\frac{e}{m} = 1.759 \times 10^{11} \text{ C/kg}$	$\frac{e}{m} = 5.273 \times 10^{17} \text{ (CGS)}$
Σταθερά του Planck	$h = 4.14 \times 10^{-15} \text{ eV sec}$ $hc = 1240 \text{ eV nm}$	$\hbar = 6.58 \times 10^{-16} \text{ eV sec}$ $\hbar c = 197 \text{ eV nm}$
Φορτίο ηλεκτρονίου Σταθερά του Rydberg	$\left[\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right] = 1.44 \text{ eV.nm}$	$chR_H = 13.6 \text{ eV}$
Ακτίνα Bohr	$\alpha_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0.529 \text{ \AA}$	$\frac{e^2}{2\alpha_0} = 13.6 \text{ eV}$
Σταθερά λεπτής υφής	$\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} = 7.3 \times 10^{-3}$	$\frac{1}{2} \alpha^2 mc^2 = 13.6 \text{ eV}$

Ασκήσεις

8.1 Δείξτε τις σχέσεις 8.5

Υπόδειξη: Δείτε το πρώτο μέρος της άσκησης 7.8.

8.2 Με βάση τις σχέσεις 8.4 και 8.5 βρείτε:

α) Την ενέργεια σε eV της πρώτης και της δεύτερης ενεργειακής κατάστασης του ατόμου του υδρογόνου.

β) Την ενέργεια και τη συχνότητα του φωτονίου που εκπέμπεται όταν το ηλεκτρόνιο πηδάει από την δεύτερη στην πρώτη επιτρεπόμενη τροχιά.

Σε ποια περιοχή του φάσματος αντιστοιχεί αυτή η συχνότητα ;

γ) Την συχνότητα περιστροφής του ηλεκτρονίου σε κάθε μια από τις δύο αυτές επιτρεπόμενες τροχιές.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείτε τη σχέση 7.9 για το ερώτημα (γ).

8.3 Πόσες και ποιές είναι οι δυνατές συχνότητες φωτονίων, τα οποία μπορούν να εκπεμφθούν από άτομα υδρογόνου τα οποία έχουν διεγερθεί στην τρίτη ενεργειακή κατάσταση ;

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείτε σαν υπόδειγμα το σχήμα 8.1

***8.4** Με βάση το μοντέλο του Bohr, βρείτε τις συχνότητες και τα μήκη κύματος των φωτονίων που μπορούν να εκπεμφθούν από άτομα αερίου υδρογόνου μέσα σε σωλήνα ηλεκτρικής εκκενώσεως, όταν βομβαρδιστούν με ηλεκτρόνια ενέργειας 12.2 eV.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείτε το θεώρημα διατηρήσεως της ενέργειας για να βρείτε την υψηλότερη δυνατή ενέργεια στην οποία τα άτομα μπορούν να διεγερθούν. Θυμηθείτε ότι τα άτομα πριν την διέγερση τους βρίσκονται στην θεμελιώδη κατάσταση, που αντιστοιχεί στην χαμηλότερη δυνατή ενέργεια.

***8.5** Πως αλλάζει το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης, εάν η ενέργεια των ηλεκτρονίων γίνει 12.1 eV ;

Και στις δύο περιπτώσεις, μπορούν τα άτομα να απορροφήσουν ολόκληρη την διατιθέμενη ενέργεια των 12.2 eV και 12.1 eV, αντίστοιχα ;

Αν όχι, τι γίνεται η υπόλοιπη ενέργεια ;

8.1.2 Η θεωρία του Bohr

Βλέπουμε πως με τα δύο, όχι τελείως ανεξάρτητα μεταξύ τους, αξιώματα του Bohr μπορούμε να περιγράψουμε το φάσμα του ατόμου του υδρογόνου (και κατ' επέκταση και των άλλων ατόμων). Όμως αυτή η περιγραφή, όπως φαίνεται και από τις σχέσεις 8.3-8.5, δεν βασίζεται μόνο σε θεμελιώδεις νόμους και φυσικές σταθερές. Κυρίαρχη θέση στην μέχρι τώρα περιγραφή του φάσματος έχει η εμπειρική σταθερά R_H , της οποίας η αριθμητική τιμή βρίσκεται από την σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα (ατομικό φάσμα) τα οποία επιχειρούμε να ερμηνεύσουμε. Μια τέτοιου είδους **φαινομενολογική περιγραφή** δεν είναι ότι καλύτερο για το θεμελιώδες πρόβλημα της σταθερότητας του ατόμου του υδρογόνου και του φάσματος του.

Βέβαια, θα μπορούσε κανείς να ισχυρισθεί (ενάντια στην οικονομία της φύσης σε θεμελιώδεις σταθερές) ότι και η σταθερά R_H είναι μια θεμελιώδης σταθερά, όπως και η σταθερά του Planck, ο οποίος άλλωστε καθόρισε την τιμή της σταθεράς h , συγκρίνοντας με τα πειραματικά δεδομένα. Όμως, πέρα από το γεγονός ότι οι ιδέες του Planck και η τιμή της σταθεράς h έχουν ελεγχθεί και επιβεβαιωθεί από πλήθος ανεξάρτητα πειράματα

(π.χ. φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, φαινόμενο Compton, κ.τ.λ.), κάτι τέτοιο δεν φαίνεται να είναι πιθανό για την σταθερά R_H αφού η τιμή της, όπως είδαμε στο εδάφιο 7.2 (σχέση 7.9) διαφέρει ελαφρά από στοιχείο σε στοιχείο.

Αυτό λοιπόν που χρειάζεται για να ολοκληρωθεί σε πλήρη θεωρία το μοντέλο του Bohr είναι κάποια επί πλέον αρχή ή αξίωμα που θα μας επιτρέψει να βρούμε την ακριβή έκφραση και τιμή της σταθεράς R_H με βάση θεμελιώδεις φυσικές σταθερές. Κάτι τέτοιο, θα επιτρέψει ταυτόχρονα και τον προσδιορισμό των ακτίνων των τροχιών r_n και των ενεργειών E_n από θεμελιώδεις φυσικές σταθερές.

Ο στόχος αυτός μπορεί να επιτευχθεί με δύο ανεξάρτητους τρόπους:

α) έναν γρήγορο και μαθηματικά απλό τρόπο, ο οποίος βασίζεται σε ένα πρόσθετο (λίγο-πολύ αυθαίρετο) αξίωμα, το αξίωμα της **κβάντωσης της στροφορμής**. Και,

β) έναν πιο σύνθετο και μαθηματικά πιο πολύπλοκο τρόπο, ο οποίος βασίζεται σε μια γενική αρχή, που έχουμε δει αρκετές φορές μέχρι τώρα, την **αρχή της αντιστοιχίας**.

Καθένας από τους δυο τρόπους έχει τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά του. Ο πρώτος τρόπος με βάση το αξίωμα της κβάντωσης της στροφορμής είναι ο πιο συνηθισμένος τρόπος, που απαντάται στα σχολικά συγγράμματα, λόγω της απλότητάς του. Ο δεύτερος τρόπος, με βάση την αρχή της αντιστοιχίας είναι πιο «κομψός» και βρίσκεται κοντύτερα στις αρχικές ιδέες του Bohr. Εδώ θα εξετάσουμε και τους δύο τρόπους, ώστε να επωφεληθούμε από τα πλεονεκτήματα και των δύο, πληρώνοντας το τίμημα κάθε φορά είτε εις βάρος της απλότητας, είτε εις βάρος της γενικότητας. Περιττό είναι να τονίσουμε ότι υιοθετώντας σαν αρχή τον ένα τρόπο θα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε την ισχύ του άλλου.

8.2 Το αξίωμα της κβάντωσης της στροφορμής.

Παρατηρώντας στις σχέσεις 8.5 την τρίτη σχέση που εκφράζει αριθμητικά την κβάντωση της στροφορμής, βλέπουμε πρώτα ότι η στροφορμή έχει τις ίδιες διαστάσεις και μονάδες με την σταθερά του Planck ($J \cdot sec$). Μια προσεκτικότερη παρατήρηση δείχνει ότι η αριθμητική τιμή $1.0546 \times 10^{-34} \text{ Kg} \cdot \text{m} / \text{sec}^2 \cdot \text{m} = 1.0546 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{sec}$, συμπίπτει με την τιμή της σταθεράς του Planck \hbar ($\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$).

Μπορούμε λοιπόν, να συμπληρώσουμε το μοντέλο του Bohr και να γράψουμε σαν τρίτο αξίωμα:

$$mvr = n \hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.9)$$

Η σχέση 8.9 εκφράζει το γεγονός ότι οι μόνες επιτρεπτές σταθερές τροχιές του ηλεκτρονίου είναι εκείνες για τις οποίες η στροφορμή του είναι κβαντισμένη σύμφωνα με την σχέση 8.9, δηλαδή είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του \hbar .

Η κβάντωση της στροφορμής είναι ένα από τα πολύ σημαντικά χαρακτηριστικά της κβαντικής θεωρίας που φτάνει πολύ μακρύτερα από το απλό μοντέλο του Bohr, όπως θα δούμε παρακάτω.

Για να προσδιορίσουμε την ακτίνα και ταχύτητα του ηλεκτρονίου (και μέσω αυτών την κινητική, δυναμική και ολική ενέργεια) χρειαζόμαστε μια επιπλέον σχέση μεταξύ τους, όπως η (7.8) που εκφράζει την ισότητα της κεντρομόλου δύναμης και της δύναμης Coulomb. Ξαναγράφουμε την (7.8) για απλότητα στο σύστημα μονάδων CGS

(αντικαθιστώντας $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Rightarrow 1$):

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} \quad (8.10) .$$

Συνδυάζοντας τώρα τη σχέσης 8.9, με την 8.10 βρίσκουμε, για κάθε κβαντικό αριθμό n , την ταχύτητα v_n και την ακτίνα r_n , επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων 8.9 και 8.10.

$$r_n = \frac{\hbar^2}{me^2} \cdot n^2 = \frac{h^2}{4\pi^2 me^2} \cdot n^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.11)$$

$$v_n = \frac{e^2}{\hbar} \cdot \frac{1}{n} = \frac{2\pi e^2}{h} \cdot \frac{1}{n} \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.12)$$

Η (8.11) γράφεται και

$$r_n = \alpha_0 n^2 \quad (8.13),$$

$$\text{όπου } \alpha_0 \equiv \frac{\hbar^2}{me^2} \quad (8.14).$$

είναι η θεμελιώδης ακτίνα του ατόμου του υδρογόνου, όπως προκύπτει από την θεωρία του Bohr.

Αντικαθιστώντας τις τιμές των θεμελιωδών φυσικών σταθερών (σύστημα μονάδων CGS):

$$\hbar = 1.05459 \times 10^{-27} \text{ erg sec}$$

$$m = 9.1096 \times 10^{-28} \text{ gr}$$

$$e = 4.8033 \times 10^{-10} \text{ CGS (ηλεκτροστατικές μονάδες φορτίου)}$$

βρίσκουμε:

$$\alpha_0 = 0.529 \text{ \AA} \quad (1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm} = 10^{-10} \text{ m}).$$

Η ακτίνα αυτή είναι σε πλήρη συμφωνία με την πειραματική καθώς και με την αριθμητική τιμή στην 8.5, η οποία προέκυψε εμπειρικά χρησιμοποιώντας την πειραματική τιμή της σταθεράς R_H .

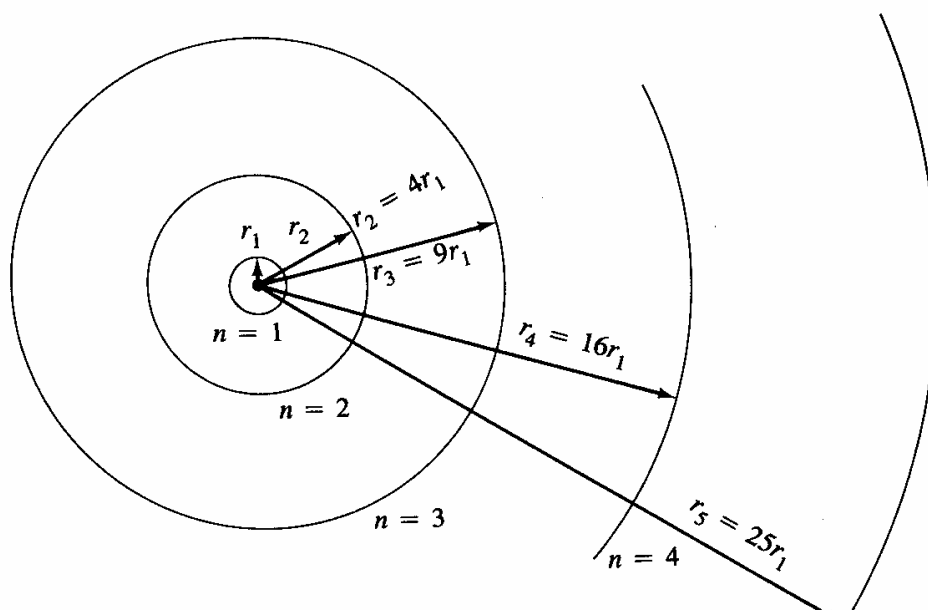
Η ακτίνα της δεύτερης σταθερής τροχιάς, που αντιστοιχεί σε $n=2$, είναι $4\alpha_0$, ενώ η ακτίνα της τρίτης τροχιάς είναι $9\alpha_0$, όπως φαίνεται σχηματικά στο σχήμα 8.4.

Όμοια με την ακτίνα, και η θεωρητική τιμή της ταχύτητας, που προκύπτει από την (8.12) συμφωνεί πλήρως με την εμπειρική τιμή στην (8.5). Αν πάρουμε σαν μονάδα συγκρίσεως την ταχύτητα του φωτός, $c = 2.997925 \times 10^{10} \text{ cm / sec}$, μπορούμε να γράψουμε (πάντοτε σε μονάδες C.G.S) την σχέση (8.12):

$$\frac{v_n}{c} = \frac{e^2}{\hbar c} \cdot \frac{1}{n} \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.15)$$

Ο Συνδυασμός των σταθερών e , \hbar και c στην (8.30) είναι καθαρός αριθμός, χωρίς διαστάσεις και έχει την τιμή $\frac{1}{137}$. Η αδιάστατη αυτή σταθερά, η οποία συμβολίζεται συνήθως με α , έχει μεγάλη σημασία και είναι γνωστή, για λόγους που θα γίνουν κατανοητοί αργότερα, σαν **σταθερά της λεπτής υφής**:

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} \cong \frac{1}{137} \quad (8.16).$$

**Σχήμα 8.4**

Οι πέντε πρώτες κβαντισμένες ακτίνες των αντίστοιχων διαδοχικών τροχιών του ηλεκτρονίου του ατόμου του υδρογόνου με βάση το μοντέλο Bohr.

Η δεύτερη ακτίνα είναι ίση με τέσσερις φορές την θεμελιώδη (πρώτη) ακτίνα $r_1 = a_0$.

Η τρίτη με εννέα φορές την ακτίνα r_1 , κ.ο.κ.

Η αριθμητική τιμή αυτής της σταθεράς, η οποία είναι και η μόνη αδιάστατη⁸⁶ σταθερά που μπορεί να κατασκευασθεί συνδυάζοντας τις σταθερές \hbar , m , e και c , παραμένει πράγματι ένα μυστήριο. Πέρα από το μυστήριο που την περιβάλλει, λόγω κυρίως της προσπάθειας να βρεθεί κάποια φυσική ή μεταφυσική εξήγηση για την τιμή της, η σταθερά της λεπτής υφής έχει πάρα πολύ μεγάλη σημασία στη σύγχρονη φυσική. Αξίζει τον κόπο να θυμάται κανείς την τιμή της επειδή, πέρα από την ταχύτητα, μπορεί να χρησιμεύσει για τον προσδιορισμό και άλλων φυσικών ποσοτήτων, όπως για παράδειγμα η ενέργεια (βλέπε άσκηση 8.7).

Η (8.15), χρησιμοποιώντας τον ορισμό της σταθεράς α , μπορεί να γραφεί:

$$v_n = \alpha c \frac{1}{n} \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.17).$$

⁸⁶ Βλέπε άσκηση 8.10

Από την (8.16) βλέπουμε πως η χρήση της θεωρίας της σχετικότητας δεν είναι κατ' αρχήν απαραίτητη, επειδή η τιμή του λόγου v/c είναι σχετικά μικρή. Μπορούμε λοιπόν να συνεχίσουμε την μη σχετικιστική περιγραφή του ατόμου. Όταν, και όπου, χρειασθεί μπορούμε να κάνουμε μικρές διορθώσεις στα αποτελέσματά μας. Όπως θα δούμε αργότερα, παρ' όλο το πολύ μικρό μέγεθός τους, οι σχετικιστικές διορθώσεις έχουν μετρήσιμη επίδραση στο φάσμα.

Για να βρούμε τώρα την ολική ενέργεια του E του ατόμου (κινητική, K , και δυναμική, V , ενέργεια του ηλεκτρονίου⁸⁷), παρατηρούμε ότι η (8.10) γράφεται :

$$mv^2 = \frac{e^2}{r} \quad (8.18)$$

Η τελευταία σχέση δηλώνει ότι το διπλάσιο της κινητικής ενέργειας, K , είναι ίσο με το αντίθετο της δυναμικής ενέργειας, V , η οποία είναι αρνητική, δηλαδή :

$$2K = -V \quad (8.19),$$

$$\text{ή: } K = \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}V. \quad (8.20).$$

Έτσι η ολική ενέργεια E , γράφεται:

$$E = K + V = K - 2K = -K \quad (8.21)$$

ή, με βάσει την (8.15):

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad n=1,2,\dots \quad (8.22)$$

Μπορούμε, επίσης, να εκφράσουμε την ολική ενέργεια συναρτήσει της δυναμικής ενέργειας από την (8.19) ή την (8.20):

$$E = -\frac{V}{2} + V = \frac{V}{2} = -\frac{e^2}{2r} \quad (8.23).$$

Αντικαθιστώντας την ακτίνα r στην παραπάνω σχέση από την (8.11), ξαναβρίσκουμε την (8.22), την οποία μπορούμε να ξαναγράψουμε σαν

$$E_n = -\frac{2m\pi^2 e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad n=1,2,\dots, \quad (8.24)$$

εισάγοντας την σταθερά h αντί της \hbar .

⁸⁷ Θυμηθείτε ότι για την περιγραφή του ατομικού φάσματος ο πυρήνας θεωρείται σαν ένα ακίνητο υλικό σημείο στην αρχή των αξόνων. Έτσι δεν έχει κινητική ή άλλου είδους ενέργεια.

Από την (8.24) μπορούμε αμέσως να βρούμε την θεμελιώδη έκφραση για την σταθερά του Rydberg R_H , συγκρίνοντας με την (8.3). Έχουμε:

$$chR_H = \frac{2m\pi^2e^4}{h^2}, \text{ απ' όπου :}$$

$$R_H = \frac{2m\pi^2e^4}{ch^3} \quad (8.25)$$

Αντικαθιστώντας, όπως και πριν στην 8.14 τις τιμές των σταθερών, βρίσκουμε $R_H = 109737\text{cm}^{-1}$ σε αρκετά καλή συμφωνία με την πιο πρόσφατη πειραματική τιμή $R_H = 109677.58 \pm 0.01 \text{ cm}^{-1}$, που είδαμε στην σχέση 7.5.

Έχουμε λοιπόν πετύχει τον στόχο μας να εκφράσουμε την σταθερά R_H συναρτήσει των θεμελιωδών σταθερών h , c , e και m .

Όμως, που οφείλεται η μικρή απόκλιση από την πειραματική τιμή ;

Για να απαντήσουμε αυτή την ερώτηση θα πρέπει να θυμηθούμε τη συζήτηση για το πρόβλημα των δύο σωματίων που αλληλεπιδρούν με κεντρικό δυναμικό. Όπως είδαμε στην σχετική κίνηση, του ενός σώματος (ηλεκτρονίου) ως προς το άλλο (πυρήνας), σαν την περίπτωση του ατόμου του υδρογόνου, υπεισέρχεται η ανηγμένη μάζα μ . Έτσι στη σχέση 8.25, αντί της μάζας m του ηλεκτρονίου θα πρέπει να έχουμε την ανηγμένη μάζα:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}, \quad (8.26)$$

όπου M η μάζα του πυρήνα (δηλαδή η μάζα του πρωτονίου). Επειδή $\frac{M}{m}$ είναι 1836.1, βλέπουμε ότι $\mu = 0.99946 m$ (δηλαδή $\mu \cong m$) οπότε η διόρθωση στην τιμή της σταθεράς του Rydberg είναι πολύ μικρή, αλλά αρκετή για να φέρει σε πλήρη σύμπτωση την θεωρητική με την πειραματική τιμή.

$$R_H = \frac{2\mu\pi^2e^4}{ch^3} = 109677.74\text{cm}^{-1}. \quad (8.27)$$

Προς αποφυγή συγχύσεως, την τιμή της σταθεράς του Rydberg, στην οποία χρησιμοποιείται η μάζα m του ηλεκτρονίου (και η οποία αντιστοιχεί σύμφωνα με την (8.26) σε άπειρη μάζα του πυρήνα) συμβολίζουμε με R_∞ , αντί για R_H . Δηλαδή:

$$R_\infty = \frac{2m\pi^2e^4}{ch^3} = 109737\text{cm}^{-1}. \quad (8.28)$$

Ασκήσεις

8.6 Δείξτε τις σχέσεις 8.11 και 8.12

8.7 Δείξτε ότι η ολική ενέργεια E της σχέσης (8.22) μπορεί να γραφεί

$$E = -\frac{1}{2} \alpha^2 mc^2 \cdot \frac{1}{n^2}, \quad n=1,2,\dots, \quad (8.29)$$

όπου α η σταθερά της λεπτής υφής.

8.8 Δείξτε ότι η ολική ενέργεια E της σχέσης (8.22) μπορεί να γραφεί $E = -\frac{e^2}{2\alpha_0} \cdot \frac{1}{n^2}$,

$$n=1,2,\dots, \quad (8.30)$$

όπου α_0 είναι η θεμελιώδης ακτίνα του ατόμου του υδρογόνου.

8.9 Δείξτε ότι η σταθερά του Rydberg R_H στο MKSA σύστημα μονάδων δίνεται από τη

$$\text{σχέση: } R_H = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 ch^3}.$$

***8.10** Στόχος μας είναι να δείξουμε με διαστατική ανάλυση ότι η σταθερά της λεπτής υφής είναι «ο μόνος αδιάστατος συνδυασμός των σταθερών \hbar , c , e και m ». Θεωρείστε λοιπόν τον πιο γενικό συνδυασμό της μορφής: $(e^2)^x \hbar^y c^z m^w$ και δείξτε ότι:

$$\alpha) [(e^2)^x \hbar^y c^z m^w] = [M]^{x+y+w} [L]^{3x+2y+z} [T]^{-(2x+y+z)}$$

$$\beta) w = 0, \quad y = -x \quad \text{και} \quad z = -x = y$$

γ) Για ποια τιμή του x παίρνουμε τον συνδυασμό που αντιστοιχεί στην σταθερά α ;

δ) Δείξτε ότι για οποιαδήποτε άλλη τιμή του x ο αντίστοιχος συνδυασμός οδηγεί σε κάποια δύναμη του α (θετική ή αρνητική, δηλαδή δύναμη του $\frac{1}{\alpha}$).

Υπόδειξη: Δείτε το παράδειγμα 1.5, του κεφαλαίου 1.

***8.11** Το δευτέριο είναι ένα ισότοπο του υδρογόνου, του οποίου ο πυρήνας του ατόμου αποτελείται από ένα πρωτόνιο και ένα νετρόνιο. Εάν λάβουμε υπόψη ότι η μάζα του νετρονίου και του πρωτονίου είναι με μεγάλη ακρίβεια ίσες, βρείτε την ανηγμένη μάζα μ_δ του δευτερίου και δείξτε ότι $\mu_\delta = 0.99973m$.

Τι συνέπεια θα έχει αυτό για το φάσμα του δευτερίου σε σχέση με το φάσμα του υδρογόνου; Να λάβετε υπόψη ότι τα σύγχρονα φασματοόμετρα μπορούν να προσδιορίσουν μήκη κύματος με ακρίβεια $\pm 0.01 \text{ cm}^{-1}$

8.3 Η αρχή της αντιστοιχίας για το άτομο του υδρογόνου.

Ο πιο κοινός τρόπος για την ολοκλήρωση της θεωρίας του Bohr με τον θεωρητικό προσδιορισμό της σταθεράς R_H , χωρίς την εισαγωγή του πρόσθετου αξιώματος της κβάντωσης της στροφορμής, αποτελεί η ευρηματική χρήση της **αρχής της αντιστοιχίας**, την οποία έχουμε συναντήσει αρκετές φορές μέχρι τώρα.

Όπως είδαμε στην ενότητα 3.6.ε, σχέσεις 3.92 έως 3.97, η αρχή αυτή εξασφαλίζει ότι η κβαντική θεωρία δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με την κλασική φυσική στο όριο $h \rightarrow 0$. Το όριο $h \rightarrow 0$ μπορεί να επιτευχθεί⁸⁸ για πολύ χαμηλές συχνότητες των φωτονίων (όταν $\nu_\phi \rightarrow 0$) ή στο όριο των πολύ μεγάλων κβαντικών αριθμών, δηλαδή όταν $n \rightarrow \infty$. Σ' αυτό το όριο, η μεταβολή της ενέργειας ΔE μπορεί να θεωρηθεί σαν συνεχής, αφού θα ισχύει:

$$\frac{\Delta E}{E} \ll 1, \text{ όπως απαιτεί η (3.97).}$$

Πράγματι, σύμφωνα με την (8.2) για δυο διαδοχικές τιμές του κβαντικού αριθμού n θα έχουμε:

$$\Delta E_n \equiv E_{n+1} - E_n = h\nu_\phi = chR_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = chR_H \frac{(2n+1)}{n^2(n+1)^2} \quad (8.31)$$

Στο όριο των πολύ μεγάλων κβαντικών αριθμών, δηλαδή $n \rightarrow \infty$, μπορούμε να αγνοήσουμε τον αριθμό 1 σε αριθμητή και παρανομαστή, μπροστά στις τεράστιες τιμές του n και να γράψουμε:

$$\Delta E_{n \rightarrow \infty} = chR_H \frac{2}{n^3}, \quad (8.32)$$

και:

$$\left| \frac{\Delta E_{n \rightarrow \infty}}{E_{n \rightarrow \infty}} \right| = \frac{2}{n} \ll 1, \text{ για } n \rightarrow \infty \quad (8.33)$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι στο όριο των πολύ μεγάλων κβαντικών αριθμών, όπου οι συχνότητες των φωτονίων, σύμφωνα με τις (8.31) και (8.32), είναι πάρα πολύ μικρές, $\nu_\phi \rightarrow 0$, επαληθεύεται η αρχή της αντιστοιχίας και η έκφρασή της μέσω της σχέσης

⁸⁸ Η θερμοκρασία δεν έχει άμεση επίδραση στο πρόβλημα της ατομικής δομής, για λόγους παραπλήσιους με εκείνους του φαινομένου Compton. Βέβαια, σε πάρα πολύ υψηλές θερμοκρασίες τα άτομα μπορεί να είναι διεγερμένα σε καταστάσεις με πολύ μεγάλο κβαντικό αριθμό, οπότε έμμεσα το όριο $\frac{k_B T}{\nu} \rightarrow \infty$ να ισχύει.

3.97, δηλαδή $\frac{\Delta E}{E} \ll 1$. Έτσι σ' αυτό το όριο η κβαντική περιγραφή πρέπει να οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα με την κλασική περιγραφή. Μπορούμε λοιπόν, να εκμεταλλευθούμε αυτό το γεγονός, μια και ξέρουμε ήδη (από την ενότητα 3.1) τι προβλέπει το μοντέλο του Rutherford, το οποίο είναι το κλασικό ανάλογο του μοντέλου Bohr.

Στο κλασικό μοντέλο η συχνότητα ν_Φ του φωτονίου είναι ίση με την συχνότητα περιστροφής (ή ταλάντωσης στο μοντέλο Thomson, βλέπε και σχέση 7.7) του ηλεκτρονίου ν_e . Άρα για μεγάλους κβαντικούς αριθμούς οι δύο συχνότητες θα πρέπει να συμπίπτουν:

$$\nu_\Phi = \nu_e, \text{ όταν } n \rightarrow \infty \quad (8.34).$$

Έχουμε ήδη βρει την συχνότητα του φωτονίου για $n \rightarrow \infty$ από τις σχέσεις 8.31 και 8.32:

$$\nu_\Phi = \frac{2cR_H}{n^3} \quad (8.35)$$

Η συχνότητα περιστροφής του ηλεκτρονίου, όπως είδαμε στην (7.19) δίνεται από τη σχέση:

$$\nu_e = \frac{v}{2\pi r} \quad (7.19')$$

Όμως η ταχύτητα v και η ακτίνα r μπορούν να προσδιοριστούν από την (εμπειρική) σχέση 8.3 για την ολική ενέργεια, μέσω της κινητικής και δυναμικής ενέργειας, από τις σχέσεις 8.20–21 και 8.23, χωρίς να καταφύγουμε στο πρόσθετο αξίωμα της κβάντωσης της στροφορμής.

Το σχέδιό μας λοιπόν είναι να προσδιορίσουμε:

- 1) την ταχύτητα και
- 2) την ακτίνα του ηλεκτρονίου, όπως κάναμε και στις σχέσεις 8.5, εμπειρικά μέσω της σταθεράς R_H , η οποία υπεισέρχεται στον τύπο 8.3 για την ολική ενέργεια, κατόπιν
- 3) από την (7.19') να υπολογίσουμε την συχνότητα ν_e , και εν συνεχεία
- 4) από (8.34), έχοντας την (8.35), να προσδιορίσουμε τη σταθερά R_H με βάση τις θεμελιώδεις σταθερές h , c , e και m .

Εκτέλεση:

1) Η (8.21) γράφεται: $-\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{chR_H}{n^2}$ $n = 1,2,3,\dots$, απ' όπου:

$$v = \left(\frac{2chR_H}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{n} \quad n = 1,2,3,\dots \quad (8.36)$$

2) Η (8.23) γράφεται: $-\frac{e^2}{2r} = -\frac{chR_H}{n^2}$ $n = 1, 2, 3, \dots$, απ' όπου:

$$r = \left(\frac{e^2}{2chR_H}\right) \times n^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.37)$$

3) Από την (7.19') βρίσκουμε:

$$v_e = \frac{(2chR_H)^{\frac{3}{2}}}{2\pi e^2 \sqrt{m}} \times \frac{1}{n^3} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.38)$$

4) Η (8.34) γράφεται:

$$\frac{(2chR_H)^{\frac{3}{2}}}{2\pi e^2 \sqrt{m}} \times \frac{1}{n^3} = \frac{2cR_H}{n^3}, \quad n \rightarrow \infty \quad (8.39)$$

Απαλείφοντας τους κοινούς όρους n^3 στους παρανομαστές, και υψώνοντας εις

το τετράγωνο βρίσκουμε, εκ νέου: $R_H = \frac{2m\pi^2 e^4}{ch^3}$ (8.25')

Η τιμή αυτή είναι πάρα πολύ κοντά στην πειραματική τιμή των 109.700 cm^{-1}

Αυτή η συμφωνία μεταξύ της θεωρητικής και πειραματικής τιμής της σταθεράς του Rydberg, μαζί με τα άλλα αποτελέσματα και αξιώματα του Bohr, οδήγησε στην πλήρη ερμηνεία του γραμμικού φάσματος του ατόμου του υδρογόνου, όπως φαίνεται στο σχήμα 8.5. Η θεωρητική και όχι εμπειρική πλέον σχέση 8.7 περιγράφει όλες τις γραμμές του φάσματος. Η σειρά των γραμμών Balmer που είναι στην ορατή περιοχή του φάσματος, οφείλεται σε ενεργειακή κατάσταση $n=2$. Οι σειρές των γραμμών Lyman, που λαμβάνονται από την 8.7 για $n=1$, βρίσκονται στην περιοχή του υπεριώδους. Αντίθετα η σειρά Paschen, με $n=3$, βρίσκεται στην περιοχή του υπέρυθρου. Οι σειρές με $n=4$ (σειρά Brackett) $n=5$ (σειρά Pfund) και άλλες μεγαλύτερες τιμές του κβαντικού αριθμού n δεν σχεδιάστηκαν στο σχήμα 8.5. Προφανώς αυτές οι σειρές είναι και πολύ πιο πέρα από την περιοχή του υπέρυθρου, που φαίνεται στο σχήμα.

Στις σχέσεις που ακολουθούν, δεν θα επιμείνουμε στην διάκριση μεταξύ μ και m , και R_H , \hbar , εκτός όπου ρητά αναφέρεται. Παρ' όλα αυτά, θα πρέπει να εκτιμηθεί το γεγονός ότι αυτός είναι ο λόγος (μικρή διαφορά μεταξύ μ και m) που στα διαστατικά επιχειρήματα του προηγούμενου κεφαλαίου (κεφάλαιο 3) για την κλασική ακτίνα του ατόμου του υδρογόνου, χρησιμοποιήθηκε η μάζα του ηλεκτρονίου και όχι η μάζα του πυρήνα, όπως εκ πρώτης όψεως θα μπορούσε να είχε χρησιμοποιηθεί.

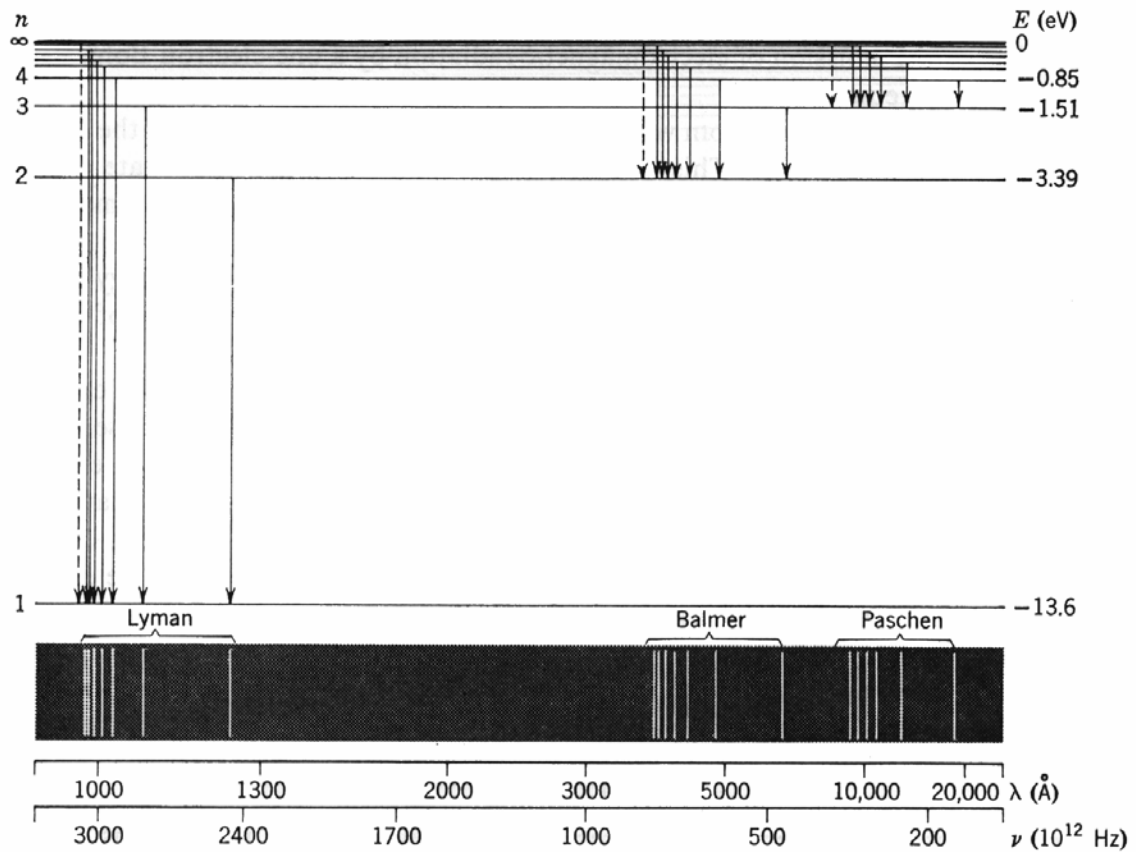
Μπορούμε τώρα να αντικαταστήσουμε τη θεμελιώδη έκφραση 8.22β της σταθεράς R_H στη σχέση (8.8) και να πάρουμε τη θεμελιώδη έκφραση της ενέργειας E_n :

$$E_n = -\frac{2m\pi^2 e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (8.40)$$

Επίσης, από τη σχέση της ολικής ενέργειας με την κινητική και δυναμική ενέργεια (8.13) μπορούμε εύκολα να βρούμε τις θεμελιώδεις εκφράσεις της ακτίνας, της τροχιάς r_n και της ταχύτητας v_n :

$$r_n = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2} \cdot n^2 = \frac{\hbar^2}{m e^2} \cdot n^2, \quad n=1,2,\dots$$

$$v_n = \frac{2\pi e^2}{h} \cdot \frac{1}{n} = \frac{e^2}{\hbar} \cdot \frac{1}{n}, \quad n=1,2,\dots \quad (8.41)$$



Σχήμα 8.5

Το ενεργειακό διάγραμμα και φάσμα του ατόμου του υδρογόνου μαζί με μερικές από τις ηλεκτρονικές μεταπτώσεις που οδηγούν στις φασματικές γραμμές του ορατού και του κοντινού (στο ορατό) υπέρυθρου και υπεριώδους φάσματος. Η κλίμακα του μήκους κύματος και της συχνότητας, δεν είναι γραμμική, αλλά επιλέχθηκε έτσι για την καλύτερη σαφήνεια και ευκρίνεια της εικόνας.

Στις παραπάνω σχέσεις έχουμε θέσει $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi}$ και $\alpha_0 = 0.529 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$).

Υπενθύμιση: Σε όλες τις παραπάνω σχέσεις έχουμε χρησιμοποιήσει το σύστημα μονάδων CGS, στο οποίο $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Rightarrow 1$. Για να έχουμε τις σχέσεις στο σύστημα MKSA, αρκεί να αντικαταστήσουμε το e^2 με $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$.

Έτσι, ο Bohr εκτός από την επιτυχή ερμηνεία του γραμμικού φάσματος και την πρόβλεψη νέων γραμμών που δεν είχαν παρατηρηθεί μέχρι τότε (και αργότερα παρατηρήθηκαν) είχε και άλλες σημαντικές επιτυχίες. Εξήγησε επιτυχώς την αριθμητική τιμή της σταθεράς του Rydberg, της ακτίνας a_0 και της ενέργειας ιονισμού ($\sim 13.6 \text{ eV}$) του ατόμου του υδρογόνου. Πέρα απ' αυτά ο Bohr με βάση τις σχέσεις 8.31, 8.40 κατάφερε να εξηγήσει την απουσία ορισμένων γραμμών της σειράς Balmer στα εργαστηριακά φάσματα, ενώ υπήρχαν στα αντίστοιχα αστρικά φάσματα. Ο Bohr υποστήριξε ότι στη φωτεινή ατμόσφαιρα των αστερών υπάρχουν πολύ χαμηλότερες πιέσεις από την ατμοσφαιρική πίεση στη γη και κατά συνέπεια μεγαλύτερες ενδοατομικές αποστάσεις. Έτσι, με βάση την 8.41 (ή, ισοδύναμα, την 8.11) για μεγάλα n το φαινόμενο μέγεθος της ακτίνας των ατόμων μπορεί να γίνει τεράστιο χωρίς οι ενδοατομικές συγκρούσεις να εμποδίζουν το φαινόμενο, λόγω των χαμηλών πιέσεων. Κατά συνέπεια στα αστρικά φάσματα ο ακέραιος n στη σχέση (8.7) (με $m=2$, για την σειρά Balmer) μπορεί να γίνει αρκετά μεγάλος (και έτσι να υπάρχει αρκετά μεγάλο πλήθος γραμμών) σε σχέση με τα εργαστηριακά φάσματα. Να σημειωθεί ότι πió πρόσφατα κβαντικά άλματα ατόμων υδρογόνου με m και n (στη σχέση 8.7) μεγαλύτερα του 100 έχουν αναγνωρισθεί από διαστημικές πηγές με αντίστοιχη συχνότητα ακτινοβολίας που βρίσκεται στην περιοχή των ραδιοκυμάτων των ($\approx 10^{10} \text{ Hz}$).

Τώρα με βάση τις εκφράσεις για την ακτίνα και ταχύτητα του ηλεκτρονίου (σχέσεις 8.41) στις επιτρεπόμενες κυκλικές τροχιές, μπορούμε να σχηματίσουμε την έκφραση της στροφορμής, l , του ηλεκτρονίου.

$$l = m v_n r_n = n \hbar, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.9')$$

η οποία είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της σταθεράς \hbar .

Έτσι βλέπουμε πως πέρα από την ενέργεια, την ακτίνα και την ταχύτητα, και η στροφορμή είναι κβαντισμένη. Η σχέση (8.9') που εκφράζει την κβάντωση της στροφορμής χρησιμοποιείται συνήθως αντί της αρχής της αντιστοιχίας (με βάση την

οποία προήλθε) εναλλακτικά για την παρουσίαση του μοντέλου του Bohr (όπως κάναμε στην σχέση 8.9). Από παιδαγωγική σκοπιά μία τέτοια παρουσίαση έχει το πλεονέκτημα ότι δίνει με πολύ απλές πράξεις και ελάχιστο κόπο, όλες τις ενδιαφέρουσες ποσότητες. Ενέργεια, ακτίνα και ταχύτητα. Οι σχέσεις (8.40) μέχρι και την (8.44), προκύπτουν αβίαστα από τις σχέσεις (8.10), (8.13) και (8.9') με απλές πράξεις σ' ένα μικρό κομμάτι πρόχειρου χαρτιού, π.χ. το πίσω μέρος ενός φακέλου αλληλογραφίας όπως συνήθως λέγεται στην Αγγλοσαξονική βιβλιογραφία (back-of-the-envelope calculation). Μ' αυτή την μεθοδολογία, η αρχή της αντιστοιχίας, όπως τουλάχιστον εφαρμόστηκε εδώ προκύπτει ακολουθώντας την αντίστροφη πορεία.

Η κβάντωση της στροφορμής, της σχέσεως (8.9') είναι πάρα πολύ σημαντική, επειδή είναι μία από τις θεμελιακές σχέσεις του ατομικού προτύπου του Bohr, η οποία χρησιμοποιήθηκε πολλές φορές σαν αφετηρία για γενικεύσεις και επεκτάσεις της θεωρίας του Bohr καθώς και σαν κεντρικό σημείο επαφής με άλλες κβαντικές ιδέες, όπως τα υλικά κύματα που θα δούμε αργότερα στο κεφάλαιο 9.

Η σχέση (8.9') αναδεικνύει την σταθερά \hbar σαν την φυσική μικροσκοπική μονάδα στροφορμής. Έτσι μία κβαντική μονάδα στροφορμής ισούται με \hbar και πολλές φορές λέγεται ότι η στροφορμή είναι 1 ή 2 εννοώντας προφανώς $1\hbar$ ή $2\hbar$. Ένα σοβαρό πρόβλημα της θεωρίας του Bohr για το άτομο του υδρογόνου, είναι ότι προβλέπει στροφορμή ίση με $1\hbar$, ενώ είναι γνωστό ότι η στροφορμή του ατόμου του υδρογόνου είναι μηδέν. **Η κβάντωση της στροφορμής όμως είναι μία από τις λίγες θεμελιώδεις έννοιες του μοντέλου του Bohr που επέζησε, έστω και με κάποια τροποποίηση, στην σύγχρονη κβαντική θεωρία.** Άλλες τέτοιες έννοιες του μοντέλου του Bohr που πέρασαν στην σύγχρονη κβαντική θεωρία, εκτός από την αρχή της αντιστοιχίας είναι η ιδέα των στάσιμων καταστάσεων, η ιδέα των κβαντικών αλμάτων καθώς και η διατήρηση της ενέργειας στο μικρόκοσμο. Παρενθετικά θα πρέπει να αναφερθεί ότι η διατήρηση της ενέργειας, καθώς και άλλων ποσοτήτων, όπως η ορμή και η στροφορμή, στο μικρόκοσμο έχει θεμελιώδη σημασία (ιδιαίτερα σε περιπτώσεις που αρκετές λεπτομέρειες αγνοούνται, ή είναι δύσκολο να ληφθούν υπ' όψη) και συνδέεται βαθιά με βασικές συμμετρίες της φύσεως. Η διατήρηση της ενέργειας (και ορμής) χρησιμοποιήθηκε νωρίτερα στο κεφάλαιο 3 για την περιγραφή του φαινομένου Compton και του φωτοηλεκτρικού φαινομένου.

Για ένα από τη φύση το μικροσκοπικό σύστημα όπως το άτομο του υδρογόνου, αυτό το μακροσκοπικό όριο θα μπορούσε να επιτευχθεί μόνον όταν η ακτίνα της τροχιάς r_n αποκτήσει «μακροσκοπικές» διαστάσεις για κάποιο μεγάλο κβαντικό αριθμό n . Απλοϊκά θα μπορούσε κανείς να πει πως η ακτίνα της τροχιάς του ηλεκτρονίου γίνεται διαρκώς μεγαλύτερη καθώς ο κβαντικός αριθμός n αυξάνει.

8.4 Το Ατομικό Μοντέλο του Bohr για άλλα στοιχεία

Όπως, είδαμε στην προηγούμενη ενότητα (3.1) παρά τις αυθαίρετες ιδέες για τις στάσιμες καταστάσεις και τα κβαντικά άλματα, το ατομικό μοντέλο του Bohr για το άτομο του υδρογόνου υπήρξε εξαιρετικά επιτυχές. Επόμενο είναι να επιχειρηθεί η εξήγηση των γραμμικών φασμάτων και άλλων στοιχείων, με ατομικό αριθμό μεγαλύτερο του ένα, χρησιμοποιώντας το ίδιο μοντέλο. Αν και οι βασικές αρχές για τις στάσιμες καταστάσεις και τα κβαντικά άλματα παραμένουν αμετάβλητες και η ποιοτική περιγραφή μπορεί να αντιμετωπισθεί, η ποσοτική εφαρμογή έχει σοβαρά προβλήματα και δυσκολίες. Ο κύριος λόγος για τα προβλήματα αυτά είναι οι πρόσθετες αλληλεπιδράσεις μεταξύ ηλεκτρονίων που τώρα είναι περισσότερα του ενός. Για το He, για παράδειγμα με ατομικό αριθμό $Z=2$ και δύο ηλεκτρόνια σε θέσεις \vec{r}_1 και \vec{r}_2 η δυναμική ενέργεια είναι τώρα:

$$U = -\frac{ze^2}{|\vec{r}_1|} - \frac{ze^2}{|\vec{r}_2|} + \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (8.42)$$

Είναι προφανές, σύμφωνα και με την συζήτηση της ενότητας 2.2, και 2.1, πως ο τρίτος όρος που εμπλέκει τις μεταβλητές \vec{r}_1 και \vec{r}_2 αποτελεί το πρόβλημα. Για να αποφύγει αυτό το πρόβλημα ο Bohr θεώρησε κατ' αρχήν πολλαπλά ιονισμένα άτομα που έχουν χάσει όλα πλην ενός τα ηλεκτρόνια τους. Τέτοια πολλαπλά ιονισμένα στοιχεία επιστεύετο ότι υπήρχαν στο εσωτερικό των αστέρων, εξ' αιτίας των υψηλών θερμοκρασιών και πιέσεων. Έτσι λοιπόν για το παραπάνω παράδειγμα ο Bohr περιορίστηκε στην περιγραφή του He^+ αντί του ατόμου του He, και γενικότερα του Li^{++} αντί του Li ($Z=3$), του Be^{++} αντί του Be ($Z=4$) κ.τ.λ.

Σ' αυτές τις περιπτώσεις, στη σχέση (3.10) για το υδρογόνο, από την οποία μαζί με την (3.29) προέρχονται όλες οι άλλες σχέσεις, αρκεί να αντικαταστήσουμε όπου e^2 , Ze^2 . Έτσι, η αντικατάσταση:

$$e^2 \rightarrow Ze^2 \quad (8.43)$$

στις σχέσεις (3.10) μέχρι (8.40), δίνει τις αντίστοιχες σχέσεις για τα θετικά ιόντα με ατομικό αριθμό Z .

Για παράδειγμα, οι σχέσεις (8.40), (8.41) ή (8.13) και (8.12) γράφονται τώρα:

$$E_n = -\frac{2m\pi^2 Z^2 e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad (8.40')$$

$$r_n = \frac{\alpha_o}{Z} n^2 \quad (8.13')$$

$$v_n = Z\alpha.c \frac{1}{n} \quad (8.14')$$

Όμοια, η «διορθωμένη» σχέση 7.8 για την συχνότητα των εκπεμπομένων φωτονίων γράφεται τώρα:

$$\nu = \frac{2m\pi^2 Z^2 e^4}{h^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad n=1,2,\dots \quad m=n+1, n+2,\dots \quad (7.8')$$

Για το He^+ , βλέπουμε πως η ακτίνα της τροχιάς του ηλεκτρονίου του, είναι μισή από την ακτίνα Bohr και η ταχύτητα του διπλάσια. γενικότερα η ακτίνα του τελευταίου «εσωτερικότερου» ηλεκτρονίου μικραίνει αντιστρόφως ανάλογα του Z , ενώ η ταχύτητά του αυξάνεται ανάλογα με το Z , με αποτέλεσμα η ενέργεια ιονισμού του (η οποία προκύπτει θέτοντας $n \rightarrow \infty$ στη σχέση (8.40')) να αυξάνει ανάλογα με το Z^2 . Θα πρέπει να σημειωθεί ότι για αρκετά μεγάλους ατομικούς αριθμούς η ταχύτητα αυτού του ηλεκτρονίου μπορεί να είναι αρκετά δέκατα της ταχύτητας του φωτός, οπότε οι σχετικιστικές διορθώσεις είναι απαραίτητες.

Ο Bohr με βάση την σχέση (7.8'), μπόρεσε να αναγνωρίσει και να εξηγήσει πολλές ανεξήγητες γραμμές που είχαν παρατηρηθεί στο φάσμα του Ηλίου και άλλων αστέρων, και οι οποίες δεν ήταν δυνατόν να οφείλονται στο υδρογόνο. Ο Bohr έδειξε ότι προέρχονταν από ηλεκτρονικές μεταβάσεις του εναπομείναντος ηλεκτρονίου στο ιόν του He^+ .

Για να πει κανείς οτιδήποτε παραπάνω για άτομα με $Z>1$, με βάση το μοντέλο του Bohr, εκτός βέβαια από τα φάσματα των πολλαπλά ιονισμένων ατόμων, χρειάζεται τουλάχιστον μία πάρα πέρα αρχή ή παραδοχή και μία παραπέρα προσέγγιση. **Μία χονδρική προσέγγιση, που από μόνη της θα είχε πολύ περιορισμένη εφαρμογή, θα ήταν σε πρώτη φάση, να αγνοήσουμε την αλληλεπίδραση μεταξύ των ηλεκτρονίων.** Για να το δούμε αυτό λίγο πιο φορμαλιστικά ας θεωρήσουμε την περίπτωση του ατόμου του He. Αγνοώντας προς στιγμή τον τρίτο όρο στην (8.42), μπορούμε να γράψουμε κατά μέσον την ενέργεια E_i ($i=1,2$), για το ηλεκτρόνιο i ($i=1,2$) σαν:

$$E_i = T_i - \frac{Ze^2}{r} + U_i(r_i) \quad (8.44)$$

όπου $U_i(r_i)$ είναι ο μέσος όρος της αλληλεπιδράσεως, που δίνεται από το τρίτο όρο στην (8.42). Είναι λογικό να προσπαθήσουμε να γράψουμε το πρόσθετο απωστικό δυναμικό σαν:

$$U_i(r_i) = \frac{Qe^2}{r_i} \quad (8.45),$$

όπου το Q είναι μία θετική παράμετρος. Τότε η (8.44) μπορεί να γραφεί:

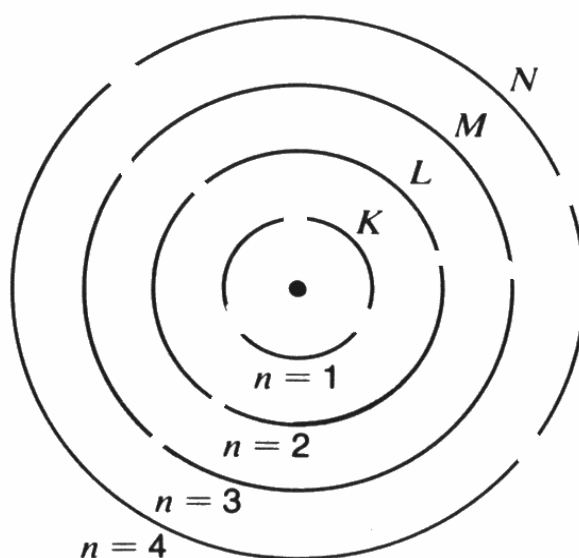
$$E_i = T_i - \frac{Z_\phi e^2}{r_i}, \quad (8.46)$$

$$\text{όπου } Z_\phi = Z - Q, \quad (8.47)$$

είναι ο φαινόμενος ατομικός αριθμός. Προφανώς ισχύει $Z_\phi < Z$, με αποτέλεσμα η ακτίνα της τροχιάς του κάθε ηλεκτρονίου να είναι ελαφρώς μεγαλύτερη απ'ότι προβλέπει η σχέση (8.13') και η ταχύτητά του κατά τι μικρότερη απ'ότι δίνει η σχέση 8.40'. Στα πλαίσια αυτής της συζητήσεως τα δύο ηλεκτρόνια του He είναι ισοδύναμα και έτσι οι ταχύτητες και ακτίνες των τροχιών τους δεν έχουν λόγο να είναι διαφορετικές. Η ενέργεια του ατόμου είναι απλά δύο φορές η ενέργεια E_i της σχέσεως (8.46). Θα πρέπει εδώ να επισημάνουμε πως η εύρεση της σταθεράς Q στην (8.45) δεν είναι τόσο απλή υπόθεση, όσο εκ πρώτης όψεως μπορεί να φαίνεται. Ούτε η πρόσθετη προσέγγιση που εμπεριέχεται στη (8.45) και (8.44) είναι εύκολο να δικαιολογηθεί αυστηρά μιά που η «διαταραχή» από ένα δεύτερο ηλεκτρόνιο στην ίδια τροχιά (ή στην ίδια ακτίνα τροχιάς) δεν αναμένεται σ' αυτήν την εικόνα, να οδηγεί σε κεντρικό δυναμικό, ή κεντρική δυναμική ενέργεια όπως υποδηλώνεται στις σχέσεις (8.44) και (8.45). Θα πρέπει να θυμόμαστε πάντα πως **το γεγονός ότι μία συζήτηση γίνεται με φορμαλιστικά ακριβή τρόπο, δεν σημαίνει κατ' ανάγκη ότι είναι και ακριβής**. Η συζήτηση για το φορτίο Q και τον αριθμό Z_ϕ αποκτά περισσότερο νόημα και ακρίβεια σε συνδυασμό με την επόμενη βασική παραδοχή, που θα ιδούμε αμέσως μετά, όταν περιγράφονται «υδρογόνο-όμοια» άτομα, όπως για παράδειγμα τα άτομα των αλκαλικών μετάλλων που έχουν ένα ηλεκτρόνιο σθένους. Όσο για το άτομο του He το μόνο που μπορεί να λεχθεί, με βάση το μοντέλο Bohr είναι πως οι εξισώσεις (8.40'), (8.13') και (7.8') αφορούν το He^+ μπορούν να δώσουν μία χοντρική προσέγγιση τάξης μεγέθους και για το άτομο του He. Αυτό είναι φυσικά ισοδύναμο με την παραδοχή πως το φορτίο Q στην (8.47) είναι πρακτικά αμελητέο για το είδος της προσέγγισης που υιοθετήσαμε. Με το ίδιο είδος προσέγγισης (με ή χωρίς την αντικατάσταση $Z \rightarrow Z_\phi$) οι εξισώσεις (8.40'), (8.13') και (7.8') μπορούν

να περιγράψουν τα «εσώτατα» ηλεκτρόνια (ηλεκτρόνια της στιβάδας K, όπως συνήθως ονομάζονται) οιοδήποτε άλλου στοιχείου. Και τούτο γιατί οι ενέργειες και ακτίνες αυτών των ηλεκτρονίων είναι κατά πολύ μικρότερες (οι ενέργειες είναι κατ' απόλυτη τιμή πολύ μεγαλύτερες) των άλλων εξωτερικών ηλεκτρονίων λόγω της εξάρτησης τους από το τετράγωνο του κβαντικού αριθμού n . Έτσι στις (8.40'), (8.13') οι «διορθώσεις» λόγω των επιδράσεων των εξωτερικών ηλεκτρονίων είναι αμελητέες σ' αυτή την ούτως ή άλλως χοντρική προσέγγιση. Παρ' όλα αυτά, η πειραματική επιβεβαίωση της εξάρτησης από το Z^2 που προβλέπει η σχέση (7.8') των φασμάτων ακτίνων X, όπως θα δούμε παρακάτω, δείχνει την ουσιαστική ορθότητα των βασικών επιχειρημάτων του μοντέλου.

Η πάρα πέρα αρχή (ή παραδοχή) που χρειάζεται για το πληρέστερο δυνατό ατομικό πρότυπο πολύ-ηλεκτρονικών ατόμων (με $Z > 1$) στα πλαίσια πάντα της ατομικής θεωρίας του Bohr, έχει να κάνει με την κατανομή των ηλεκτρονίων στις διάφορες τροχιές. **Η πρόσθετη αυτή παραδοχή, που ήδη έχουμε έμμεσα χρησιμοποιήσει, είναι πως κάθε μία από τις ατομικές τροχιές, μπορεί να περιέχει μόνο ένα περιορισμένο και αυστηρά καθορισμένο αριθμό ηλεκτρονίων. Αυτή την αρχή, με βάση την οποία δομούνται τα διάφορα άτομα, μπορούμε να την ονομάσουμε δομική αρχή.** Έτσι οδηγούμαστε στην εικόνα του ατόμου που αποτελείται από διαδοχικούς ηλεκτρονικούς φλοιούς, όπως φαίνεται στο σχήμα 8.6.



Σχήμα 8.6

Η κατά φλοιούς δομή πολυηλεκτρονικών ατόμων με βάση την «δομική αρχή»

Αυτοί οι φλοιοί, έχει επικρατήσει από παλιά να ονομάζονται διαδοχικά K, L, M, N,... κ.τ.λ., για $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$,... αντίστοιχα. Ο φλοιός K μπορεί να περιλάβει μέχρι δύο ηλεκτρόνια, ενώ ο φλοιός L μέχρι οκτώ. Έτσι έχουμε μια ατομική δομή με τα ηλεκτρόνια να κατανέμονται σε συμπληρωμένους και ασυμπλήρωτους ηλεκτρονικούς φλοιούς ή στιβάδες. Με βάση την «δομική αρχή», η οποία τροποποιημένη παραμένει και σε μεταγενέστερα ακριβή κβαντικά μοντέλα του ατόμου, οι ηλεκτρονικές και χημικές ιδιότητες ενός ατόμου καθορίζονται από το πλήθος και την κατάσταση των εξώτατων ηλεκτρονίων, τα οποία βρίσκονται σε ασυμπλήρωτες στιβάδες (φλοιούς). Άτομα με συμπληρωμένους φλοιούς δεν είναι χημικά ενεργά και αντιστοιχούν στα λεγόμενα αδρανή (ή ευγενή) στοιχεία.

Εδώ δεν μας ενδιαφέρει ο λεπτομερής αριθμός ηλεκτρονίων που επιτρέπεται στον κάθε ένα από τους υπόλοιπους φλοιούς, επειδή το θέμα θα το εξετάσουμε σωστότερα και πληρέστερα στον δεύτερο τόμο. Εκεί θα φανεί και ο θεμελιώδης λόγος για τον οποίον επιτρέπεται ένας μέγιστος αριθμός ηλεκτρονίων στον κάθε φλοιό, καθώς και η προέλευση του συγκεκριμένου μέγιστου αριθμού για τον κάθε φλοιό. Αυτό που έχει σημασία είναι ότι **αυτή η δομική αρχή έχει γερές βάσεις και «επιζεί» με κάποιες τροποποιήσεις, όπως και άλλες ιδέες του Bohr που αναφέραμε πριν, στη σύγχρονη Κβαντομηχανική θεωρία της ατομικής δομής.**

Με βάση η αρχή αυτή εξηγείται η σταθερότητα των στοιχείων που έχουν συμπληρωμένους φλοιούς, όπως τα άτομα με $Z=2$ (He), $Z=10$ (Ne) και $Z=18$ (Ar), καθώς και η περιοδικότητα στις χημικές ιδιότητες των στοιχείων, που οφείλεται σε όμοιο αριθμό ηλεκτρονίων στον εξώτατο φλοιό (ή στιβάδα). Αυτή η περιοδικότητα, που είναι αποτυπωμένη στον γνωστό πίνακα του περιοδικού συστήματος, είναι υπεύθυνη π.χ. για την χημική ομοιότητα του K και του Na, επειδή και τα δύο αυτά στοιχεία έχουν ένα και μοναδικό ηλεκτρόνιο στην εξώτατη στιβάδα. Γι' αυτά τα στοιχεία και άλλα (όπως το Li), που μοιάζουν με το υδρογόνο, το μοντέλο του Bohr για το εξωτερικό ηλεκτρόνιο είναι αρκετά ικανοποιητικό με την εισαγωγή του φαινομένου ατομικού αριθμού Z_φ , που τώρα είναι συνάρτηση του κβαντικού αριθμού n λόγω της δομικής αρχής. Έτσι λοιπόν η αντικατάσταση:

$$Z \rightarrow Z_\varphi(n) \quad (8.48)$$

στις σχέσεις (7.8'), (8.40') και (8.13') οδηγεί στα πλαίσια της ατομικής θεωρίας του Bohr, σε μία ικανοποιητική προσέγγιση. Και αυτό γιατί η προσέγγιση του σφαιρικού πεδίου που υποδηλώνει η σχέση (8.45) είναι τώρα πίο ρεαλιστική λόγω της σφαιρικής

κατανομής των εσωτερικών ηλεκτρονίων στους κλειστούς φλοιούς. Ο θεωρητικός υπολογισμός του Z_ϕ δεν είναι πάντα τετριμμένη υπόθεση και συνήθως η τιμή του Z_ϕ , όπου χρειάζεται, μπορεί να βρεθεί εμπειρικά συγκρίνοντας με το πείραμα.

Πάντως, με βάση την **σφαιρική προσέγγιση** στην κατανομή των εσωτερικών ηλεκτρονίων, απλή εφαρμογή του νόμου του Gauss σε μία σφαιρική επιφάνεια με κέντρο τον πυρήνα και ακτίνα λίγο μικρότερη από την ακτίνα του τελευταίου εξωτερικού ηλεκτρονίου δίνει το συνολικό πεδίο (και κατά συνέπεια και για το συνολικό δυναμικό). Έτσι βρίσκουμε πως το συνολικό δυναμικό που «βλέπει» το τελευταίο ηλεκτρόνιο είναι σφαιρικό σαν αυτό που υπεισέρχεται στη σχέση 8.46, με $Z_\phi \sim 1$. Δηλαδή τα $Z-1$ εσωτερικά ηλεκτρόνια σ' αυτή την σφαιρική προσέγγιση, που είναι αρκετά ικανοποιητική, δημιουργούν ένα μέσο πεδίο για το εξωτερικό ηλεκτρόνιο) που έχει τη μορφή της 8.45, με $Q=Z-1$. Με άλλα λόγια **τα $Z-1$ εσωτερικά ηλεκτρόνια «θωρακίζουν» το φορτίο του πυρήνα για το τελευταίο ηλεκτρόνιο, το οποίο έτσι συγκρατείται με πολύ μικρότερη συγκριτικά δύναμη και ενέργεια.**

Για τα εσωτερικά ηλεκτρόνια της στιβάδας K ($n=1$), ο φαινόμενος ατομικός αριθμός, Z_ϕ , σύμφωνα με τα παραπάνω θα πρέπει να είναι ίσος με Z . Βλέπουμε λοιπόν πως ο αριθμός Z_ϕ (n) μπορεί να μεταβάλλεται σε μία πλατιά σχετικά περιοχή μεταξύ 1 και Z .

Με την εισαγωγή της έννοιας του φαινόμενου (ή ενεργού) κβαντικού αριθμού και την συζήτηση που προηγήθηκε, μπορούμε εύκολα να δικαιολογήσουμε την σχέση:

$$\nu = c R \left(\frac{1}{(m-a)^2} - \frac{1}{(n-b)^2} \right) \quad m = 1, 2, 3, \dots, n = m+1, m+2, m+3, \dots \quad (7.10),$$

αφού μέσα στην σταθερά R , όπως τώρα γνωρίζουμε, σχέση (8.25), περιέχεται ο όρος e^4 , ο οποίος θα πρέπει να αντικατασταθεί από τον όρο $(Z_\phi e^2)^2$.

Ερώτηση 8.3 Πως δικαιολογείται η (7.10);

Θα μπορούσαμε ίσως να πούμε περισσότερα για τον προσδιορισμό της τιμής του Z_ϕ , αλλά δεν έχει νόημα να αφιερώσουμε περισσότερο χρόνο για ειδικής φύσεως διορθώσεις σ' ένα μοντέλο που έτσι ή αλλιώς δεν είναι τελείως σωστό. Ίσως για πολλούς δεν έχει νόημα και το μεγαλύτερο μέρος της συζητήσεως για πολυ-ηλεκτρονικά άτομα και ιδιαίτερα τα φορμαλιστικά επιχειρήματα για το Z_ϕ . Ο αντίλογος σ' αυτή την περίπτωση έχει να κάνει με την **απλότητα** του θεωρητικού πλαισίου, την **οικονομία** των πράξεων και την **διαφάνεια** των αποτελεσμάτων. Οι ιδιότητες αυτές, οι οποίες είναι πολύ

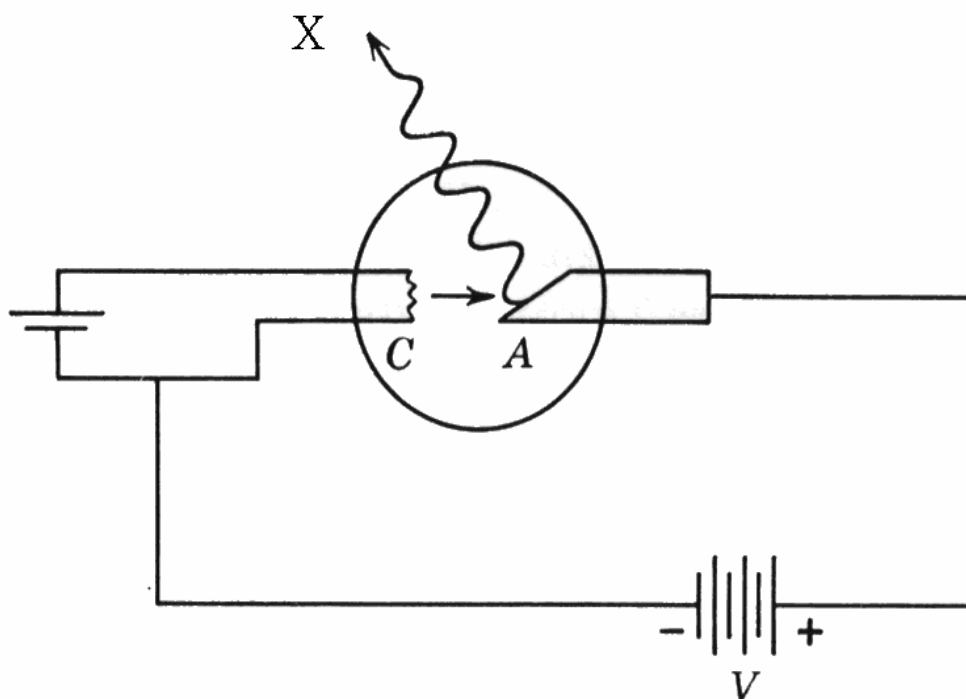
επίκαιρες στις ημέρες μας, δίνουν στο μοντέλο μία αυξημένη δύναμη πρόβλεψης και συσχετισμού δεδομένων.

Προφανώς, πέρα από τα επιχειρήματα και αντεπιχειρήματα, η πιο αποτελεσματική δοκιμασία για την χρησιμότητα του μοντέλου είναι αναμφισβήτητα η σύγκριση με το πείραμα. Στις δύο επόμενες ενότητες παρουσιάζεται πειραματική σύγκριση πρώτα με το φάσμα των ακτίνων X και κατόπιν με τα αποτελέσματα του πειράματος Franck - Hertz.

8.5 Πειραματική Σύγκριση

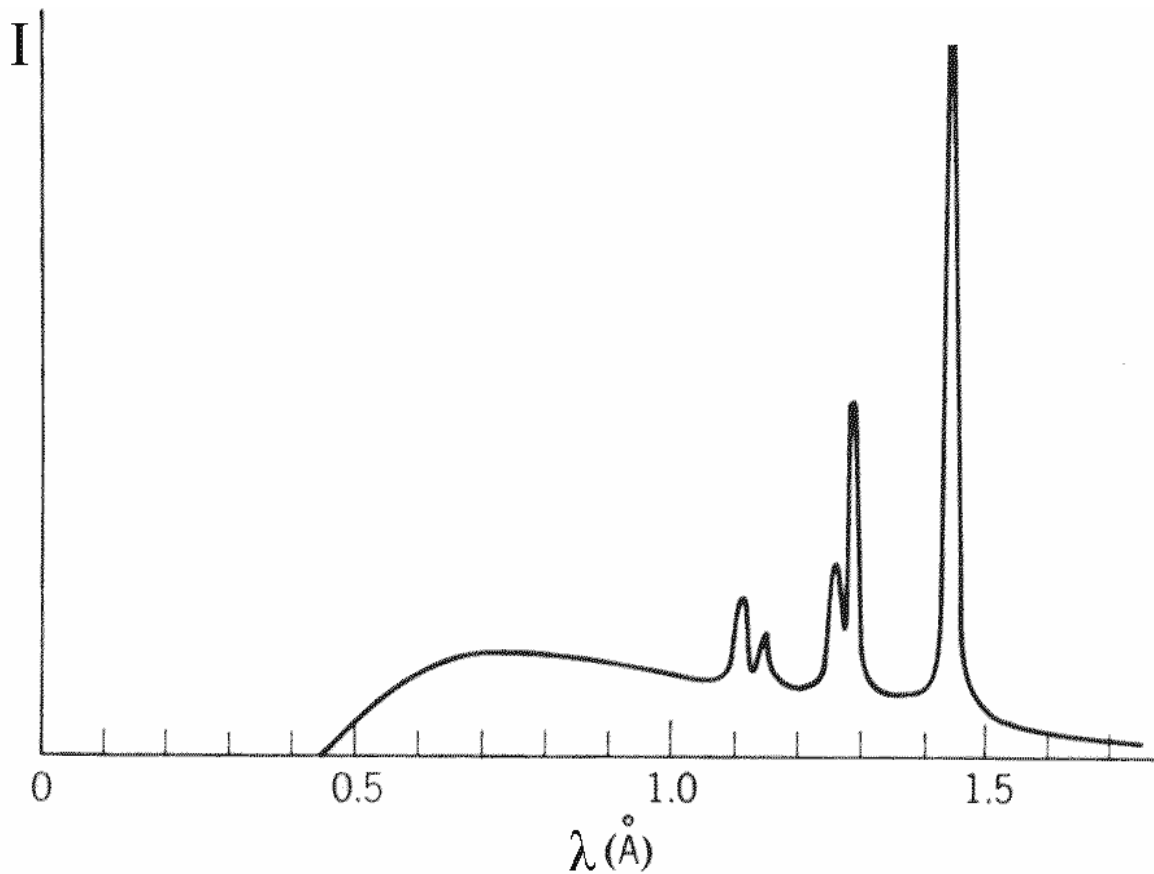
8.5.1 Φάσμα ακτίνων X

Το φάσμα των ακτίνων X λαμβάνεται χρησιμοποιώντας μία συσκευή που φαίνεται σχηματικά στο σχήμα 8.7. Τα ηλεκτρόνια που παράγονται στην κάθοδο επιταχύνονται μεταξύ καθόδου και ανόδου με υψηλές τάσεις της τάξεως των 10000-100000 Volts. Το φάσμα των ακτίνων X παράγεται όταν αυτά τα ηλεκτρόνια, με ενέργεια 10-100 KeV πέφτουν επάνω στο ηλεκτρόδιο της ανόδου. Το φάσμα της ακτινοβολίας (ακτίνων X) που προκύπτει είναι επαλληλία ενός συνεχούς και ενός γραμμικού φάσματος, όπως φαίνεται στο σχήμα 8.8.



Σχήμα 8.7

Σχηματική διάταξη συσκευής παραγωγής ακτίνων Χ. Ηλεκτρόνια τα οποία παράγονται από μία θερμαινόμενη κάθοδο C επιταχύνονται προς την άνοδο Α λόγω του εφαρμοζόμενου ισχυρού δυναμικού V . Οι ακτίνες Χ εκπέμπονται από την κάθοδο καθώς τα ηλεκτρόνια προσκρούουν επάνω της.



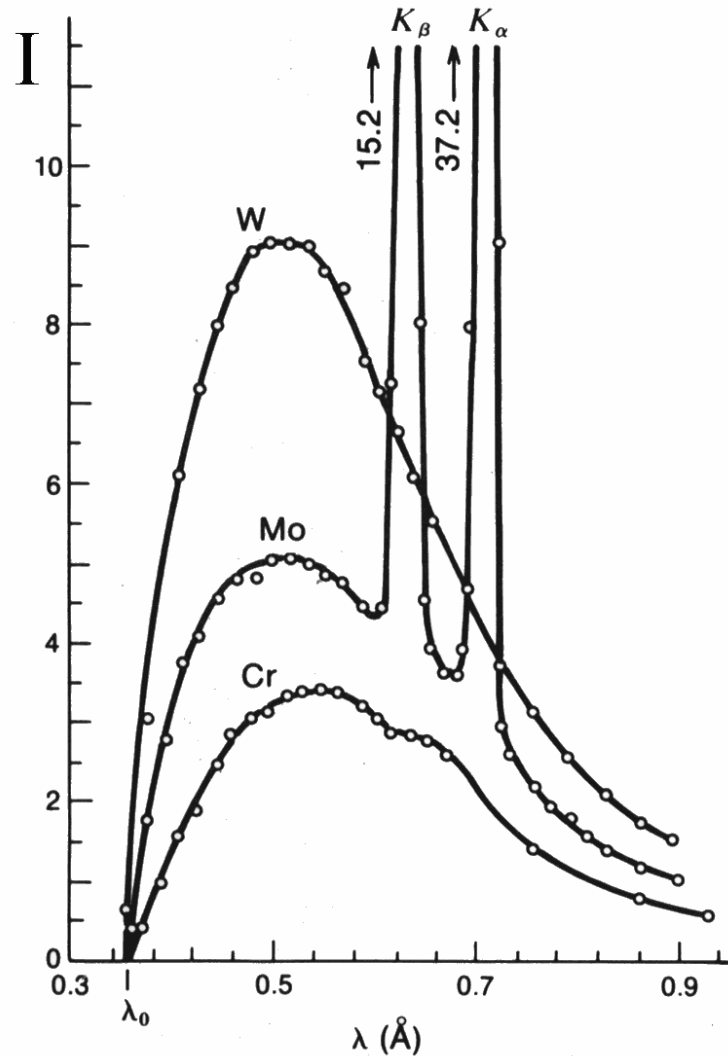
Σχήμα 8.8

Ένα τυπικό φάσμα ακτίνων Χ, όπως περιγράφεται στο κείμενο.

Η άνοδος αποτελείται από Βολφράμιο.

Το συνεχές φάσμα δεν είναι τίποτα άλλο από την **ακτινοβολία πεδήσεως**, την οποία συζητήσαμε νωρίτερα στο κεφάλαιο 6 και η οποία, όπως είδαμε, δημιουργείται από την απότομη επιβράδυνση που υφίστανται τα ηλεκτρόνια κατά την σύγκρουσή τους

με τα άτομα του μετάλλου της ανόδου. Το ελάχιστο κύματος λ_0 , όπως φαίνεται στο σχήμα 8.9, είναι το ίδιο για όλα τα μέταλλα,. Το λ_0 εξαρτάται συστηματικά μόνο από την τάση V_0 .



Σχήμα 8.9

Φάσμα ακτίνων X που παράγεται από ηλεκτρόνια ενέργειας 35 KeV ($V_0 = 35000$ Volts), χρησιμοποιώντας τρία διαφορετικά μέταλλα για κάθοδο: Βολφράμιο (W), Μολυβδαίνιο (Mo) και χρώμιο (Cr). Το λ_0 είναι το ίδιο και στις τρεις περιπτώσεις.

Εάν v_{\max} είναι η μέγιστη συχνότητα που αντιστοιχεί στο μήκος κύματος λ_0 , θα έχουμε, όπως είδαμε στην ενότητα 2.7:

$$h\nu_{\max} = eV_o \quad (8.49)$$

$$\text{και} \quad \frac{hc}{\lambda_o} = eV_o \quad (8.50)$$

Το έργο εξόδου, του μετάλλου της ανόδου που είναι της τάξεως μερικών eV, έχει παραληφθεί από τις παραπάνω σχέσεις που οι ενέργειες είναι της τάξεως των 10-100keV.

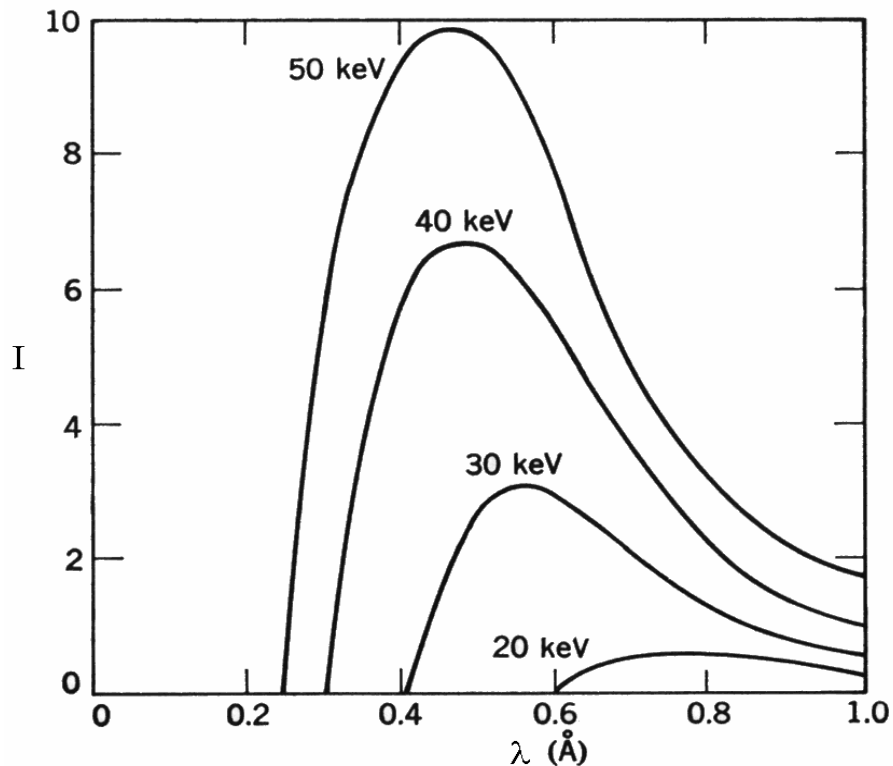
Το γραμμικό φάσμα των ακτίνων X, το οποίο αποτελείται από λίγες ευδιάκριτες γραμμές (βλέπε σχήματα 3.6 και 8.8-8.9), είναι χαρακτηριστικό του μετάλλου της ανόδου. Υπάρχουν όμως αρκετά συστηματικά γνωρίσματα από υλικό σε υλικό που το «διηρημένο» μοντέλο του Bohr μπορεί να συσχετίσει. Ας δούμε πρώτα πως δημιουργείται το γραμμικό φάσμα των ακτίνων X και κατόπιν θα επιχειρήσουμε τον συσχετισμό από υλικό σε υλικό. Ας θεωρήσουμε λοιπόν, κάποιο ηλεκτρόνιο ενός ατόμου του ηλεκτροδίου της ανόδου που αρχικά βρίσκεται στον K φλοιό. Αυτό το ηλεκτρόνιο με το «χτύπημα» που δέχεται από κάποιο από τα ηλεκτρόνια με τις υψηλές ενέργειες των μερικών δεκάδων keV μπορεί τελικά να βρεθεί τελείως έξω αφήνοντας πίσω του, στον φλοιό K μία οπή. Τότε κάποιο από τα ηλεκτρόνια που βρίσκονται σε υψηλότερες ενεργειακές στιβάδες, με n μεγαλύτερο της μονάδος, μπορεί να «πέσει» σ' αυτή την οπή εκπέμποντας ταυτόχρονα ένα φωτόνιο με συχνότητα που καθορίζεται κατά τα γνωστά (βλέπε για παράδειγμα σχέση 8.4) από την ενεργειακή διαφορά των δύο στιβάδων (δηλαδή της στιβάδας K και της στιβάδας από την οποία προήλθε αυτό το δεύτερο ηλεκτρόνιο. Η ενεργειακή αυτή διαφορά, λόγω, της μεγάλης ενέργειας σύνδεσης της στιβάδας K είναι για τα περισσότερα στοιχεία στην περιοχή 0.1-100 keV). Οι συχνότητες αυτές είναι διάκριτες και καλά καθορισμένες (αφού οι ενεργειακές στάθμες είναι αυστηρά καθορισμένες).

Στο μοντέλο του Bohr, σύμφωνα με τα όσα αναφέραμε πριν, στην ενότητα 3.2, αυτές οι συχνότητες που για τα περισσότερα στοιχεία δίνονται από την σχέση 7.8' μετά βέβαια από την αντικατάσταση 8.48. Βέβαια, η ίδια διαδικασία μπορεί να συμβεί και για κάποια οπή, που έχει δημιουργηθεί στον φλοιό L. Η συνήθης ονοματολογία που ακολουθείται για τις γραμμές του φάσματος των ακτίνων X, χαρακτηρίζει την γραμμή με το κεφάλαιο γράμμα του φλοιού στον οποίο υπάρχει η οπή με την προσθήκη σαν δείκτη ενός μικρού γράμματος της του ελληνικού αλφάβητου. που χαρακτηρίζει τον φλοιό εκκινήσεως του

ηλεκτρονίου που συμπληρώνει την οπή, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.9. Έτσι για $n=1,2$ και $m=n+1, n+2$ έχουμε αντίστοιχα τις γραμμές K_α, K_β και L_α, L_β

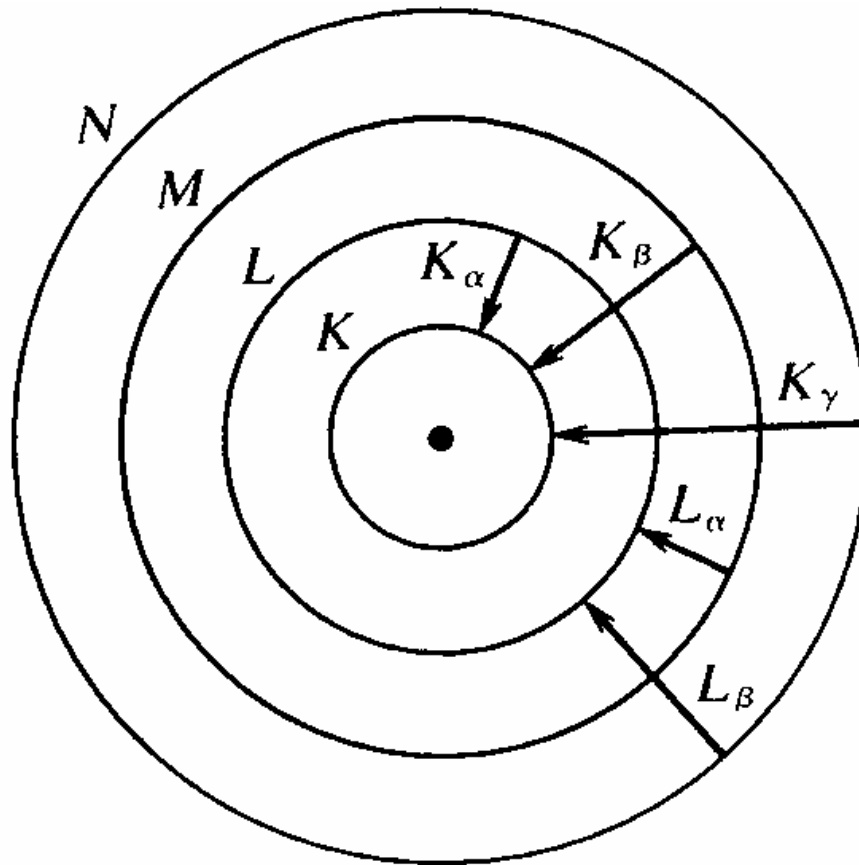
Ερώτηση 8.4

Γιατί στο σχήμα 8.8 δεν φαίνονται κι άλλες γραμμές του φάσματος από ηλεκτρονικά πηδήματα μεταξύ άλλων ενεργειακών σταθμών, αφού οι συγκρούσεις με τα πολύ ενεργητικά ηλεκτρόνια μπορούν να μετακινήσουν κι άλλα ηλεκτρόνια ;



Σχήμα 8.10

Το συνεχές μέρος του φάσματος ακτίνων Χ με άνοδο Βολφράμιο, για τέσσερις διαφορετικές τιμές του επιταχύνοντος δυναμικού V_0 (20, 30, 40 και 50 k Volts). Οι ενέργειες των ηλεκτρονίων φαίνονται στο πάνω μέρος της κάθε καμπύλης.



Σχήμα 8.11

Επεξήγηση της συνηθισμένης ονοματολογίας των γραμμών του φάσματος ακτίνων X, με βάση το σχήμα 8.6. Οι γραμμές ονομάζονται με βάση τον φλοιό στον οποίον καταλήγει το ηλεκτρονικό άλμα (π.χ. K, L, M, κτλ) και τον φλοιό από τον οποίο εκκινεί (π.χ. α, β, γ).

Αναλυτικότερα δείτε το σχήμα 8.12.

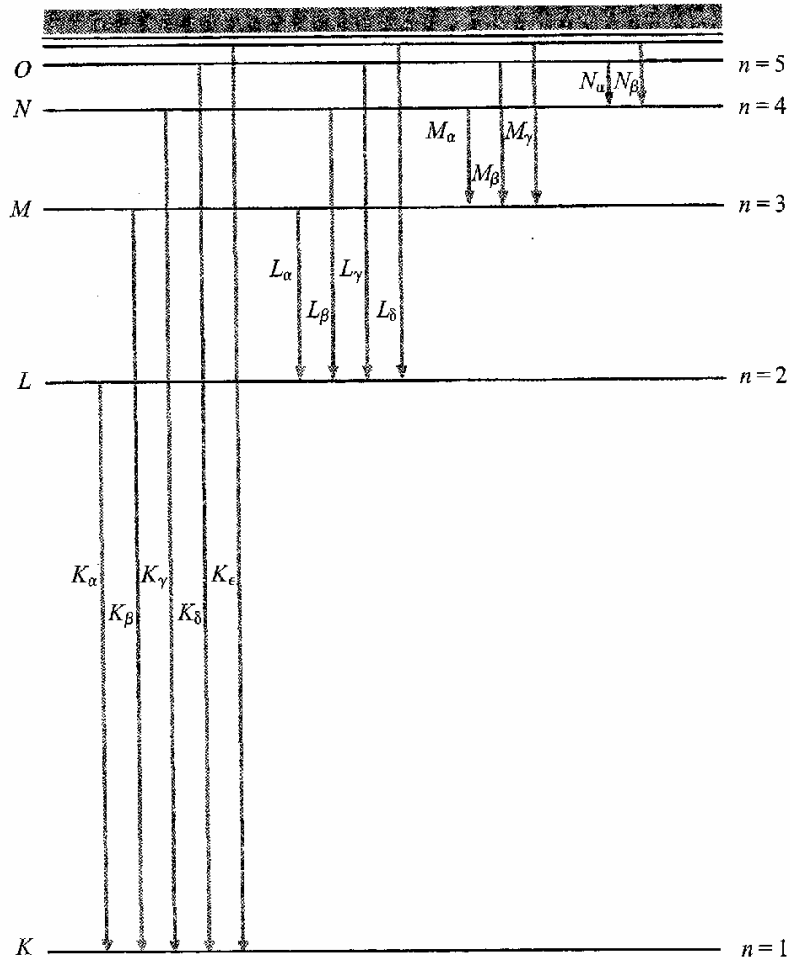
Μπορούμε τώρα να γράψουμε την έκφραση για την συχνότητα της γραμμής K_α , με βάση την γενικευμένη σχέση 7.8' :

$$\nu(K_\alpha) = \frac{2\pi^2 m e^4 Z_\phi^2}{h^2} \left(1 - \frac{1}{4}\right) \quad (8.51)$$

και λόγω της 8.47: $\nu(K_\alpha) = \frac{6\pi^2 m e^4}{4h^3} (Z - Q)^2 \quad (8.52)$

Το (διευρυμένο) μοντέλο του Bohr λοιπόν προβλέπει πως εάν σχεδιάσουμε την καμπύλη

$\sqrt{\nu(K_\alpha)}$ σαν συνάρτηση του Z θα πρέπει να προκύψει μία ευθεία γραμμή, η οποία μάλιστα θα τέμνει τον άξονα του Z στη θέση $Z=Q$.

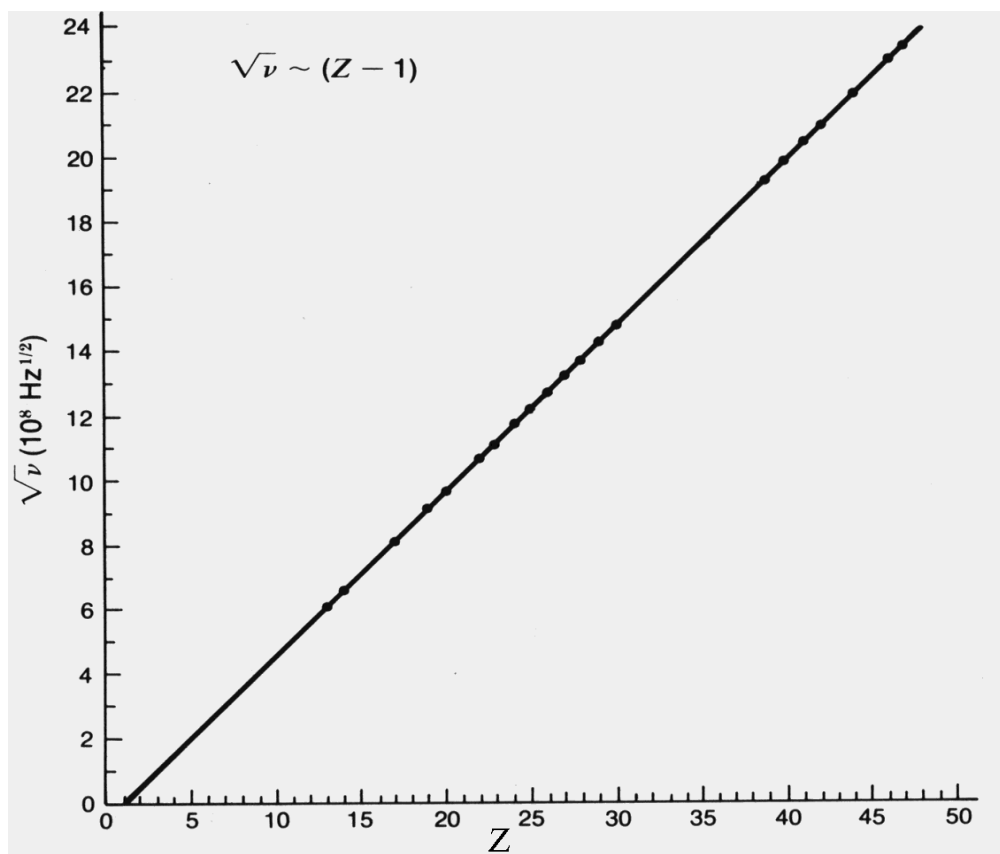


Σχήμα 8.12

Αναλυτική περιγραφή των γραμμών του φάσματος των ακτίνων X. Όπως και στο σχήμα 8.11,

Οι δείκτες $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ δηλώνουν $\Delta n=1, 2, 3, \dots$

Η πρόβλεψη αυτή επαληθεύεται από το διάγραμμα του σχήματος 8.13.

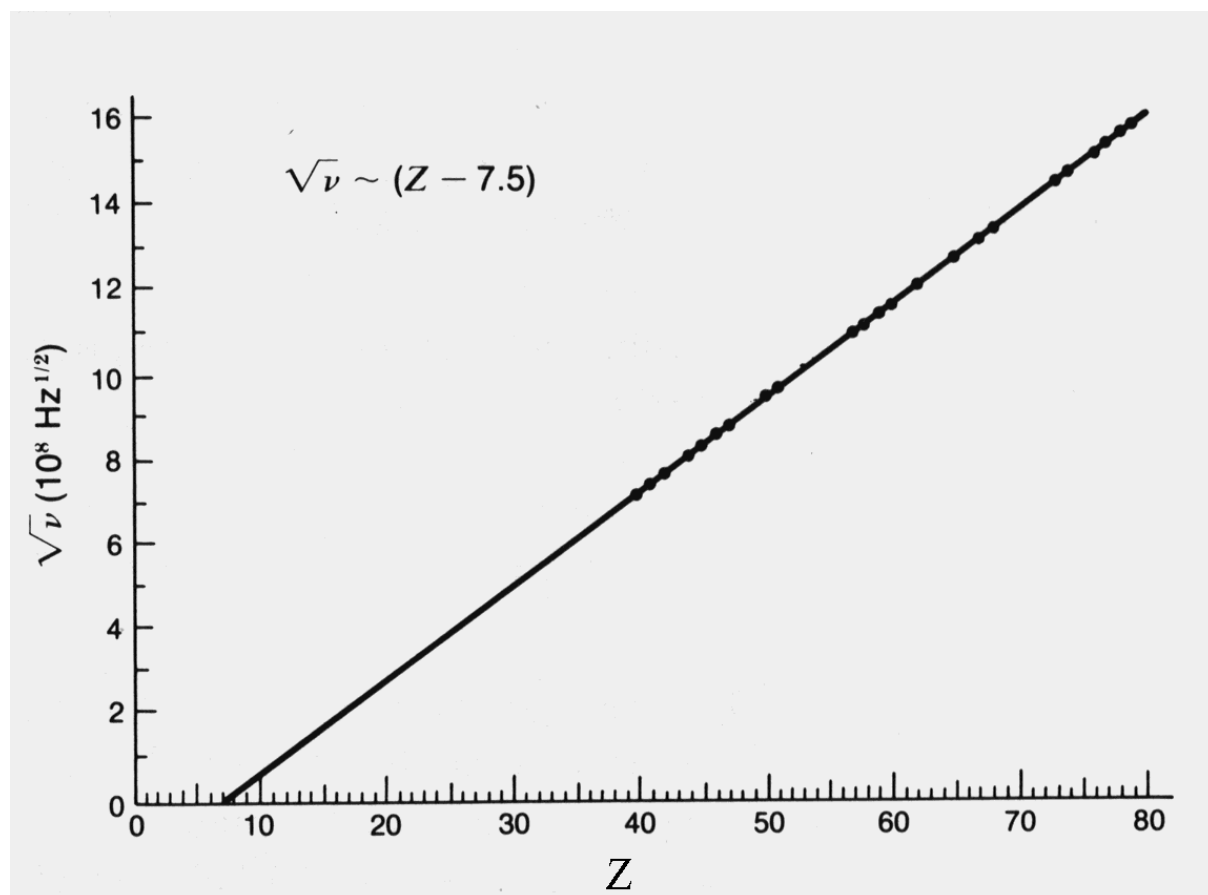
**Σχήμα 8.13**

Διάγραμμα του Moseley για την K_{α} γραμμή του φάσματος ακτίνων X.

Η καμπύλη του σχήματος 8.13, οφείλεται στον Άγγλο Φυσικό H.G.Moseley ο οποίος 1913-1914 συνέλεξε τα πειραματικά δεδομένα και έδειξε την συστηματική μεταβολή της γραμμής K_{α} με τον αριθμό Z , χρησιμοποιώντας το διευρυμένο μοντέλο του Bohr. Εφαρμόζοντας μάλιστα αυτή τη συστηματική μεταβολή ο Moseley ήταν σε θέση να προβλέψει νέες γραμμές και να απορρίψει άλλες που επιστεύετο ότι προέρχονταν από συγκεκριμένο στοιχείο (με συγκεκριμένο Z) ενώ προερχόντουσαν όπως αποδείχθηκε τελικά από άλλο. Ο **νόμος του Moseley** καθορίζει ότι η τετραγωνική ρίζα της συχνότητας μιας συγκεκριμένης γραμμής (π.χ. της K_{α}) του (γραμμικού) φάσματος ακτίνων X ενός στοιχείου, είναι ανάλογη του ατομικού αριθμού Z του στοιχείου. Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι η συχνότητα είναι ανάλογη του τετραγώνου του ατομικού αριθμού Z^2 .

Από τα σχήμα 8.13 φαίνεται πως το φορτίο Q της (8.45) είναι: $Q=1$, πράγμα που επιβεβαιώνει πως μόνο ένα ηλεκτρόνιο έμεινε στην στιβάδα $n=1$, όταν έφυγε το αρχικό

ηλεκτρόνιο και δημιουργήθηκε η σπή. Βλέπουμε λοιπόν πως η πειραματική σύγκριση του μοντέλου Bohr είναι πολύ ικανοποιητική και για άλλα στοιχεία πέρα από το υδρογόνο. Μ' ένα παρόμοιο τρόπο ο Moseley ανέλυσε την γραμμή L_α που δίνεται στο σχήμα 8.14.



Σχήμα 8.14

Διάγραμμα του Moseley για την L_α γραμμή του φάσματος ακτίνων X.

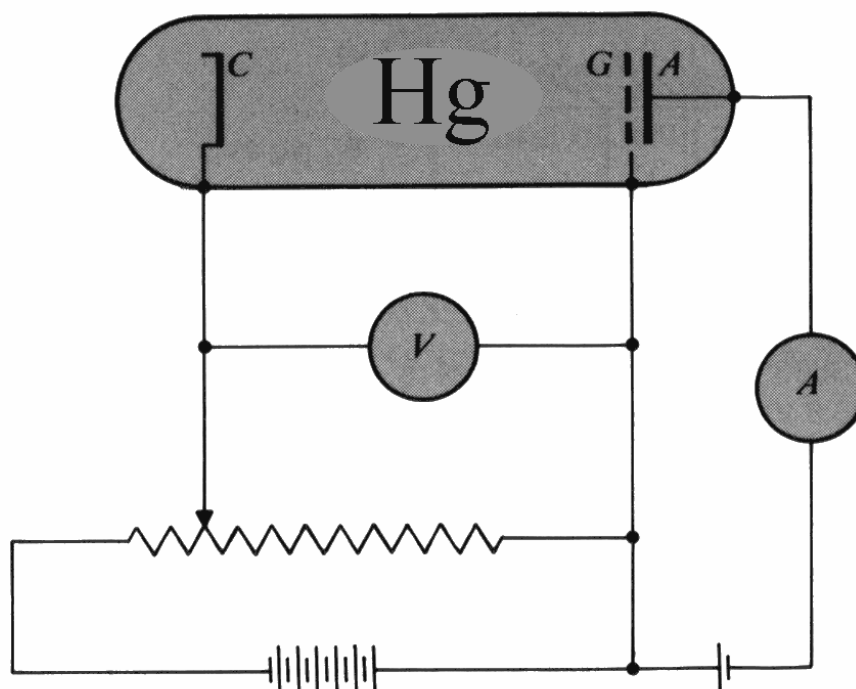
Σ' αυτή την περίπτωση το φορτίο Q , όπως φαίνεται και από το σχήμα 8.14, βρέθηκε να είναι ίσο προς 7.5 δείχνοντας πως η ισοδύναμη θωράκιση του πυρήνα από τα ηλεκτρόνια που παραμένουν στους φλοιούς $n=1$ και $n=2$ είναι μεταξύ 7 και 8e. Έχοντας υπ' όψη την συνολική χωρητικότητα των φλοιών K και L, λόγω της δομικής αρχής που είναι ίση με 10 (2+8) ηλεκτρόνια, θα περιμέναμε για το Q , με επιχειρήματα παρόμοια με αυτά που εκπέσαμε για την K_α γραμμή, μία τιμή πολύ κοντά στο 9. Η διαφορά που παρατηρείται θα πρέπει να αναζητηθεί στα πλαίσια του μοντέλου Bohr:

(α) στο ότι η σφαιρική προσέγγιση που καθορίζει το Q (σχ. 8.45) δεν είναι πάντα ικανοποιητική ιδιαίτερα για ηλεκτρόνια του ίδιου φλοιού, όπως συζητήσαμε νωρίτερα και (β) στην ελαφρά εξάρτηση του Z_ϕ και από τον κβαντικό αριθμό m , της αρχικής κατάστασης στην σχέση 7.8' και στην ισοδύναμη της σχέσης 8.51 για την γραμμή L_α .

8.5.2 Πειραματική Σύγκριση: Πείραμα Franck-Hertz

Οι κβαντισμένες ενεργειακές καταστάσεις που ο Bohr υπέθεσε για την ερμηνεία των ατομικών φασμάτων, έγιναν αποδεκτές μέχρι τώρα μόνο με έμμεσο τρόπο, από τα ατομικά φάσματα. Το πείραμα των Franck και Hertz, μας δείχνει μία πιο άμεση επιβεβαίωση αυτών των διάκριτων ενεργειακών καταστάσεων του Bohr στα άτομα.

Η πειραματική διάταξη των Franck και Hertz φαίνεται στο σχήμα 8.15.



Σχήμα 8.15

Σχηματική παράσταση της πειραματικής διατάξεως των Franck και Hertz

Σ' αυτό το πείραμα τα ηλεκτρόνια από μία θερμή κάθοδο C, επιταχύνονται με ένα μεταβλητό δυναμικό V μέσα από ατμούς υδραργύρου προς το ηλεκτρόδιο πλέγματος G.

Τα ηλεκτρόνια που θα περάσουν μέσα από το πλέγμα G αντιμετωπίζουν ένα μικρό απωστικό δυναμικό το οποίο για να υπερσκελίσουν και να φτάσουν στην άνοδο A πρέπει να έχουν αρκετή κινητική ενέργεια.

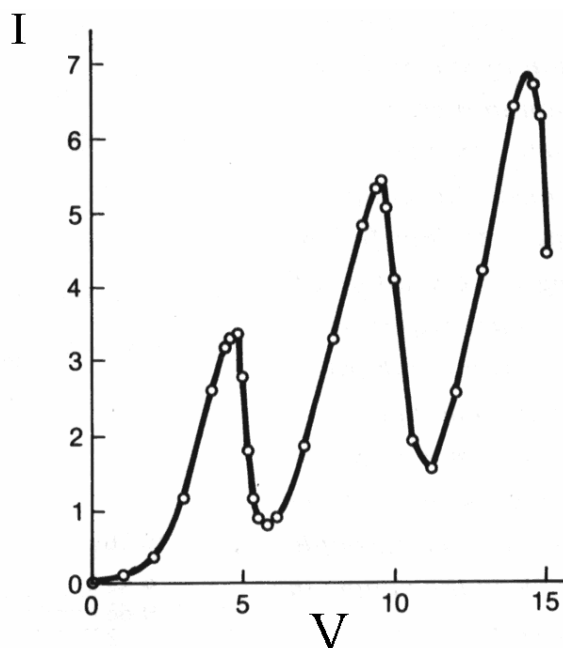
Η τάση V η οποία επιταχύνει τα ηλεκτρόνια και τους δίνει κινητική ενέργεια ίση προς eV , όταν περνούν το πλέγμα, μεταβάλλεται συνεχώς από μηδέν μέχρι 15 V. Το ρεύμα που δημιουργούν τα ηλεκτρόνια που φθάνουν στην άνοδο A μετράται από το αμπερόμετρο A. Στο σχήμα 8.16 φαίνεται η μεταβολή του ρεύματος με την τάση V . Καθώς αυξάνεται η τάση από μηδέν μέχρι 3.9 V το ρεύμα αυξάνεται επειδή αυξάνει το ποσοστό ηλεκτρονίων που φθάνει στην άνοδο A. Στα 3.9 V όμως υπάρχει μία ξαφνική μείωση του ρεύματος, ενδεικτική του γεγονότος ότι μειώνεται σημαντικά ο αριθμός των ηλεκτρονίων που μπορούν να φτάσουν στην άνοδο επειδή πολλά από αυτά έχασαν την κινητική τους ενέργεια. Αυτή την κινητική ενέργεια την 3.9 eV πήραν τα άτομα του υδραργύρου και διεγέρθηκαν από τη θεμελιώδη τους κατάσταση σε μία ενεργειακή κατάσταση που βρίσκεται 3.9 eV υψηλότερα. Προφανώς, με μικρότερη από 3.9eV ενέργεια δεν μπορούσαν να διεγερθούν τα ηλεκτρόνια από τη θεμελιώδη στην επόμενη κβαντισμένη ενεργειακή κατάσταση. Η ενεργειακή διαφορά των 3.9 eV ταιριάζει ακριβώς με μία από τις γνωστές γραμμές του φάσματος του υδραργύρου που βρίσκεται στο υπεριώδες με μήκος κύματος 2537 Å με βάση τη σχέση

$$E_{\text{φωτόνιο}} = \frac{hc}{\lambda} \quad (8.53)$$

Θέτοντας $\lambda = 2537 \text{ \AA}$, βρίσκουμε $E_{\text{φωτόνιο}} = 4.9 \text{ eV}$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι πράγματι αυτή η απότομη μείωση του ρεύματος στα 4.9 eV οφείλεται σε «συντονισμό» της απώλειας κινητικής ενέργειας των ηλεκτρονίων της καθόδου με την ενέργεια διεγέρσεως των ηλεκτρονίων του ατόμου του υδραργύρου.

Σε υψηλότερες κινητικές ενέργειες επόμενο είναι να διεγερθούν τα ηλεκτρόνια του Hg σε άλλες υψηλότερα ευρισκόμενες διεγερμένες καταστάσεις, δίνοντας έτσι τα επόμενα μέγιστα της καμπύλης $I_A(V)$, στο σχήμα 8.16.



Σχήμα 8.16

Γραφική παράσταση του ρεύματος I_A , στην άνοδο σαν συνάρτηση της τάσης V που επιταχύνει τα ηλεκτρόνια.

Επιπλέον απόδειξη αυτής της ερμηνείας είναι η παρατήρηση των γραμμών εκπομπής καθώς τα άτομα του Hg αποδιεγείρονται πίσω στη θεμελιώδη τους κατάσταση εκπέμποντας φωτόνια καθορισμένους μήκους κύματος. Σ' ένα μεταγενέστερο πείραμα το οποίο σχεδιάστηκε για να ανιχνεύει τέτοιες γραμμές εκπομπής από τον υδράργυρο, βρέθηκε ότι όσο η επιταχύνουσα τάση V ήταν μικρότερη των 4.9 V δεν υπήρχε καμία γραμμή εκπομπής. Μόλις η τάση έγινε λίγο μεγαλύτερη από 4.9 V, αμέσως παρατηρήθηκε η χαρακτηριστική γραμμή με μήκος κύματος 2537 Å. Έτσι η ερμηνεία του πειράματος που προτάθηκε για την άμεση επιβεβαίωση των κβαντισμένων ενεργειακών σταθμών δικαιώθηκε πλήρως.

Τα υπόλοιπα μέγιστα που παρατηρούνται στο σχήμα 8.16 οφείλονται είτε σε υψηλότερες διεγέρσεις, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, είτε σε ηλεκτρόνια που χάνουν περισσότερες από μία φορά «συντονισμένα» (με ενεργειακές διαφορές του Hg) ποσά κινητικής ενέργειας.

8.6 Σύνοψη: Πλεονεκτήματα-Μειονεκτήματα του μοντέλου Bohr

Όπως ίσως θα έχουμε διαπιστώσει μέχρι τώρα, το μεγαλύτερο πλεονέκτημα του μοντέλου Bohr είναι η **απλότητα** και η **διαφάνειά** του. Με ελάχιστες απλές αλγεβρικές πράξεις μπορούμε γρήγορα και απλά να πάρουμε ποιοτικά και ποσοτικά αποτελέσματα με ακρίβεια (για τις ποιοτικές εκτιμήσεις) η οποία κυμαίνεται από εξαιρετική (π.χ. οι τιμές της ενέργειας για το άτομο του υδρογόνου) μέχρι μέτρια (εκτιμήσεις ενέργειας για πολύ-ηλεκτρονικά άτομα). Και στην χειρότερη ακόμα περίπτωση, οι προβλέψεις του μοντέλου Bohr μπορεί να χρησιμοποιηθούν για επιτυχείς εκτιμήσεις τάξης μεγέθους. Συμπληρωμένο με την «δομική αρχή», το μοντέλο Bohr δίνει ικανοποιητική περιγραφή των ατομικών φασμάτων, και ιδιαίτερα των φασμάτων ακτίνων X, άλλων ατόμων (και ιόντων) πέραν του υδρογόνου. Εξηγεί την σταθερότητα των ατόμων και ερμηνεύει ικανοποιητικά τις περιοδικές (σαν συνάρτηση του ατομικού αριθμού Z) ιδιότητες των ατόμων, όπως εκφράζονται με τον περιοδικό πίνακα των στοιχείων. Παρόλα αυτά, το μοντέλο αποτελεί ένα μίγμα κλασικών και κβαντικών ιδεών με την ιδέα των στάσιμων τροχιών και καταστάσεων να παραμένει αυθαίρετη και σκοτεινή. Σκοτεινή παραμένει επίσης η χρονική εξάρτηση καθώς και η ακριβής φύση των «κβαντικών αλμάτων». Η πλήρης και οριστική απάντηση αυτών και άλλων ερωτημάτων και προβλημάτων δίνεται από την ολοκληρωμένη Κβαντική θεωρία, την Κβαντομηχανική, την οποία θα αρχίσουμε να περιγράφουμε από το κεφάλαιο 10 και μετά. Οι απαντήσεις της Κβαντομηχανικής βασίζονται στην επίλυση σύνθετων διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους και απαιτούν την γνώση προχωρημένων μαθηματικών μεθόδων. Από αυτό και μόνο το γεγονός, μπορούμε να εκτιμήσουμε την παιδαγωγική και επιστημονική αξία του μοντέλου του Bohr, το οποίο χρησιμοποιεί απλές αλγεβρικές σχέσεις και εκφράσεις. Αυτή η διαπίστωση αποτελεί ταυτόχρονα την δικαίωση και το βασικό κίνητρο για την μάλλον εκτεταμένη παρουσίαση του μοντέλου.

Τι αλλάζει όμως, από όλα αυτά που συζητήσαμε για την ατομική θεωρία στο «ακριβές μοντέλο»;

1) Οι στάσιμες τροχιές καταργούνται. Οι στάσιμες καταστάσεις παραμένουν.
Η έννοια της τροχιάς χάνει την σημασία της επειδή η θέση και η ορμή του σωματιδίου, του

ηλεκτρονίου, δεν μπορούν να προσδιορισθούν ταυτόχρονα με ακρίβεια (δείτε την αρχή της απροσδιοριστίας ή αβεβαιότητας στο επόμενο κεφάλαιο).

2) Η σχέση $L=mv r = n \hbar$, $n = 1, 2, 3, \dots$ (8.9) καταργείται αλλά η κβάντωση της στροφορμής παραμένει. Η στροφορμή δεν καθορίζεται από τον (κύριο) κβαντικό αριθμό n , αλλά από ένα άλλο κβαντικό αριθμό l , ο οποίος παίρνει τιμές από μηδέν μέχρι $n-1$.

3) Η (8.9) αντικαθίσταται από την $L^2 = (mv r)^2 = l(l+1) \hbar^2$, $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Έτσι η στροφορμή του ατόμου του υδρογόνου στην θεμελιώδη του κατάσταση δεν είναι $1 \hbar$ αλλά μηδέν.

4) Η ενέργεια του ατόμου του υδρογόνου εξακολουθεί να δίνεται από τη σχέση

$$E_n = -\frac{2m\pi^2 e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2} \quad \text{ή} \quad E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.24)$$

και να εξαρτάται από τον κβαντικό αριθμό n μόνο. Αντίθετα, η ενέργεια $E(Z)$ πολύ-ηλεκτρονικών ατόμων ($Z > 1$) εξαρτάται από τον (κύριο) κβαντικό αριθμό n αλλά και τον κβαντικό αριθμό l , ο οποίος προσδιορίζει την στροφορμή.

Δηλαδή: $E(Z) = E_{nl}(Z)$, $Z > 1$. Η ενεργειακή διαφορά δύο ενεργειακών σταθμών με το ίδιο n και διαφορετικό l είναι συνήθως (και ιδιαίτερα για μικρά n) πολύ μικρότερη από την αντίστοιχη διαφορά σταθμών με το ίδιο l και διαφορετικό n

5) Για πολύ-ηλεκτρονικά άτομα ($Z > 1$), ο φαινόμενος ατομικός αριθμός Z_ϕ εξαρτάται τόσο από τον (κύριο) κβαντικό αριθμό n , όσο και από τον κβαντικό αριθμό l .

$$Z \rightarrow Z_\phi(n, l) \quad \text{Μπορούμε, λοιπόν, να γράψουμε προσεγγιστικά:} \quad E_{nl} = -\frac{Z_\phi^2(n, l)}{n^2} \times 13.6 \text{ eV}.$$

Η εξάρτηση του Z_ϕ από τον κβαντικό αριθμό n είναι πολύ πιο ισχυρή σε σχέση με την αντίστοιχη εξάρτηση από τον κβαντικό αριθμό l .

6) Για πολύ-ηλεκτρονικά άτομα ($Z > 1$), η «δομική αρχή» παραμένει, μετεξελιγμένη όμως, σε αρχή του Pauli, και σχετίζεται με τους κβαντικούς αριθμούς οι οποίοι περιγράφουν την κατάσταση του ηλεκτρονίου. Στο μοντέλο του Bohr ο κβαντικός αριθμός n περιγράφει την κατάσταση (ακτίνα τροχιάς, ταχύτητα, ενέργεια, στροφορμή)

7) Για πολύ-ηλεκτρονικά άτομα ($Z > 1$), αντί για τους συμπληρωμένους φλοιούς K, L, M κτλ του μοντέλου Bohr, οι οποίοι βασίζονται στον κβαντικό αριθμό n ($K \rightarrow n=1$,

$L \rightarrow n=2$, κτλ), στο ακριβές μοντέλο έχουμε συμπληρωμένους υποφλοιούς ή υποστιβάδες, $1s$, $2s$, $2p$, $3s$, κτλ, που αντιστοιχούν στους κβαντικούς αριθμούς n και l ($1s \rightarrow n=1, l=0$, $2p \rightarrow n=2, l=1$, κτλ. Το πλήθος των ηλεκτρονίων που «χωρούν» σε ένα υποφλοιό είναι $2(2l+1)$).

8) Τέλος, αυτό που αλλάζει ανεπιστρεπτί στο ακριβές μοντέλο, είναι η γενικότερη θεώρηση, πλαίσιο (φυσικό και μαθηματικό) και τρόπος περιγραφής των ατομικών, υποατομικών (και γενικότερα όλων των φυσικών) φαινομένων.

Αυτά όμως θα τα εξετάσουμε αργότερα στην Κβαντική θεωρία II.

Ανακεφαλαίωση

1) Το μοντέλο του Bohr για το άτομο του υδρογόνου στηρίζεται στους κανόνες κβάντωσης Planck-Einstein και την ιδέα των στασίμων καταστάσεων. Το μοντέλο αυτό στηρίζει (ή/και στηρίζεται εις) την κβάντωση της στροφορμής ή/και την αρχή της αντιστοιχίας.

2) Το μοντέλο του Bohr εξηγεί με τον απλούστερο τρόπο το ατομικό φάσμα του υδρογόνου (φασματικές γραμμές, φασματικές σειρές, συνδυαστική αρχή). Επιπλέον προέβλεψε φασματικές γραμμές, οι οποίες παρατηρήθηκαν πειραματικά εκ των υστέρων.

3) Το μοντέλο του Bohr περιγράφει ικανοποιητικά τις ιδιότητες (ακτίνα, ενέργεια, κτλ) του ατόμου του υδρογόνου.

4) Το μοντέλο του Bohr, χωρίς επιπλέον παραδοχές και προσεγγίσεις, δεν μπορεί να περιγράψει άλλα άτομα πέραν του υδρογόνου, με περισσότερα από ένα ηλεκτρόνια. Αυτό οφείλεται στην δυναμική ενέργεια λόγω των απωστικών δυνάμεων Coulomb μεταξύ των ηλεκτρονίων, η οποία δεν περιλαμβάνεται στην περιγραφή της ενέργειας του ατόμου με βάση το μοντέλο του Bohr.

5) Κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις και παραδοχές, το μοντέλο του Bohr μπορεί να χρησιμεύσει για μια (κυρίως) ποιοτική και (εν μέρει) ποσοτική προσεγγιστική περιγραφή και άλλων ατόμων πέραν του υδρογόνου. Οι ιδιότητες (π.χ. ενέργεια, ακτίνα, ταχύτητα ηλεκτρονίων) Για ένα πολλαπλά ιονισμένο άτομο,

ατομικού αριθμού Z , στο οποίο έχει απομείνει ένα μόνο ηλεκτρόνιο, σύμφωνα με το μοντέλο του Bohr αντικαθιστούμε στις σχέσεις για το άτομο του υδρογόνου όπου e^2 με $Z e^2$ και έχουμε, σε πολύ καλή προσέγγιση της ιδιότητες του ιόντος.

6) Για ουδέτερα άτομα, ατομικού αριθμού Z , μπορούμε να πάρουμε μια καλή εκτίμηση της ενέργειας από το μοντέλο του Bohr μετά από την αντικατάσταση του φορτίου e^2 με $Z_\phi e^2$, όπου Z_ϕ είναι ο φαινόμενος (ή ενεργός) ατομικός αριθμός, στον οποίο έχει προσεγγιστικά (κατά μέσον όρο) ενσωματωθεί για ένα δεδομένο ηλεκτρόνιο, και το απωστικό φορτίο των ενδιάμεσων ηλεκτρονίων. Ο ενεργός ατομικός αριθμός Z_ϕ εξαρτάται από την συγκεκριμένη κατάσταση (κβαντικό αριθμό) του ηλεκτρονίου στο οποίο αναφέρεται.

7) Μια θεμελιώδης παραδοχή για την εφαρμογή του μοντέλου του Bohr σε πολύ-ηλεκτρονικά άτομα είναι η «δομική αρχή», η οποία καθορίζει τον μέγιστο επιτρεπόμενο αριθμό ηλεκτρονίων σε κάθε μία από τις καθορισμένες επιτρεπόμενες τροχιές. Έτσι έχουμε μια ατομική δομή με τα ηλεκτρόνια να κατανέμονται σε συμπληρωμένους και ασυμπλήρωτους ηλεκτρονικούς φλοιούς ή στιβάδες.

8) Με βάση την «δομική αρχή», η οποία τροποποιημένη παραμένει και σε μεταγενέστερα ακριβή κβαντικά μοντέλα του ατόμου, οι ηλεκτρονικές και χημικές ιδιότητες ενός ατόμου καθορίζονται από το πλήθος και την κατάσταση των εξώτατων ηλεκτρονίων, τα οποία βρίσκονται σε ασυμπλήρωτες στιβάδες (φλοιούς). Άτομα με συμπληρωμένους φλοιούς δεν είναι χημικά ενεργά και αντιστοιχούν στα λεγόμενα αδρανή (ή ευγενή) στοιχεία.

9) Η κβάντωση της στροφορμής είναι αποφασιστικής και κεντρικής σημασίας για την Κβαντική Θεωρία.

10) Ο νόμος του Moseley καθορίζει ότι η τετραγωνική ρίζα της συχνότητας μιας συγκεκριμένης γραμμής (π.χ. της K_α) του (γραμμικού) φάσματος ακτίνων X ενός στοιχείου, είναι ανάλογη του ατομικού αριθμού Z του στοιχείου. Ισοδύναμα: «η συχνότητα είναι ανάλογη του τετραγώνου του ατομικού αριθμού Z^2 ».

Απαντήσεις σε επιλεγμένες ερωτήσεις**8.2**

Το φωτόνιο που απορροφάται απομακρύνεται από την αρχική δέσμη, η οποία πέφτει επάνω στην φωτογραφική πλάκα. Η φωτογραφική πλάκα είναι τοποθετημένη σε συγκεκριμένη θέση και διεύθυνση (γωνία ως προς την αρχική δέσμη, συνήθως 90°). Το φωτόνιο, το οποίο εκπέμπεται μετά από χρόνο της τάξεως των 10^{-6}sec , έχει ίσες πιθανότητες να εκπεμφθεί προς όλες τις διευθύνσεις (ισοτροπική εκπομπή). Η πιθανότητα λοιπόν να εκπεμφθεί προς την ίδια κατεύθυνση με την αρχική δέσμη είναι εξαιρετικά περιορισμένη. Έτσι το πλήθος των φωτονίων (και κατά συνέπεια η ένταση) της συγκεκριμένης συχνότητας είναι εξαιρετικά μικρό (σχεδόν μηδενικό σε σχέση με το πλήθος της αρχικής δέσμης).

8.3

Επειδή ο φαινόμενος ατομικός αριθμός $Z_\varphi(n)$ είναι εν γένει διαφορετικός από τον $Z_\varphi(m)$, θα έχουμε διαφορετικές σταθερές R στην αρχική και τελική κατάσταση. Μπορούμε να κρατήσουμε την ίδια σταθερά και να εισαγάγουμε την διαφορά στους ακεραίους n, m μέσα από τις παραμέτρους a και b .

8.4

Γιατί, απλούστατα το φάσμα το λαμβάνουμε μέσα σε μια καθορισμένη (από τα όργανα) περιοχή ενέργειας ή μήκους κύματος, που μας ενδιαφέρει. Οι «άλλες γραμμές» βρίσκονται έξω από την περιοχή ενδιαφέροντος.

Κεφάλαιο 9. Κβαντική Θεωρία της ύλης.**Εισαγωγή**

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μπήκαν τα θεμέλια της Κβαντικής θεωρίας της ύλης με το ατομικό πρότυπο του Bohr. Σ' αυτό το κεφάλαιο θα εμπλουτίσουμε με νέες ιδέες, θα γενικεύσουμε και θα επεκτείνουμε την Κβαντική θεωρία της ύλης σε ένα μεγαλύτερο πλήθος από υλικά συστήματα. Παράλληλα, πέρα από τις πειραματικές επαληθεύσεις, αρχίζει να διαφαίνεται ένας πυρήνας αλληλοσυσχετιζόμενων και αλληλοσυμπληρούμενων εννοιών, οι οποίες βελτιώνουν την συνέπεια και αυτοσυνέπεια της θεωρίας. Οι νέες ιδέες που θα αναπτύξουμε περιλαμβάνουν τους κανόνες κβάντωσης Wilson-Sommerfeld, τα υλικά κύματα του de Broglie και την αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg. Μ' αυτό τον τρόπο, προετοιμάζουμε τον δρόμο για την τελική (μη Σχετικιστική) Κβαντική θεωρία των υλικών συστημάτων, η οποία θα αναπτυχθεί στο δεύτερο τόμο της «Κβαντικής Φυσικής».

Στην περιγραφή των υλικών συστημάτων που θα ακολουθήσουμε κυρίαρχο ρόλο έχει η **ενέργεια** (κινητική και δυναμική) του συστήματος και όχι η **δύναμη** (ή οι δυνάμεις) που επιδρούν στα σωματίδια του υλικού συστήματος.

Τα θεμελιώδη υλικά συστήματα που θα εξετάσουμε εδώ, εφαρμόζοντας τις νέες ιδέες, είναι :

α) Ένα σωματίο σ' ένα «απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού». Το εξιδανικευμένο αυτό σύστημα αποτελείται από ένα σωματίο μάζας m , μέσα σ' ένα δυναμικό το οποίο είναι μηδέν σε μια περιοχή μήκους L και άπειρο οπουδήποτε αλλού. Έτσι το σωματίο είναι εγκλωβισμένο μέσα σ' αυτή την περιοχή. Επειδή το πλησιέστερο πραγματικό σύστημα, το οποίο ταιριάζει σ' αυτή την περιγραφή είναι ένα σωματίο μέσα σ' ένα κουτί (δοχείο) με αδιαπέραστα τοιχώματα, το σύστημα αυτό είναι γνωστό και σαν « **σωμάτιο σε κουτί** ».

β) Ο αρμονικός ταλαντωτής, ο οποίος αποτελείται από ένα σωματίο μάζας m , το οποίο υφίσταται μια ελαστική δύναμη F της μορφής $F = -Dx$, όπου D μια σταθερά ελατηρίου (δηλαδή ένα σωματίο συνδεδεμένο με ένα ελατήριο του οποίου η σταθερά είναι D).

Στην «ενεργειακή γλώσσα» ο αρμονικός ταλαντωτής ορίζεται σαν ένα σωματίο μάζας m , το οποίο βρίσκεται μέσα σ' ένα δυναμικό, με δυναμική ενέργεια $V(x) = \frac{1}{2}Dx^2$.

&γ) το άτομο του υδρογόνου καθώς και μερικά άλλα πιο σύνθετα άτομα. Στο άτομο του υδρογόνου η δυναμική ενέργεια έχει την μορφή $V(r) = -k \frac{e^2}{r}$, όπου k είναι μια σταθερά που εξαρτάται από το σύστημα μονάδων, e το φορτίο του ηλεκτρονίου και r η απόσταση του από τον πυρήνα (δηλαδή το πρωτόνιο).

Στόχος μας είναι να εξετάσουμε κάθε ένα από τα τρία πρότυπα αυτά συστήματα με όσες το δυνατόν περισσότερες θεωρητικές τεχνικές.

Τι μπορείτε να προσπεράσετε σε πρώτη ανάγνωση:

Το υποκεφάλαιο 9.1

9.1 Παραπέρα επεκτάσεις και γενικεύσεις της Κβαντικής θεωρίας του Bohr

9.1.1 Κανόνες Κβαντώσεως Wilson και Sommerfeld

Η μεγάλη επιτυχία της κβαντικής θεωρίας του Bohr, παρά τις αυθαίρετες παραδοχές που περιείχε, οδήγησε και άλλους θεωρητικούς φυσικούς της εποχής να επιδιώξουν παραπέρα βελτιώσεις και επεκτάσεις της Κβαντικής θεωρίας. Αφετηρία για τέτοιες επεκτάσεις αποτέλεσε η κβάντωση της στροφορμής (σχέση 8.9) που, όπως είδαμε, μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν αφετηρία και για την κβαντική περιγραφή του ατόμου του υδρογόνου.

Οι Wilson και Sommerfeld το 1916 επεξεύειναν την κβάντωση της στροφορμής για τις κλειστές περιοδικές τροχιές του ηλεκτρονίου στο άτομο του Bohr στην γενικότερη περίπτωση οποιουδήποτε φυσικού συστήματος του οποίου οι συντεταγμένες είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου. Οδήγησαν, μ' αυτό τον τρόπο την παλαιά κβαντική θεωρία σε μεγαλύτερης εμβέλειας εφαρμογές. Ταυτόχρονα ενοποίησαν την κβάντωση της στροφορμής του Bohr για τα άτομα, με την κβάντωση της ενέργειας των ταλαντωτών του Planck, που είδαμε στο υποκεφάλαιο 9.3.

Οι κανόνες Wilson-Sommerfeld μπορούν να διατυπωθούν ως εξής:

Για κάθε φυσικό σύστημα του οποίου οι συντεταγμένες είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου, υπάρχει μία συνθήκη Κβάντωσης για κάθε μία από τις συντεταγμένες αυτές. Η συνθήκη κβάντωσης που αντιστοιχεί στην συντεταγμένη q είναι:

$$\oint p_q dq = n_q h, \quad n_q = 1, 2, \dots \quad (9.1).$$

Στην παραπάνω σχέση το σύμβολο \oint σημαίνει ολοκλήρωση πάνω σε μια περίοδο της συντεταγμένης q , ενώ p_q είναι η (γενικευμένη) ορμή που αντιστοιχεί στην συντεταγμένη q (π.χ για την συντεταγμένη x η αντίστοιχη ορμή είναι p_x , για την συντεταγμένη y η αντίστοιχη ορμή είναι p_y). Ο αριθμός n_q είναι ένας κβαντικός αριθμός που παίρνει ακέραιες τιμές.

Σαν παραδείγματα τέτοιων συζυγών (όπως λέγονται) ζευγαριών q και p_q μπορούν να χρησιμεύσουν (εκτός από τις καρτεσιανές συντεταγμένες x, y, z με συζυγείς ορμές p_x, p_y, p_z) και οι γωνίες φ, θ (σε σφαιρικές συντεταγμένες) με αντίστοιχες συζυγείς ορμές τις στροφορμές L_φ, L_θ . Είναι εύκολο να φανεί ότι η συνθήκη 9.1 περιλαμβάνει την συνθήκη κβάντωσης της στροφορμής (8.9). Πράγματι! Για το μοντέλο του Bohr, η (9.1) για την γωνία ϑ γράφεται:

$$\int_0^{2\pi} L_\vartheta d\vartheta = 2\pi L_\vartheta = n_\vartheta h, \quad (9.2)$$

απ' όπου παραλείποντας τον δείκτη ϑ , παίρνουμε ξανά την συνθήκη:

$$L = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar \quad (9.3),$$

η οποία είναι ταυτόσημη με την (8.9).

Άλλο παράδειγμα εφαρμογής της συνθήκης Wilson-Sommerfeld αποτελεί ο μονοδιάστατος αρμονικός ταλαντωτής

Παράδειγμα 9.1 Βρείτε την συνθήκη κβάντωσης της ενέργειας ενός αρμονικού ταλαντωτή χρησιμοποιώντας τις συνθήκες Wilson-Sommerfeld.

Απάντηση

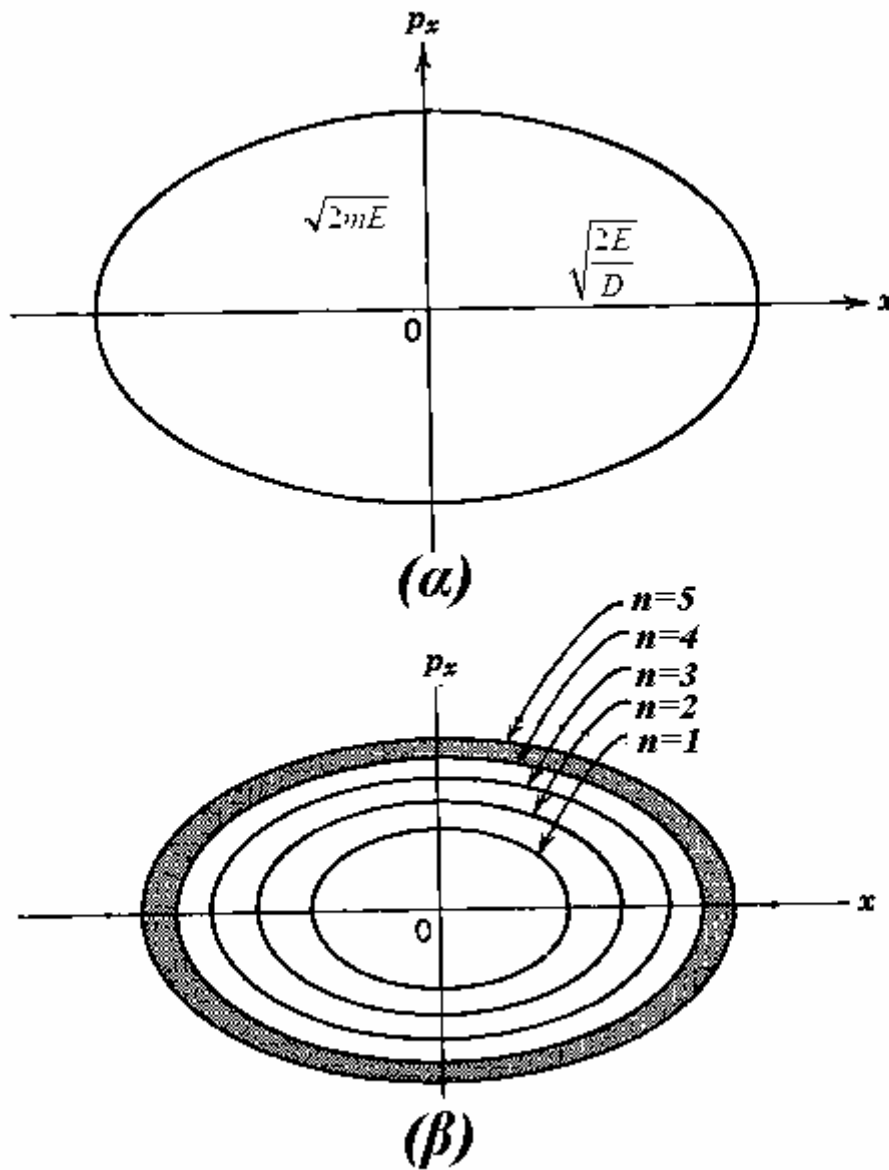
Μέσα σε μια πλήρη περίοδο ο ταλαντωτής έχει διαγράψει 4 φορές την απόσταση από το ελάχιστο $x_{\min}=0$ στο μέγιστο πλάτος ταλάντωσης x_{\max} . Κάθε μια φορά η στοιχειώδης απομάκρυνση dx και η αντίστοιχη συζυγής ορμή p_x είναι ομόσημες. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε την συνθήκη (9.1) ως εξής:

$$\oint p_x dx = 4 \int_0^{x_{\max}} p_x dx = nh \quad (9.4).$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος στη (9.4) χρειάζεται η εξάρτηση της ορμής p_x από την συντεταγμένη x , η οποία προκύπτει έμμεσα εισάγοντας την σταθερή ενέργεια, E , του συστήματος:

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{Dx^2}{2} \quad (9.5)$$

όπου D είναι η «σταθερά ελατηρίου» του αρμονικού ταλαντωτή και δίνεται σαν συνάρτηση της ιδιοσυχνότητας ν από τη γνωστή σχέση:



Σχήμα 9.1

Η ορμή p_x σαν συνάρτηση της θέσης x , για σταθερή ενέργεια E , ενός Αρμονικού Ταλαντωτή με σταθερά ελατηρίου D .

Οι τροχιές στον «χώρο των φάσεων» (x, p_x) για σταθερή ενέργεια E είναι ελλείψεις με μεγάλο άξονα $a = \sqrt{\frac{2E}{D}}$ και μικρό άξονα $b = \sqrt{2mE}$, (α). Για διαφορετικές τιμές του ακεραίου n ο ταλαντωτής διαγράφει στον «χώρο των φάσεων» διαφορετικές ελλείψεις. Το

σκιασμένο εμβαδόν μεταξύ δύο διαδοχικών ελλείψεων είναι ίσο με την σταθερά του Planck h , (β).

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (9.6).$$

Η ορμή p_x βρίσκεται από την (9.5):

$$p_x = \sqrt{2m \left(E - \frac{Dx^2}{2} \right)} \quad (9.7).$$

Εάν σχεδιάσουμε την ορμή p_x σαν συνάρτηση της θέσης x , βλέπουμε στο σχήμα 9.1 ότι η τροχιά είναι μια έλλειψη με μήκος μεγάλου άξονα ίσο προς

$$\sqrt{\frac{2E}{D}} \quad \text{και μήκος μικρού άξονα ίσο προς } \sqrt{2mE}.$$

Αυτό άλλωστε φαίνεται αναλυτικά από την (9.5), η οποία γράφεται στη μορφή:

$$\frac{p_x^2}{2mE} + \frac{Dx^2}{2E} = 1 \quad (9.8).$$

Η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση έλλειψης με μεγάλο άξονα $a = \sqrt{\frac{2E}{D}}$, και μικρό άξονα $b = \sqrt{2mE}$. Μπορούμε λοιπόν να εκμεταλλευτούμε το γεγονός αυτό για να αποφύγουμε τον απ' ευθείας υπολογισμό του ολοκληρώματος (9.4) με χρήση της (9.7). Θα χρησιμοποιήσουμε ένα έμμεσο τρόπο βασιζόμενοι στην γεωμετρική ερμηνεία του ολοκληρώματος (9.1), το οποίο είναι το εμβαδόν που περικλείει η κλειστή καμπύλη της τροχιάς στον χώρο των φάσεων. Στην προκειμένη περίπτωση, όπως είδαμε από τη σχέση στο σχήμα 9.1 και τη σχέση (9.8), η τροχιά είναι μία έλλειψη. Το εμβαδόν μιας έλλειψης

$$\text{με μεγάλο άξονα } a = \sqrt{\frac{2E}{D}}, \text{ και μικρό άξονα } b = \sqrt{2mE} \text{ είναι ίσο } \pi ab = \pi \sqrt{\frac{4mE^2}{D}}.$$

$$\text{Κατά συνέπεια: } \oint p_x dx = 2\pi E \sqrt{\frac{m}{D}} = \frac{E}{v} \quad (9.9).$$

Οπότε η συνθήκη κβαντώσεως (9.4) για τον αρμονικό ταλαντωτή γράφεται:

$$\underline{E = nh\nu} \quad \underline{n=1,2,\dots} \quad (9.10).$$

Η σχέση αυτή είναι ταυτόσημη με την συνθήκη κβαντώσεως του Planck (3.82) που είδαμε στο κεφάλαιο 3.

Βλέπουμε ότι για διαφορετικές τιμές του ακεραίου n ο ταλαντωτής διαγράφει στον «χώρο των φάσεων» διαφορετικές ελλείψεις. Το εμβαδόν μεταξύ δύο διαδοχικών ελλείψεων είναι ίσο με την σταθερά του Planck h .

Παράδειγμα 9.2 Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες Wilson-Sommerfeld βρείτε την συνθήκη κβάντωσης της ενέργειας ενός σωματιδίου μάζας m , και σταθερής (κατά μέτρο) ορμής, p , που βρίσκεται περιορισμένο μέσα σ' ένα «κουτί» με αδιαπέραστα τοιχώματα σε απόσταση L μεταξύ τους, όπως στο σχήμα 9.2

Απάντηση

Θα θεωρήσουμε για απλότητα ότι έχουμε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα, οπότε το σωματίο είναι περιορισμένο σε μία περιοχή του χώρου από μηδέν μέχρι L , με ορμή p σταθερού μέτρου, και με δυναμική ενέργεια $V(x)$ που είναι ίση με μηδέν μέσα στο κουτί και ίση με $+\infty$ έξω από το κουτί. Η ενέργεια του σωματιδίου μέσα στο κουτί θα είναι:

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (9.11).$$

Προφανώς η κίνηση του σωματιδίου σ' αυτή την περίπτωση θα είναι μία ομαλή κίνηση προς τα τοιχώματα του δοχείου, στα οποία θα ανακλάται ελαστικά και θα συνεχίζει προς την αντίθετη κατεύθυνση. Έτσι το σωματίο «πηγαиноέρχεται» αριστερά-δεξιά με σταθερή ορμή και θα καλύπτει απόσταση ίση με $2L$ μέσα σε μια περίοδο. Άρα:

$$\oint p dx = p \oint dx = p(2L) \quad (9.12).$$

Η συνθήκη κβάντωσης 9.1, τώρα γράφεται:

$$2 \cdot L \cdot p = nh, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.13)$$

και

$$p = \frac{h}{2L} \cdot n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.14)$$

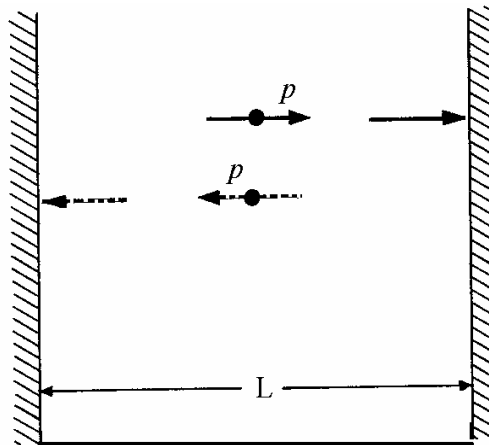
Η σχέση (9.14) δείχνει κβάντωση της ορμής p και μέσω της (9.11) την κβάντωση της ενέργειας:

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} \cdot n^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.15).$$

Την σχέση (9.15) και το υποθετικό παράδειγμα του σωματίου στο «κουτί» με τα αδιαπέραστα τοιχώματα, το οποίο αποτελεί μία αρχική προσέγγιση για αρκετά προβλήματα και εκτιμήσεις τάξης μεγέθους θα το ξανασυναντήσουμε κι άλλες φορές και θα το ξανασυζητήσουμε πιο διεξοδικά αργότερα.

9.1.2 Το μοντέλο του Sommerfeld για το άτομο του υδρογόνου.

Μία πάρα πολύ σημαντική (και τελευταία για αυτές τις σημειώσεις) εφαρμογή των κανόνων κβάντωσης (9.1) έκανε ο ίδιος ο Sommerfeld για το άτομο του υδρογόνου, στο οποίο τώρα δέχθηκε ελλειπτικές τροχιές, γενικεύοντας και εγκαταλείποντας τον περιορισμό των κυκλικών τροχιών του Bohr.



Σχήμα 9.2

Σωματίο (ορμής p) μέσα σε κιβώτιο εύρους L με αδιαπέραστα τοιχώματα.

Το σωματίο κινείται με σταθερή ορμή ανάμεσα στα τοιχώματα, με τα οποία συγκρούεται ελαστικά και αλλάζει διεύθυνση κινήσεως.

Η απόσταση του ηλεκτρονίου από τον πυρήνα δεν είναι πλέον σταθερή. Η θέση του ηλεκτρονίου περιγράφεται τώρα από τις πολικές συντεταγμένες r και θ . **Οι συνθήκες κβάντωσης για το ατομικό μοντέλο του Sommerfeld είναι:**

$$\oint L d\theta = n_\theta h \quad (9.16)$$

$$\oint p_r dr = n_r h \quad (9.17)$$

Η πρώτη συνθήκη ως γνωστόν δίνει την κβάντωση της στροφορμής του Bohr

$$L = n_\theta \hbar \quad , \quad n_\theta = 1, 2, 3, \dots \quad (8.9),$$

ενώ η δεύτερη εισάγει τον κβαντικό αριθμό n_r που χαρακτηρίζει την ακτινική ορμή p_r .

Ο Sommerfeld έδειξε ότι, εάν a και b είναι αντίστοιχα ο μεγάλος και ο μικρός ημιάξονας της ελλείψεως, η δεύτερη συνθήκη (9.17) γράφεται:

$$L \left(\frac{a}{b} - 1 \right) = n_r \hbar \quad , \quad n_r = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (9.18).$$

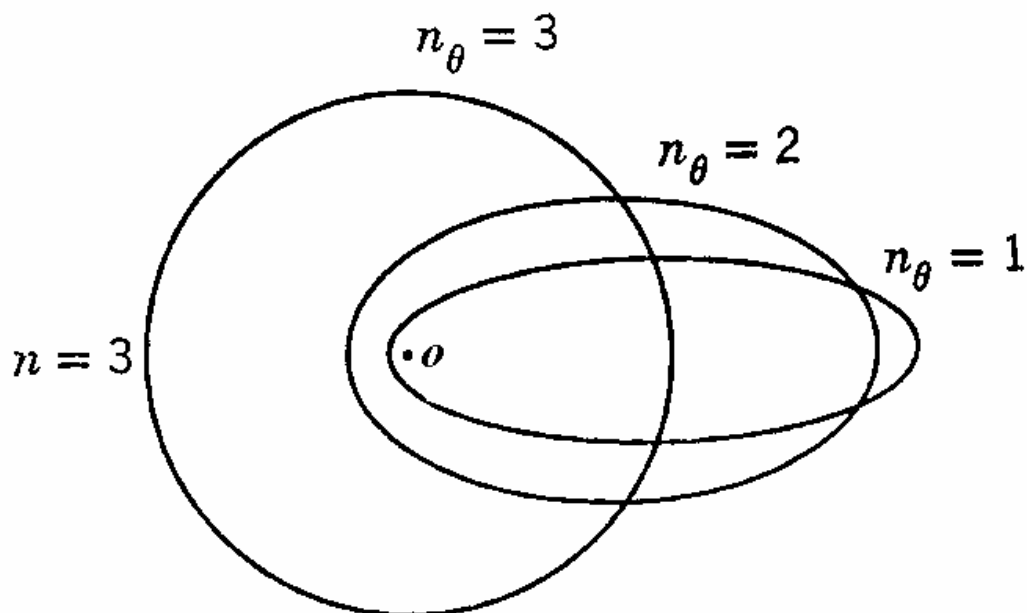
Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες (8.9) και (9.18) μαζί με την συνθήκη ισορροπίας (κεντρομόλος = δύναμη Coulomb) ο Sommerfeld βρήκε την έκφραση για τους ημιάξονες a και b της τροχιάς καθώς και την ενέργεια E (τρεις σχέσεις, τρεις άγνωστοι). Τα αποτελέσματα (με τον συνηθισμένο συμβολισμό) είναι:

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2(n_r + n_\theta)^2}{mZe^2}, \quad b = a \frac{n_\theta}{(n_r + n_\theta)} \quad (9.19),$$

$$E = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{mZ^2e^4}{2(n_r + n_\theta)^2\hbar^2} \quad (9.20).$$

Θέτοντας $n \equiv (n_r + n_\theta)$, η ενέργεια παίρνει την μορφή και τις τιμές του μοντέλου Bohr. Για κάθε μία από τις τιμές του κβαντικού αριθμού n , ο οποίος καθορίζει την ενέργεια και τον μεγάλο ημιάξονα της τροχιάς, ο κβαντικός αριθμός n_θ , ο οποίος καθορίζει τον μικρό ημιάξονα της έλλειψης παίρνει τις τιμές $n_\theta = 1, 2, \dots, n$. Οι τρεις διαφορετικές τροχιές για $n = 3$ φαίνονται στο σχήμα 9.3.

Ο αριθμός n λέγεται **κύριος κβαντικός αριθμός**, ενώ ο αριθμός n_θ ονομάζεται **αξιμουθιακός κβαντικός αριθμός**. Η τροχιά που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη δυνατή τιμή του αξιμουθιακού κβαντικού αριθμού, για δοσμένη τιμή του κύριου κβαντικού αριθμού, είναι κύκλος.



Σχήμα 9.3

Οι τρεις διαφορετικές τροχιές του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου, σύμφωνα με το μοντέλο του Sommerfeld για $n=3$.

Και οι τρεις τροχιές έχουν την ίδια ενέργεια $E_3 = -13.6/9 \text{ eV}$ (εκφυλισμός).

Παρά την εισαγωγή δύο κβαντικών αριθμών n_θ και n_r , η ενέργεια του ατόμου του υδρογόνου εξακολουθεί να είναι «εκφυλισμένη» γιατί εξαρτάται μόνο από ένα κβαντικό αριθμό n , που είναι ίσος $n = n_\theta + n_r$. Το φαινόμενο αυτό, όπου διαφορετικές καταστάσεις (διαφορετικές τροχιές) έχουν την ίδια ενέργεια ονομάζεται **εκφυλισμός**. Το μοντέλο του Sommerfeld, αν και πολύ πλησιέστερο προς το πραγματικό κβαντικό μοντέλο, εντούτοις πάσχει σε γενικές γραμμές από τα ίδια περίπου εννοιολογικά προβλήματα. Περισσότερα για το ατομικό πρότυπο του Sommerfeld δεν θα συζητήσουμε εδώ.

Ασκήσεις

9.1 Ένα σώμα περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από ένα σταθερό άξονα. Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες Wilson-Sommerfeld δείξτε ότι η ενέργεια του είναι κβαντισμένη σύμφωνα με τη σχέση $E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{2I}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, όπου I η ροπή αδρανείας του σώματος ως προς τον άξονα.

9.2 Η ιδέα των υλικών κυμάτων του de Broglie

9.2.1 Περιγραφή της υπόθεσης των υλικών κυμάτων.

Στο κεφάλαιο 5 εξετάσαμε την διττή συμπεριφορά του φωτονίου ως σωματίο-κύμα με ένα εύλογο πιθανό ερώτημα να αιωρείται «εάν το φωτόνιο, το οποίο πιστεύαμε ότι είναι κύμα, παρουσιάζει σωματιδιακές ιδιότητες, γιατί να μη παρουσιάζουν κυματικές ιδιότητες τα συνηθισμένα σωματία, τα οποία πιστεύουμε ότι είναι σωματία;»

Το 1917, ο Louis de Broglie, βασισμένος σε ανάλογα επιχειρήματα συμμετρίας των φυσικών νόμων, πρότεινε, σε αντιστοιχία με τα σωματιδιακά χαρακτηριστικά των οπτικών κυμάτων, την κυματική φύση των υλικών σωμάτων. Έτσι ο γνωστός δυϊσμός σωματίου-κύματος για το φως, μπορεί και πρέπει, σύμφωνα με τον de Broglie, να επεκταθεί για οποιοδήποτε σωματίο. Τα χαρακτηριστικά του κύματος που «συνοδεύει» (εννοιολογικά τουλάχιστον) κάποιο σωματίο ο de Broglie τα προσδιόρισε, χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες σχέσεις για το φωτόνιο. Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 5, η ενέργεια E και η ορμή P ενός φωτονίου συνδέονται με τη σχέση

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} \quad (9.21)$$

Αντικαθιστώντας στην (9.21) την συχνότητα ν συναρτήσκει του μήκους κύματος λ παίρνουμε την σχέση

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (9.22)$$

Ξεκινώντας από τη σχέση (9.22) ο de Broglie έκανε την εξής υπόθεση- αξίωμα:

Για κάθε σωματίο μάζας m και ταχύτητας v (ορμή $p=mv$) αντιστοιχεί ένα κύμα, ονομαζόμενο «υλικό κύμα» του οποίου το μήκος κύματος λ δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p} \quad (9.23).$$

Η σχέση (9.22) συνδέει ένα καθαρά κυματικό χαρακτηριστικό (λ), στο αριστερό μέλος, με καθαρά σωματιδιακά χαρακτηριστικά (m, p) στο δεξί. Η φύση των υλικών σωμάτων, η οποία δεν είναι ηλεκτρομαγνητικού χαρακτήρα (όπως προς στιγμή μπορούσε να νομισθεί) παραμένει προς το παρόν αδιευκρίνιστη. Ο de Broglie θεώρησε πως τα υλικά κύματα συνοδεύουν τα σωματίδια και τα καθοδηγούν (πιλοτάρουν) στην κίνησή τους γι' αυτό και ονομάστηκαν και «*πιλοτικά κύματα*» (pilot waves). Παρόλο ότι η ακριβής φύση αυτών των κυμάτων είναι ακόμη αδιευκρίνιστη, μπορούμε να πάρουμε μια φυσική αίσθηση για τις ιδιότητες και την χρήση τους μέσα από μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα και εφαρμογές.

Παράδειγμα 9.3 Βρείτε το μήκος κύματος ενός ηλεκτρονίου το οποίο επιταχύνεται (από την ηρεμία) ανάμεσα σε δύο σημεία ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου των οποίων η διαφορά δυναμικού είναι $V=100$ Volts

Απάντηση

Ας θεωρήσουμε για απλότητα ότι η ταχύτητα του ηλεκτρονίου δεν είναι πολύ μεγάλη, οπότε δεν χρειάζεται να καταφύγουμε στην θεωρία της Σχετικότητας και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την κλασική σχέση για την κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου. Βέβαια, αν το αποτέλεσμα δείξει ότι η ταχύτητα του ηλεκτρονίου δεν είναι αμελητέα σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός στο κενό, θα πρέπει να αναθεωρήσουμε τους υπολογισμούς μας και να τους επαναλάβουμε σχετικιστικά.

Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα της κινητικής ενέργειας, η τελική ταχύτητα v του ηλεκτρονίου θα δίνεται από τη σχέση $\frac{1}{2}mv^2 = q_e V$ (9.24),

όπου $q_e = e = 1.6 \times 10^{-19}$ Coulomb, το φορτίο του ηλεκτρονίου και $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg η μάζα του. Προφανώς, η αριθμητική τιμή της ενέργειας του ηλεκτρονίου σε ηλεκτρονιοβόλτ

(eV) είναι ίση με την τιμή της διαφοράς δυναμικού (της ηλεκτρικής τάσης) που το επιτάχυνε, δηλαδή 100 eV. Από την (9.24) βρίσκουμε την ταχύτητα v του ηλεκτρονίου:

$$v = \sqrt{\frac{2q_e V}{m}} \quad (9.25) \quad , \quad v = 5.9 \times 10^6 \text{ m/sec} .$$

Η ταχύτητα αυτή είναι κατά δύο περίπου τάξεις μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός στο κενό, ώστε να μη χρειάζεται να αναθεωρήσουμε τον υπολογισμό μας λόγω Σχετικότητας.

Οπότε, το μήκος κύματος από την (9.23) προκύπτει ίσο προς :

$$\lambda = \frac{6.6 \times 10^{-34} \text{ Joule sec}}{(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})(5.9 \times 10^6 \text{ m/sec})} = 1.2 \times 10^{-10} \text{ m} .$$

Το μήκος αυτό είναι αρκετά μικρό, της ίδιας τάξεως μεγέθους με την διάμετρο των ατόμων ή με την ενδοατομική απόσταση σε ένα κρυσταλλικό στερεό, αλλά δεν αποκλείεται να υπάρχουν τρόποι να το παρατηρήσουμε. Αρκεί να μπορούμε να παρεμβάλουμε στο δρόμο των κυμάτων «εμπόδια» με συγκρίσιμες διαστάσεις ή μεγαλύτερα εμπόδια με σχισμές ή οπές της ίδιας περίπου τάξης μεγέθους (με το μήκος κύματος), ώστε να παρατηρήσουμε φαινόμενα συμβολής ή /και περίθλασης.

Όμως γεννάται η εύλογη ερώτηση:

Ερώτηση 9.1 Τι γίνεται με τα υλικά κύματα μακροσκοπικών σωμάτων και αντικειμένων με τα οποία είμαστε εξοικειωμένοι; Υπάρχουν τρόποι να τα παρατηρήσουμε; Γιατί δεν τα έχουμε δει μέχρι τώρα;

Αντί για απάντηση δείτε το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 9.4 Βρείτε το μήκος κύματος de Broglie ενός αυτοκινήτου μάζας ενός τόνου (1000 kg) το οποίο κινείται με μεγάλη ταχύτητα 100 m/sec.

Απάντηση (στο παράδειγμα και στην ερώτηση)

Χρησιμοποιώντας την σχέση de Broglie (9.23) βρίσκουμε:

$$\lambda = \frac{6.6 \times 10^{-34} \text{ Joule sec}}{(10^3 \text{ kg})(10^2 \text{ m/sec})} = 6.6 \times 10^{-39} \text{ m} .$$

Αυτό είναι ένα απίστευτα μικρό μήκος κύματος, το οποίο δεν υπάρχει κανένας τρόπος ή δυνατότητα να μετρήσουμε ή παρατηρήσουμε. Αυτό είναι ένα γενικό χαρακτηριστικό για όλα τα μακροσκοπικά αντικείμενα. Όσο και να μικρύνουμε την μάζα ή/και την ταχύτητα για να μεγαλώσουμε την τιμή του κλάσματος, το αποτέλεσμα παραμένει το ίδιο (π.χ θέτοντας $m=10^{-3} \text{ kg}$ και $v=10^{-3} \text{ m/sec}$ βρίσκουμε $\lambda= 10^{-28} \text{ m}$). Όταν οι διαστάσεις των ατόμων είναι της τάξεως των 10^{-10} m , πως μπορούμε να βρούμε εμπόδια, ή «οπές» σε

εμπόδια, της τάξεως των 10^{-39} m ή των 10^{-28} m ώστε να παρατηρήσουμε κυματικά φαινόμενα περίθλασης ή συμβολής;

Μόνο σε μικροσκοπικά σωμάτια, όπου η μάζα στον παρανομαστή είναι εξαιρετικά μικρή, έχουμε πιθανότητα να παρατηρήσουμε τέτοιου είδους φαινόμενα.

Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι η μη σχετικιστική σχέση (9.24), είναι μια ειδική περίπτωση

$$\text{της γενικότερης σχέσης } \frac{p^2}{2m} + V = E \text{ ή } p = \sqrt{2m(E - V)} \quad (9.26),$$

η οποία περιλαμβάνει και την δυναμική ενέργεια V . Σ' αυτή την περίπτωση το μήκος κύματος de Broglie (για μη σχετικιστικά σωμάτια) γράφεται:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(E - V)}} \quad (9.27).$$

Η αντίστοιχη σχετικιστική σχέση για ένα σωμάτιο με μάζα ηρεμίας m_0 και κινητική ενέργεια E_k γράφεται (βλέπε άσκηση 9.4):

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{E_k(E_k + 2m_0c^2)}} \quad (9.28).$$

Εάν τα μήκη κύματος τα μετράμε σε Å και τις ενέργειες σε eV , η σχέση (9.28) παίρνει

$$\text{την μορφή: } \lambda = \frac{12400 eV\text{Å}^2}{\sqrt{E_k(E_k + 2m_0c^2)}} \quad (9.29).$$

Είναι εύκολο να δούμε (άσκηση 9.4) ότι για το φωτόνιο η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με την (5.4).

9.2.2 Εφαρμογή της υπόθεσης των υλικών κυμάτων στο άτομο του υδρογόνου

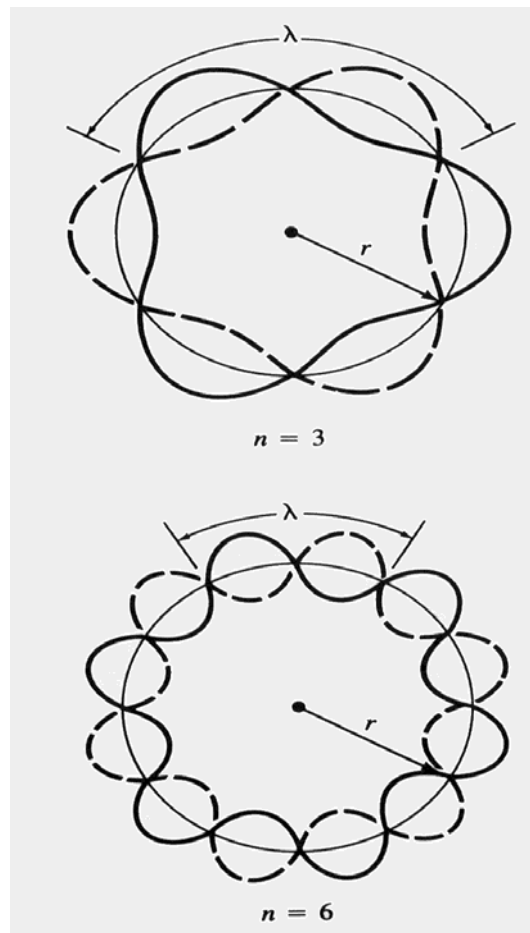
Η πρώτη μεγάλη επιτυχία της ιδέας των υλικών κυμάτων, πολύ πριν την πειραματική της επιβεβαίωση, ήταν η επεξήγηση των στάσιμων, αλλά αυθαίρετων κατά τα άλλα, καταστάσεων, του ατομικού μοντέλου του Bohr. Καθώς είδαμε στο υποκεφάλαιο 8.1 οι κβαντισμένες κυκλικές τροχιές του Bohr και οι «στάσιμες καταστάσεις» στις οποίες αντιστοιχούν, συνδέονται άμεσα και προκύπτουν από τη συνθήκη κβάντωσης της στροφορμής. Εάν δεχθούμε, ότι οι στάσιμες καταστάσεις συνδέονται με στάσιμα υλικά κύματα του ηλεκτρονίου στην τροχιά του, σε τρόπο ώστε ακέραιος αριθμός μηκών κύματος να «χωράει ακριβώς στην περίμετρο της τροχιάς, όπως φαίνεται στο σχήμα (9.4) τότε αβίαστα προκύπτει η κβάντωση της στροφορμής και η επιβεβαίωση της σταθερότητας της τροχιάς. Η απαίτηση αυτή γράφεται:

$$n\lambda = 2\pi r_n \quad (9.30),$$

και λόγω της (9.23):

$$n \frac{h}{m v_n} = 2\pi r_n, \quad (9.31).$$

Απλή διευθέτηση των όρων στην (9.31), δίνει αμέσως την συνθήκη κβάντωσης της στροφορμής (8.9). Βλέπουμε λοιπόν πως οι στάσιμες τροχιές του Bohr μπορούν να ερμηνευθούν σαν στάσιμα υλικά κύματα του ηλεκτρονίου, περιφοράς. *Από όλες τις δυνατές τροχιές, αυτές που επιτρέπονται είναι αυτές που επιζούν της καταστροφικής συμβολής, επειδή τα υλικά τους κύματα συμβάλλουν ενισχυτικά, σύμφωνα με την (9.30).*



Σχήμα 9.4

Μονοδιάστατη αναπαράσταση των στασίμων υλικών κυμάτων του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου.

Φαίνονται τα κύματα του ηλεκτρονίου στις τροχιές του Bohr με $n=3$ και $n=6$, σύμφωνα με τη σχέση (9.30).

Με το ίδιο σκεπτικό μπορεί να γίνει κατανοητό γιατί τα ατομικά ηλεκτρόνια δεν ακτινοβολούν και δεν χάνουν ενέργεια στις στάσιμες καταστάσεις και ως εκ τούτου τα άτομα είναι σταθερά. Λογικό είναι βέβαια μετά από αυτή τη συζήτηση να γεννηθεί η εύλογη εντύπωση, ότι παρουσιάζουμε την εξήγηση μίας «αυθαίρετης» υπόθεσης, εισάγοντας μία άλλη εξ ίσου αυθαίρετη υπόθεση. Η αλήθεια είναι πως, παρ' όλη την αισθητική κομψότητα και αρτιότητα της, η υπόθεση των υλικών κυμάτων θα μπορούσε να χαρακτηριστεί αυθαίρετη, αλλά σε κάποιο άλλο γενικότερο επίπεδο. Ανεξάρτητα απ' αυτό, η εξήγηση της σταθερότητας των στάσιμων καταστάσεων που εκφράζει η (9.30) είναι πολύ ελκυστική. Η εξήγηση αυτή όμως, δεν είναι και τόσο απλή υπόθεση όσο αφέθηκε να νομισθεί, επειδή αγνοεί τον τρισδιάστατο χαρακτήρα του προβλήματος. Παρ' όλα αυτά η υπόθεση των υλικών κυμάτων είχε τεράστια επιτυχία και υπήρξε πάρα πολύ γόνιμη σε θεμελιακή σχέση με την αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg, όπως θα δούμε παρακάτω. Από μια άποψη, το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου (με εξαίρεση ίσως, την ενότητα για την ερμηνεία και τη φύση των υλικών κυμάτων) δεν είναι άλλο από απλή σύζευξη του αξιώματος του de Broglie με γνωστά χαρακτηριστικά κυματικά φαινόμενα και γενικές ιδιότητες των κυμάτων. Τέλος, όσο αφορά το αυθαίρετο αυτής της υπόθεσης καθώς και οποιασδήποτε άλλης επιστημονικής υπόθεσης, θα πρέπει να επισημάνουμε τέτοιου είδους χαρακτηρισμοί είναι πολύ σχετικοί και ασαφείς, επειδή κυρίως εξαρτώνται από παραστάσεις που έχουμε από την άμεση εμπειρία μας⁸⁹. Αυτές οι «μακροσκοπικές» παραστάσεις δεν έχουν πάντοτε αντίστοιχο ανάλογο στο μικρόκοσμο. Έτσι, μέχρι να εδραιωθεί επιστημονικά μία υπόθεση (στην προκειμένη περίπτωση η υπόθεση των υλικών κυμάτων) θα ήταν ίσως πιο ασφαλές να χρησιμοποιηθεί το ρήμα «συσχετίζει» αντί του ρήματος «εξηγεί». Σε τελική ανάλυση όμως, η εξήγηση ή η κατανόηση νέων εννοιών και φαινομένων δεν είναι τίποτα άλλο παρά ο συσχετισμός τους με άλλες έννοιες και φαινόμενα που είναι ή θεωρούνται γνωστά. Όμως, ανεξάρτητα και πάνω από όλα αυτά, δεν θα πρέπει να ξεχνάμε ότι ο τελικός κριτής μιας θεωρίας είναι το πείραμα. Πριν προχωρήσουμε στην πειραματική επαλήθευση της υπόθεσης του de Broglie στο εδάφιο 9.2.4, ας δούμε ένα ακόμα απλό παράδειγμα, το οποίο μας επιτρέπει να συγκρίνουμε με άλλες ανάλογες κβαντικές προβλέψεις.

⁸⁹ Για να μην αναφέρουμε ότι αργά ή γρήγορα όλες οι αυθαιρεσίες νομιμοποιούνται (όπως δείχνουν τα γεγονότα)

9.2.3 Εφαρμογή της υπόθεσης των υλικών κυμάτων για ένα σωματίο σε απειροβάθο πηγάδι δυναμικού

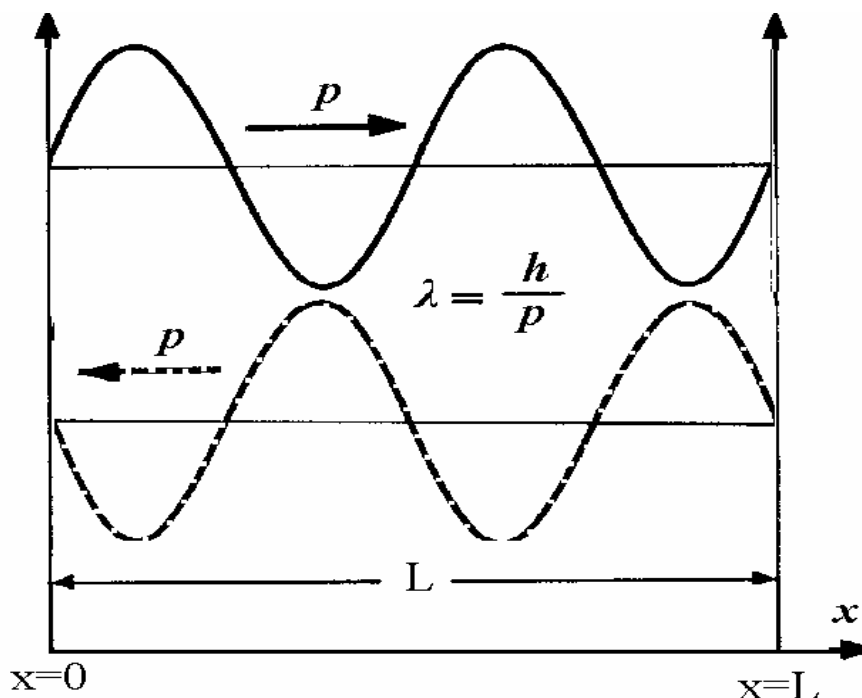
Ας θεωρήσουμε το γνωστό πρόβλημα του παραδείγματος 9.2, ενός σωματίου (μάζας m , ορμής p) μέσα σε ένα αδιαπέραστο «κουτί». Δηλαδή ενός σωματίου περιορισμένου μέσα σ' ένα «απειρόβαθο» μονοδιάστατο πηγάδι δυναμικού, όπως στο σχήμα 9.2. Επειδή το σωματίο δεν μπορεί να διαφύγει έξω από το πηγάδι, το οποίο έχει άπειρου ύψους τοιχώματα στις θέσεις $x=0$ και $x=L$, θα πρέπει το υλικό κύμα που το «συνοδεύει» να είναι ένα στάσιμο κύμα με κόμβους στις θέσεις $x=0$ και $x=L$. Αυτό μπορούμε να το δούμε και με άλλο τρόπο. Όπως βλέπουμε στο σχήμα 9.2 το σωματίο κινείται μια προς τα δεξιά και μια προς τα αριστερά, αφού ανακλαστεί στα τοιχώματα. Τα αντίστοιχα υλικά κύματα θα αποτελούνται από ένα κύμα, πλάτους A και μήκους κύματος $\lambda = \frac{h}{p}$,

κυματαριθμού $k = \frac{p}{\hbar}$ (9.32),

που οδεύει, έστω, κατά την θετική φορά του άξονα x , $y_1(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$,

και ένα ανακλώμενο κύμα του ίδιου πλάτους και μήκους κύματος, το οποίο οδεύει προς την αρνητική φορά του άξονα x : $y_2(x,t) = A \sin(kx + \omega t)$,

όπως φαίνεται στο σχήμα 9.5.



Σχήμα 9.5

Σχηματισμός στάσιμου υλικού κύματος σε ένα «απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού»

Το ανακλώμενο κύμα βρίσκεται σε διαφορά φάσεως 180° ως προς το προσπίπτον. Το σύνθετο κύμα σε κάθε θέση x και χρονική στιγμή t θα έχει τη μορφή:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\sin(kx-\omega t) + A\sin(kx+\omega t) \quad (9.33).$$

Χρησιμοποιώντας την γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα (ή οποία ανάγει άθροισμα ημιτόνων σε γινόμενο ημιτόνου του ημιαθροίσματος και συνημιτόνου της ημιδιαφοράς) βρίσκουμε:

$$y(x,t) = 2A\sin\left[\frac{1}{2}(2k)x - \frac{1}{2}(2\omega)t\right] \cos\left[\frac{1}{2}(k-k)x - \frac{1}{2}[\omega - (-\omega)]t\right],$$

$$\text{ή } y(x,t) = 2A\sin kx \cos \omega t \quad (9.34)$$

Η επαλληλία των δύο κυμάτων είναι ένα στάσιμο κύμα, το οποίο θα πρέπει να έχει κόμβους (να μηδενίζεται) στις θέσεις $x=0$ και $x=L$ για όλες τις χρονικές στιγμές t . Δηλαδή θα πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες:

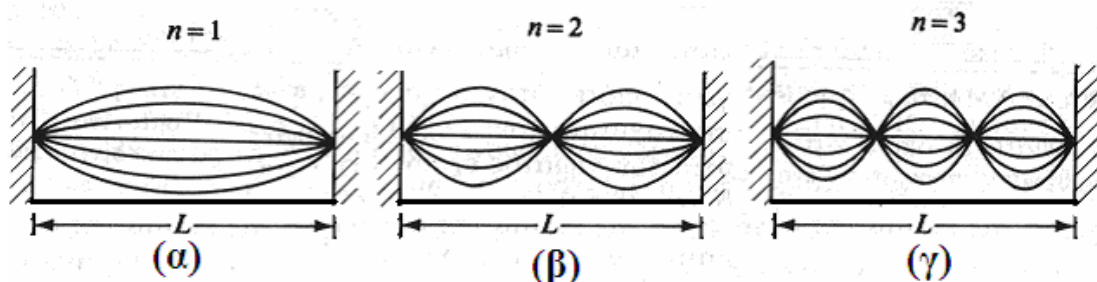
$$y(x=0,t)=0 \text{ και } y(x=L,t)=0 \quad (9.35).$$

Η πρώτη συνθήκη ικανοποιείται, αφού $A\sin(0)=0$. Η δεύτερη συνθήκη, εφόσον $A \neq 0$, απαιτεί $\sin(kL)=0$ ή $kL = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$ (9.36).

Στην παραπάνω σχέση αποφύγαμε την τιμή $n=0$, η οποία οδηγεί στην τετριμμένη λύση $k=0$, καθώς και τις αρνητικές τιμές, οι οποίες δεν προσθέτουν κάποια νέα πληροφορία για το μέτρο του k . Η απαίτηση (9.36) γράφεται:

$$k = \frac{\pi}{L}n \quad \text{ή} \quad n\frac{\lambda}{2} = L, \quad n=1, 2, \dots \quad (9.37).$$

Αυτό σημαίνει πως ένας ακέραιος πλήθος από μισά μήκη κύματος, $\lambda/2$, θα πρέπει να «χωράει ακριβώς» στο μήκος L , όπως φαίνεται στο σχήμα 9.6



Σχήμα 9.6

Στάσιμα υλικά κύματα σε μονοδιάστατο πηγάδι δυναμικού, εύρους L .

Στο σχήμα φαίνονται σε πολλαπλά στιγμιότυπα τα στάσιμα κύματα για:

$$n=1, \text{ με } 1 \times \frac{\lambda_1}{2} = L \text{ στο } (\alpha), \quad n=2, \text{ με } 2 \times \frac{\lambda_2}{2} = L \text{ στο } (\beta) \text{ και } n=3, \text{ με } 3 \times \frac{\lambda_3}{2} = L \text{ στο } (\gamma).$$

Όπως βλέπουμε υπάρχει μια πλήρης αναλογία μεταξύ των στασίμων υλικών κυμάτων του σωματίου μέσα στο απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού εύρους L και των κανονικών τρόπων ταλάντωσης μια χορδής μήκους L στερεωμένης σταθερά στα δύο άκρα της⁹⁰

Επειδή το πλάτος L του φρέατος δυναμικού είναι καθορισμένο, η σχέση (9.37) θέτει ένα περιορισμό στα δυνατά μήκη κύματος λ , και λόγω της (9.23) στις δυνατές ορμές (και κατά συνέπεια στις ενέργειες E) του σωματιδίου. Η συνθήκη (9.37) οδηγεί στη σχέση

$$p = \frac{h}{2L} \cdot n, \quad n=1,2,\dots \quad (9.38).$$

Αντικαθιστώντας στην (9.11), η οποία δίνει την (ολική = κινητική) ενέργεια του σωματιδίου μέσα στο «κουτί» βρίσκουμε:

$$E = \frac{h^2}{8mL^2} n^2, \quad n=1,2,\dots \quad (9.39).$$

Η σχέση αυτή είναι, όπως ήταν αναμενόμενο, ταυτόσημη με τη σχέση (9.15) που βρήκαμε νωρίτερα χρησιμοποιώντας τις συνθήκες κβάντωσης Sommerfeld-Wilson. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην σχέση (9.37), και κατά συνέπεια και στην (9.39), δεν έχει νόημα ο ακέραιος (κβαντικός) αριθμός n να πάρει την τιμή μηδέν, επειδή το αριστερό μέλος της (9.37) θα ήταν τότε μηδέν ενώ το δεξί ίσο προς L (που είναι διάφορο του μηδενός). Αυτό με την σειρά του σημαίνει πως **η ελάχιστη τιμή της ενέργειας του σωματιδίου δεν μπορεί να είναι ίση προς μηδέν**. Δεν έρχεται όμως αυτό σε αντίφαση με την εμπειρία μας; Μπορούμε να προσεγγίσουμε αυτό το σύστημα με κάποιο «Χειροπιαστό» παράδειγμα, ώστε να μπορούμε να κατανοήσουμε και ελέγξουμε τα συμπεράσματα και τις προβλέψεις της κβαντικής θεωρίας; Η απάντηση είναι καταφατική. Η φυσική ερμηνεία αυτού του φαινομένου θα φανεί καλύτερα στην επόμενη ενότητα (9.3), όπου θα συζητηθεί και πιο λεπτομερειακά.

Η σχέση (9.39) προβλέπει τόσο μεγαλύτερη ενέργεια, και κατά συνέπεια συχνότητα, όσο μεγαλύτερος είναι ο **εντοπισμός** του σωματιδίου – κύματος. Αυτό είναι ένα γενικότερο γνώρισμα των κλειστών εκτεταμένων μέσων, των οποίων οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης αντιστοιχούν σε στάσιμα κύματα. Μία φυσική ερμηνεία της (9.39), η οποία προβλέπει μικρότερες ενέργειες για μεγαλύτερα μήκη L προσφέρεται από την μουσική αναλογία μεταξύ της θεμελιώδους συχνότητας ενός βιολιού και μιας βιόλας ή ακόμη καλύτερα μεταξύ βιολιού και κόντρα μπάσου που έχουν διαφορετικά μήκη χορδών. Το

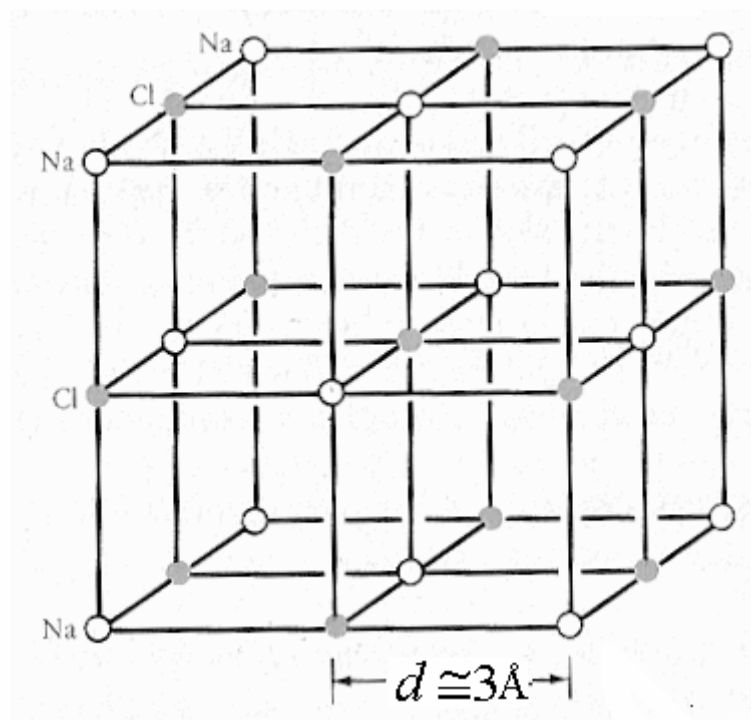
⁹⁰ Δείτε κεφάλαια 4 και 5 στο βιβλίο «Ταλαντώσεις και Κύματα» του Συγγραφέα.

κόντρα μπάσο το οποίο έχει μεγαλύτερο μήκος χορδών παράγει πολύ χαμηλότερες (μπάσες) συχνότητες. Η βαθύτερη σχέση, που συνδέει αυτά τα παραδείγματα είναι ότι η θεμελιώδης συχνότητα (ή ενέργεια) καθορίζεται από την συγκεκριμένη απόσταση, L , μεταξύ των δύο σταθερών κομβικών σημείων που εμπεριέχουν **οι οριακές συνθήκες** του προβλήματος, π.χ. σχέση (9.35) από την οποία προέρχεται η (9.37). Γενικά, οι οριακές συνθήκες καθορίζουν τις ιδιοκαταστάσεις και ιδιοσυχνότητες σε τέτοιου είδους προβλήματα Εδώ θα πρέπει απλά να υπενθυμίσουμε ότι οι οριακές συνθήκες δεν είναι τίποτα άλλο από μαθηματικές σχέσεις οι οποίες εκφράζουν (μαθηματικά) τις φυσικές απαιτήσεις που συνδέονται με τα συγκεκριμένα γεωμετρικά (και δυναμικά, χρονικά) χαρακτηριστικά κάθε προβλήματος. Αυτή η γενικότερη τοποθέτηση για τη σημασία των οριακών συνθηκών περιλαμβάνει και τη σχέση (9.30) η οποία οδηγεί στην κβάντωση της στροφορμής, στο ατομικό πρότυπο του Bohr. Ο ρόλος των οριακών συνθηκών θα εκτιμηθεί ακόμη περισσότερο σε επόμενα κεφάλαια όπου θα αναζητούμε συγκεκριμένες λύσεις της διαφορικής κυματικής εξίσωσης, η οποία διέπει τη συμπεριφορά των «υλικών κυμάτων». Στην περίπτωση κατά την οποία οι μαθηματικές συνθήκες εκφράζουν χρονικές απαιτήσεις, οι οποίες θα πρέπει να ισχύουν για τη χρονική στιγμή $t=0$ (ή γενικότερα $t=t_0$), οι συνθήκες αυτές ονομάζονται, ως γνωστόν, **αρχικές συνθήκες**.

9.2.4 Πειραματική επαλήθευση

Όπως είδαμε, αρχικά η ιδέα των υλικών κυμάτων ήταν μια απλή υπόθεση η οποία είχε θεωρητική (στην ερμηνεία των τροχιών του Bohr) και φιλοσοφική (συμμετρία δυϊσμού σωματιδίου κύματος) επιτυχία. Η υπόθεση του de Broglie όμως παρέμενε αυθαίρετη χωρίς την κατάλληλη πειραματική επιβεβαίωση. Ο ασφαλέστερος τρόπος για να επιβεβαιώσουμε την κυματική φύση των σωματιδίων είναι μέσα από τα χαρακτηριστικά πειράματα συμβολής και περίθλασης, τα οποία είναι καθοριστικά για οποιοδήποτε είδος κυμάτων. Είδαμε όμως ότι είναι αδύνατο να παρατηρήσουμε τέτοιου είδους πειράματα για μακροσκοπικά αντικείμενα, επειδή τα αντίστοιχα μήκη κύματος είναι εξαιρετικά μικρά, κατά πολύ μικρότερα από τις διαστάσεις των ατόμων. Ο Elsassner ήταν αυτός που πρώτος παρατήρησε και επέστησε την προσοχή των ερευνητών στο ότι ηλεκτρόνια με ενέργειες από 10 έως 1000 eV έχουν μήκη κύματος συγκρίσιμα με τις ενδοατομικές αποστάσεις σε κρυσταλλικά στερεά. Κατά συνέπεια, εάν τα ηλεκτρόνια έχουν πράγματι κυματικές ιδιότητες θα έπρεπε κατά την ανάκλαση τους από κρυσταλλικές επιφάνειες να

μπορούμε να παρατηρήσουμε μέγιστα και ελάχιστα στην ανακλώμενη δέσμη όμοια με εκείνα τα οποία ο von Laue είχε προβλέψει για τις ακτίνες X. Ανάλογα, αν εξετάσουμε δέσμη ηλεκτρονίων διερχόμενη μέσα από λεπτά μεταλλικά φύλλα, θα πρέπει να αναμένουμε να παρατηρήσουμε εικόνες περίθλασης παρόμοιες με τους δακτυλίους περίθλασης Debye-Scherrer οι οποίοι παρατηρούνται κατά την περίθλαση ακτίνων X. Ο von Laue πρώτος είχε προτείνει ότι η κανονική περιοδική διάταξη των ατόμων σε ένα κρυσταλλικό στερεό (των οποίων η απόσταση είναι της τάξεως του ενός Å) μπορεί να χρησιμεύσει σαν ένα οπτικό φράγμα ανάκλασης ή περίθλασης για την μέτρηση του μήκους κύματος ακτίνων X. Στο σχήμα 9.7 φαίνεται η περιοδική διάταξη των δομικών λίθων ενός κρυσταλλικού στερεού, ενώ στο σχήμα 9.8 φαίνεται η γεωμετρία της ανάκλασης μιας προσπίπτουσας δέσμης ηλεκτρονίων ή φωτονίων X σε μια επίπεδη επιφάνεια του κρυστάλλου, η οποία περιέχει άτομα. Η ανάκλαση (καθώς και η διέλευση) της δέσμης είναι ένα συλλογικό φαινόμενο το οποίο οφείλεται στην συμβολή όλων των σκεδαζομένων κυμάτων από ένα μεγάλο πλήθος ατόμων από ολόκληρη την επιφάνεια.



Σχήμα 9.7

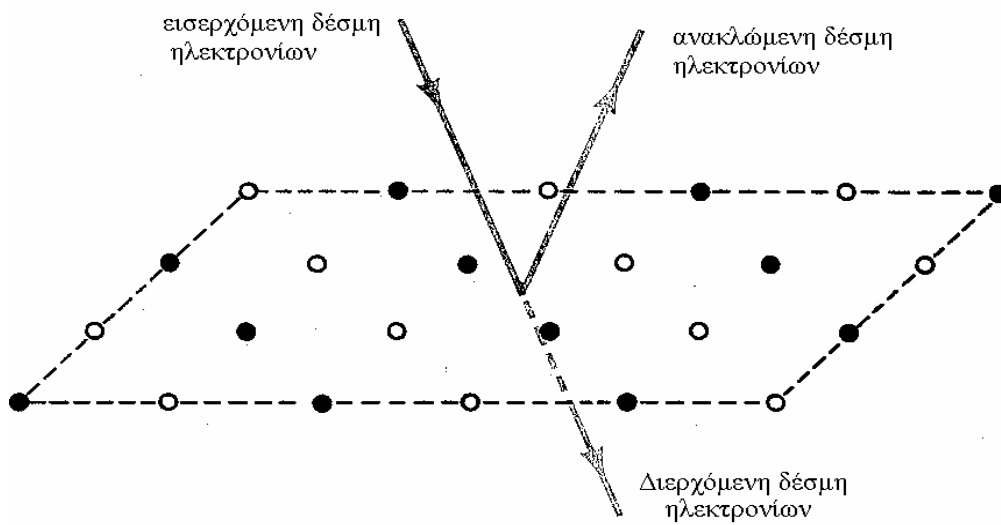
Περιοδική διάταξη στο χώρο των δομικών λίθων ενός κρυσταλλικού στερεού, του NaCl, εν προκειμένω .

Τα ιόντα του Na και του Cl είναι διευθετημένα στις κορφές μικρών κυβικών κυψελίδων, οι οποίες σχηματίζουν ένα «κρυσταλλικό πλέγμα» το οποίο έχει κυβική συμμετρία. Στο σχήμα φαίνεται ένα τμήμα του κρυσταλλικού πλέγματος του NaCl.

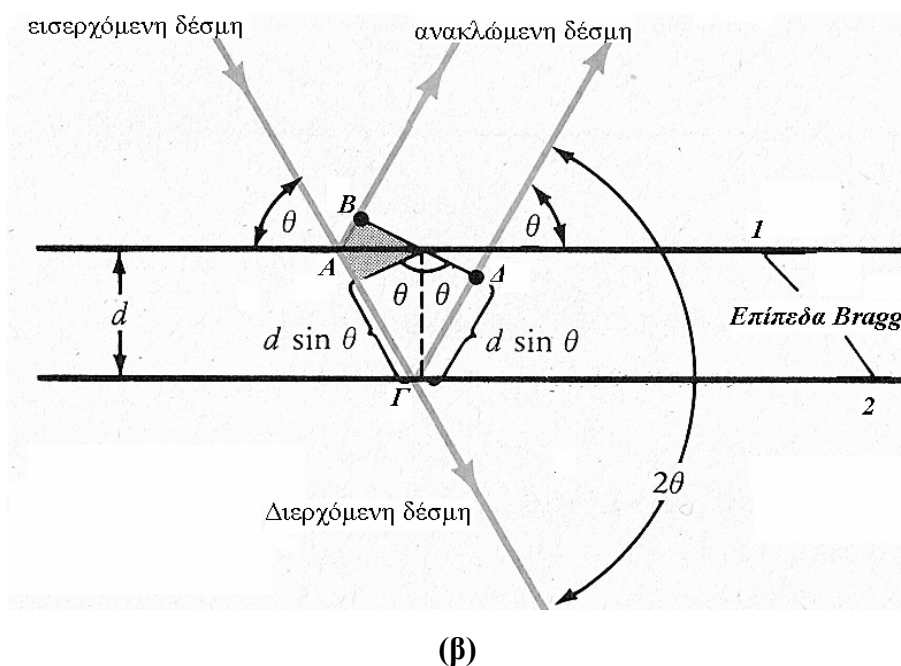
Η απόσταση d μεταξύ των ιόντων είναι της τάξεως μερικών (2.82) \AA ($1\text{\AA} = 10^{-10} \text{ m}$).

Τέτοιες επιφάνειες, οι οποίες σκεδάζουν την εισερχόμενη δέσμη με καθορισμένο τρόπο (ανάλογα με τον συγκεκριμένο προσανατολισμό) αποτελούν μια οικογένεια παραλλήλων επιπέδων τα οποία ονομάζονται επίπεδα Bragg, προς τιμήν του W. H. Bragg, ο οποίος πρώτος (μαζί με τον υιό του W. L. Bragg) μελέτησε την σκέδαση ακτίνων X από κρυστάλλους. Όπως βλέπουμε στο σχήμα 9.8β (και στην άσκηση 9.5) οι ανακλώμενες ακτίνες X από δύο γειτονικά επίπεδα Bragg θα συμβάλουν ενισχυτικά μόνο προς εκείνες τις διευθύνσεις, οι οποίες ικανοποιούν την **συνθήκη του Bragg**: $2d \sin \theta = n\lambda$, $n = 1, 2, 3, \dots$ (9.40).

Σ' αυτές τις διευθύνσεις θα παρατηρήσουμε μέγιστα στην ένταση της ανακλώμενης δέσμης ακτίνων X. Η συνθήκη (9.40) είναι γνωστή και ως **νόμος του Bragg**. Αν κάνουμε λοιπόν το ίδιο πείραμα με ηλεκτρόνια, θα πρέπει να παρατηρήσουμε ανάλογα μέγιστα στην ένταση. Το πείραμα αυτό (με δέσμη ηλεκτρονίων) έκαναν 3 χρόνια μετά την διατύπωση της υπόθεσης του de Broglie οι C. J. Davisson και L. H. Germer.



(a)

**Σχήμα 9.8****Επίπεδο Bragg (α) και σκέδαση Bragg (β) σε κρύσταλλο NaCl.**

Βλέπουμε, στο (β), ότι η διαφορά δρόμου των ανακλωμένων ακτίνων από δύο διαδοχικά επίπεδα Bragg είναι $2d\sin\theta$, όπου d η απόσταση μεταξύ των επιπέδων και θ η γωνία που σχηματίζει η προσπίπτουσα ακτίνα με την διεύθυνση των επιπέδων.

Οι Davisson και Germer είχαν αρχίσει να εργάζονται 5 χρόνια πριν την εργασία του de Broglie με πειράματα δευτερογενούς εκπομπής ηλεκτρονίων από μεταλλικές επιφάνειες, όταν παρατήρησαν τυχαία ότι η ένταση των ανακλωμένων (για την ακρίβεια, των ελαστικά σκεδαζομένων) ηλεκτρονίων μεταβάλλεται σημαντικά με τον προσανατολισμό (την γωνία) του κρυστάλλου σε σχέση με την προσπίπτουσα δέσμη ηλεκτρονίων, κάτι που φαινόταν ανεξήγητο. Επανάλαβαν προσεκτικότερα τα πειράματα με ηλεκτρόνια ενέργειας 54 eV προσπίπτοντα σε στόχο Νικελίου. Χρησιμοποίησαν καθαρό και ενιαίο κρύσταλλο (μονοκρύσταλλο) Ni. Ο προσανατολισμός της επιφανείας σκεδάσεως του κρυστάλλου (τα επίπεδα Bragg του σχήματος 9.8) χαρακτηρίζονται από τους δείκτες προσανατολισμού [111]⁹¹, όπως φαίνεται στο σχήμα 9.9(α). Η γραφική παράσταση σε πολικές συντεταγμένες της έντασης (του πλήθους ανά μονάδα χρόνου και επιφάνειας) των ηλεκτρονίων σε διάφορες γωνίες σκεδάσεως δίνεται στο σχήμα 9.9(β). Όπως βλέπουμε, υπάρχει ένα χαρακτηριστικό μέγιστο στη γωνία των 50°. Δεν είναι

⁹¹ Προσανατολισμός [111] σημαίνει ότι οι τομές αυτών των επιπέδων με τους άξονες xyz έχουν ίσα μήκη.

δύσκολο να μαντέψουμε την προέλευση αυτού του μεγίστου. Οι Davisson και Germer, γνώριζαν από πειράματα περίθλασης ακτίνων X ότι η απόσταση d μεταξύ γειτονικών επιπέδων Bragg με προσανατολισμό [111] είναι $d = 2.15 \text{ \AA} = 0.215 \text{ nm}$. Αποδίδοντας το μέγιστο της έντασης στις 50° στην ενισχυτική συνθήκη σκέδασης του Bragg, υπολόγισαν το μήκος κύματος του ηλεκτρονίου από την συνθήκη (9.40) με $n=1$ (αφού δεν παρατήρησαν κανένα άλλο μέγιστο σε μικρότερη γωνία):

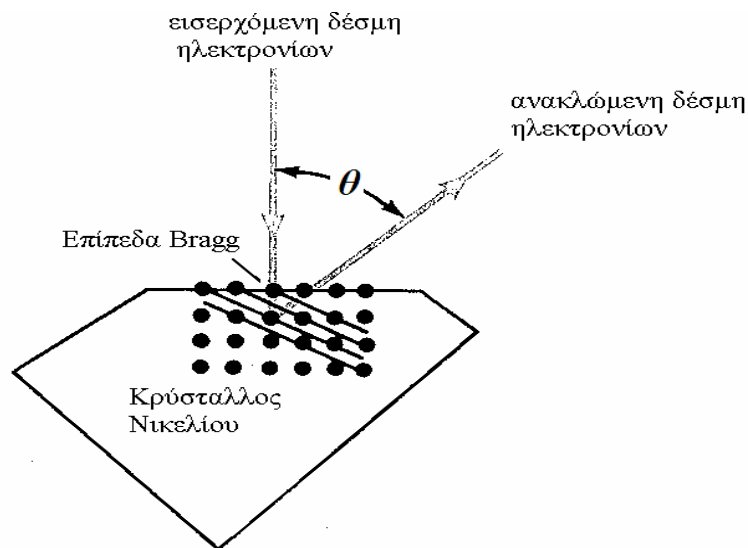
$$\lambda = d \sin \theta = (0.215 \text{ nm}) \times (\sin 50^\circ) = (0.215 \text{ nm}) \times (0.766) = 0.165 \text{ nm}, \text{ ή}$$

$$\lambda = 1.65 \text{ \AA}$$

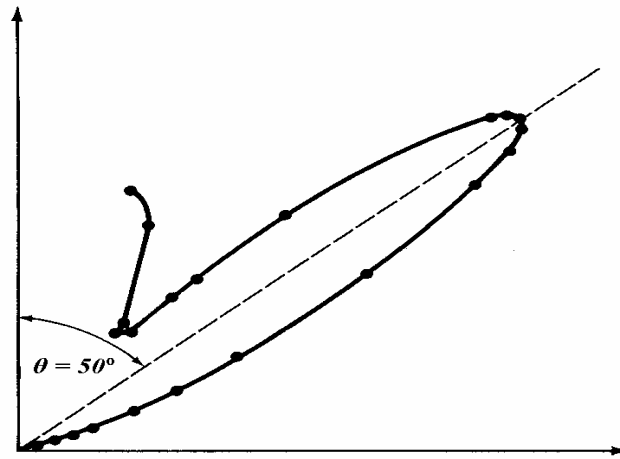
Αυτό το μήκος κύματος επαληθεύει την σχέση του de Broglie, αφού το μήκος κύματος λ των ηλεκτρονίων με ενέργεια 54 eV, το οποίο προκύπτει από τη σχέση του de Broglie (βλέπε άσκηση 9.2) είναι:

$$\lambda = 1.66 \text{ \AA}$$

Η επιβεβαίωση της υπόθεσης de Broglie ήταν πλέον γεγονός. Σχεδόν ταυτόχρονα με τους Davisson και Germer, ο G. P. Thomson διεξήγαγε πειράματα περίθλασης ηλεκτρονίων τα οποία διέρχονται μέσα από λεπτά μεταλλικά φύλλα και παρατηρούνται στο πίσω μέρος του στόχου, όπως φαίνεται παραστατικά στο σχήμα 9.10.



(α)



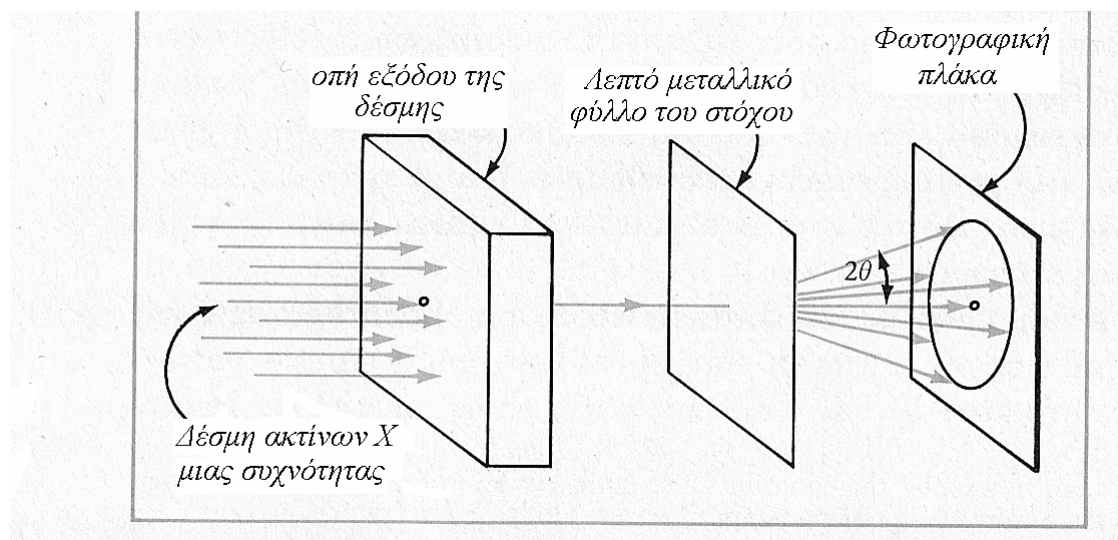
(β)

Σχήμα 9.9

Πειραματικά αποτελέσματα σκεδάσεως ηλεκτρονίων από την [111] επιφάνεια (επίπεδα Bragg) του Νικελίου, των Davisson – Germer.

(α): Σχηματικό διάγραμμα της πειραματικής διάταξης (β): Πολικό διάγραμμα της έντασης των «ανακλωμένων» ηλεκτρονίων συναρτήσει της γωνίας θ . Κάθε σημείο του διαγράμματος παριστάνει την σχετική ένταση της ανακλώμενης δέσμης όταν η συσκευή ανίχνευσης των ηλεκτρονίων βρίσκεται στη θέση που δηλώνει η γωνία θ . Το προφανές μέγιστο στις 50° για ηλεκτρόνια ενέργειας 54 eV επιβεβαιώνει πανηγυρικά την υπόθεση του *de Broglie*.

Λόγω της γεωμετρίας, το σχήμα περίθλασης στην φωτογραφική πλάκα έχει την χαρακτηριστική μορφή δακτυλίων, οι οποίοι είναι γνωστοί από την ανάλογη περίθλαση ακτίνων X ως «δακτύλιοι περίθλασης Debye-Scherrer» .



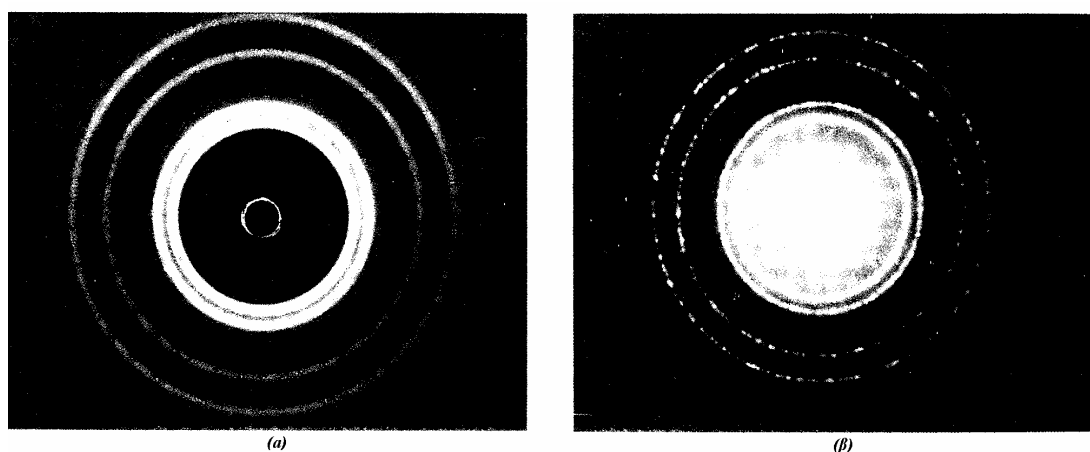
Σχήμα 9.10

Σχηματική διάταξη πειράματος Debye-Scherrer» περίθλασης ακτίνων X από λεπτά μεταλλικά φύλλα

Η εικόνα που αποτυπώνεται στη φωτογραφική πλάκα στο πίσω μέρος του λεπτού μεταλλικού στόχου αποτελείται από ομόκεντρους φωτεινούς και σκοτεινούς δακτυλίους περίθλασης.

(δείτε το σχήμα 9.11)

Ο G. P. Thomson (υιός του γνωστού J.J. Thomson) παρατήρησε στα πειράματα του χαρακτηριστικούς δακτυλίους περίθλασης Debye-Scherrer, όμοιους με εκείνους των ακτίνων X, όπως φαίνεται στο σχήμα 9.11.



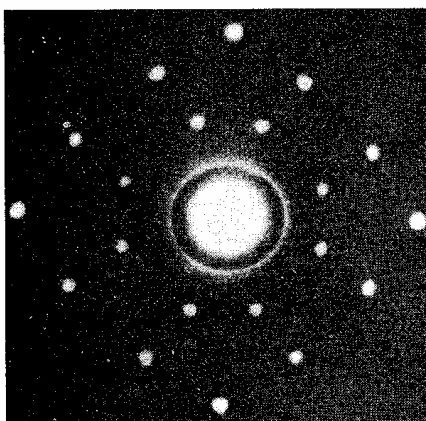
Σχήμα 9.11

Δακτύλιοι περίθλασης Debye-Scherrer κατά την σκέδαση ακτίνων X (α), και ηλεκτρονίων (β) από λεπτά φύλλα Αλουμινίου.

Στην περίπτωση της σκέδασης ακτίνων X (αριστερά) το κέντρο των δακτυλίων είναι μαύρο επειδή στην φωτογραφική πλάκα έχει ανοιχθεί μια οπή για να περάσει η πολύ ισχυρή κεντρική δέσμη.

Το συμπέρασμα είναι ότι τα ηλεκτρόνια συμπεριφέρονται όπως ακριβώς οι ακτίνες X. Εάν λοιπόν θεωρούμε τις ακτίνες X ως κύματα, τότε τα ηλεκτρόνια είναι και εκείνα κύματα. Αν όχι, τότε ο δυϊσμός σωματίο-κύμα που είδαμε νωρίτερα για τα φωτόνια ισχύει ίδιος κι απaráλλαχτος και για τα ηλεκτρόνια.

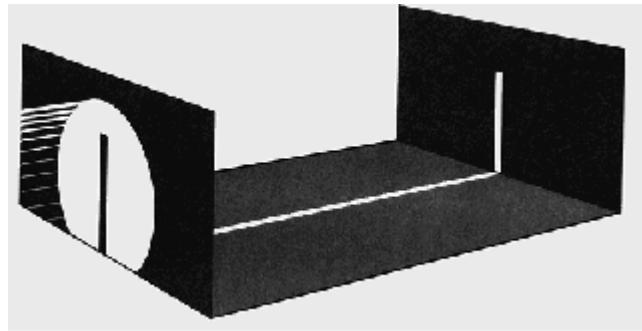
Μετά τα πειράματα των Davisson-Germer και Thomson με δέσμες ηλεκτρονίων, επακολούθησαν κι άλλα πειράματα περίθλασης χρησιμοποιώντας δέσμες και άλλων σωματίων, όπως για παράδειγμα νετρονίων, βλέπε σχήμα 9.12, και άλλες πειραματικές τεχνικές, όπως πειράματα συμβολής από μια και δύο σχισμές ή οπές.



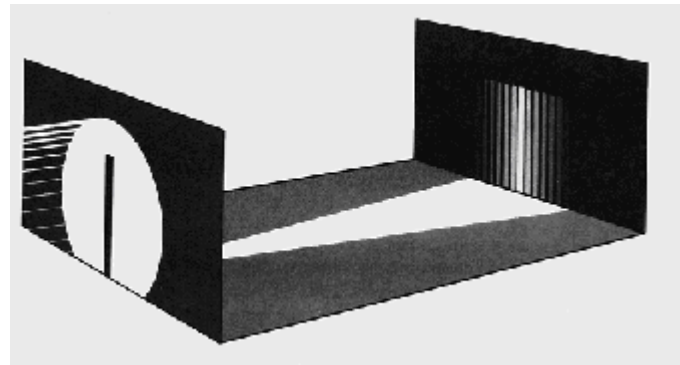
Σχήμα 9.12

Δακτύλιοι περίθλασης νετρονίων από κρύσταλλο NaCl.

Κλασικά, αν στείλουμε μια δέσμη σωματιδίων σε μια λεπτή σχισμή (με εύρος όχι μικρότερο από τη διάμετρο των σωματιδίων) και τοποθετήσουμε ένα πέτασμα (οθόνη) στο πίσω μέρος της σχισμής θα παρατηρήσουμε την προβολή της σχισμής πάνω στο πέτασμα, όπως φαίνεται στο σχήμα 9.13(α). Εάν στην ίδια σχισμή στείλουμε μια δέσμη κυμάτων (π.χ. φωτεινή δέσμη) θα παρατηρήσουμε την χαρακτηριστική εικόνα περίθλασης του σχήματος 9.13(β). Για να παρατηρήσουμε την χαρακτηριστική εικόνα περίθλασης θα πρέπει το εύρος της σχισμής να είναι συγκρίσιμο με το μήκος κύματος. Εάν κάνουμε κατάλληλα το πείραμα με ηλεκτρόνια θα παρατηρήσουμε την εικόνα του σχήματος 9.13(β), όπως βλέπουμε στο σχήμα 9.14.



(α)



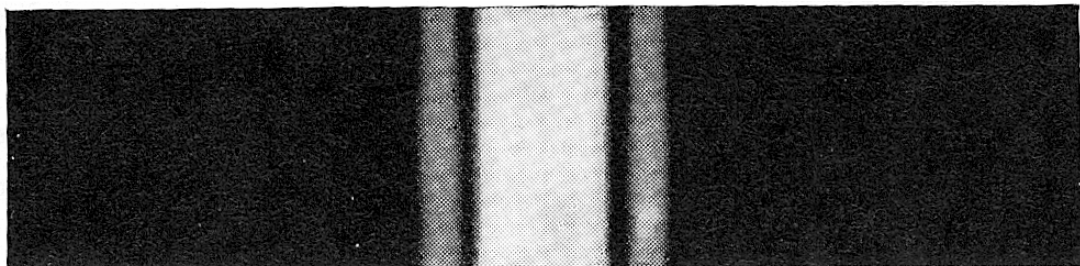
(β)

Σχήμα 9.13

Τρισδιάστατη κλασική παράσταση του πειράματος μιας Σχισμής, με βάση την σωματιδιακή εικόνα (α) και την κυματική εικόνα (β) .

Οι φωτεινοί και σκοτεινοί κροσσοί περιθλάσεως είναι χαρακτηριστικοί για τα κύματα.

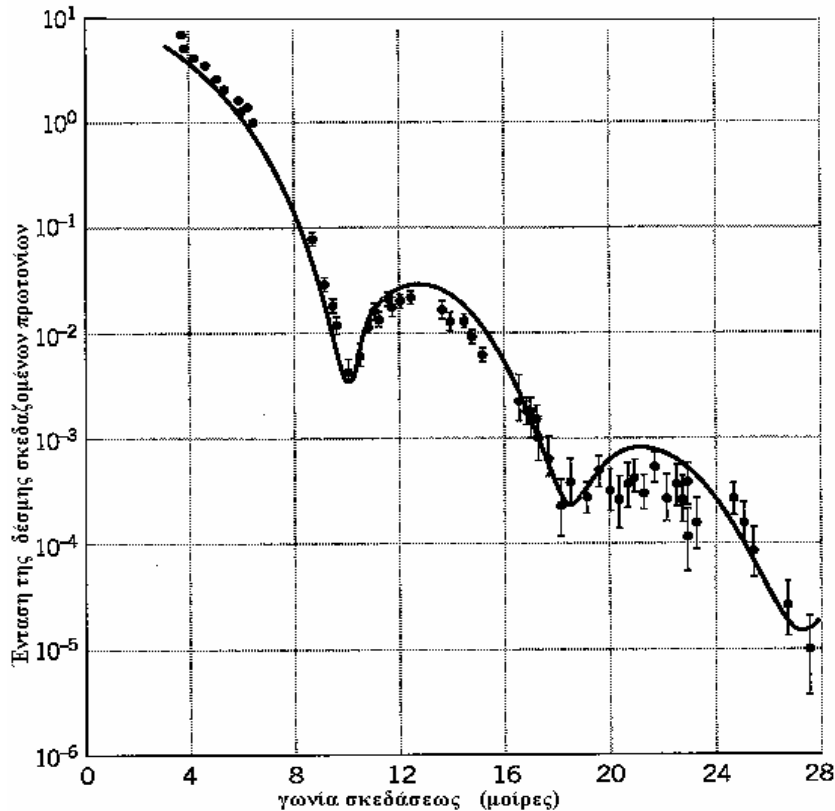
Ανάλογα πειράματα του τύπου της μιας οπής έχουν γίνει και για πρωτόνια.



Σχήμα 9.14

Εικόνα περίθλασης από πείραμα μιας σχισμής με ηλεκτρόνια.

Τα αποτελέσματα, σε μορφή διαγράμματος έντασης- γωνιακής θέσης δίνονται στο σχήμα 9.15.



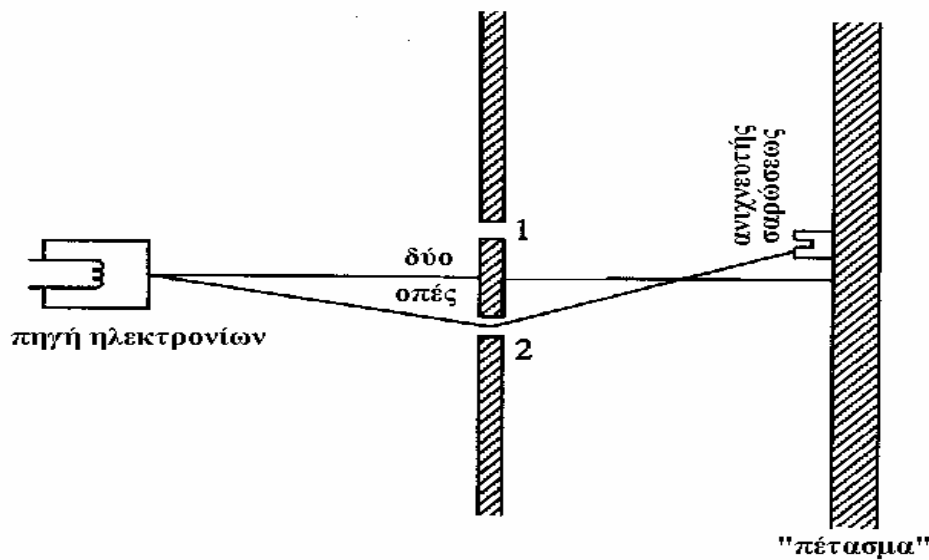
Σχήμα 9.15

Πείραμα τύπου μιας σχισμής με πρωτόνια ενέργειας 1GeV, τα οποία σκεδάζονται από πυρήνες οξυγόνου.

Το πειραματικό σφάλμα δηλώνεται με κατακόρυφες «μπάρες». Η ένταση στα ελάχιστα δεν είναι μηδέν επειδή οι πυρήνες οξυγόνου δεν έχουν σαφή και καλώς καθορισμένα όρια.

Το πραγματικό πείραμα αφορά σκέδαση πρωτονίων υψηλής ενέργειας 1GeV από πυρήνες οξυγόνου. Σ' αυτές τις ενέργειες, τα πρωτόνια έχουν μήκη κύματος της τάξεως των 10^{-15} m, δηλαδή της ίδιας τάξεως μεγέθους με τους πυρήνες των ατόμων.

Εάν, αντί για μια, χρησιμοποιήσουμε δύο πολύ λεπτές σχισμές (ή οπές), όπως φαίνεται στο σχήμα 9.16, τότε αντί της εικόνας **περίθλασης** του κύματος, θα παρατηρήσουμε στο «πέτασμα» πίσω από τις σχισμές χαρακτηριστικούς κροσσούς **συμβολής**. Για σωμάτια όπως τα ηλεκτρόνια ή τα νετρόνια χρησιμοποιούμε στη θέση του πετάσματος κάποιο κατάλληλο ανιχνευτή, με τον οποίο σαρώνουμε όλες τις θέσεις πάνω στο νοητό επίπεδο του πετάσματος και καταγράφουμε σε κάθε θέση, επί το ίδιο χρονικό διάστημα, το πλήθος των σωματιδίων που φθάνουν ανά μονάδα χρόνου και επιφανείας του ανιχνευτή (όπως φαίνεται στο σχήμα 9.16). Στο σχήμα 9.17 καταγράφουμε τα αποτελέσματα του πειράματος των δύο οπών για φωτόνια, ενώ στο σχήμα 9.18 τα αντίστοιχα αποτελέσματα για ηλεκτρόνια. Τα δύο σχήματα είναι σχεδόν ταυτόσημα.



Σχήμα 9.16

Σχηματική παράσταση της πειραματικής διατάξεως για το πείραμα των δύο οπών.

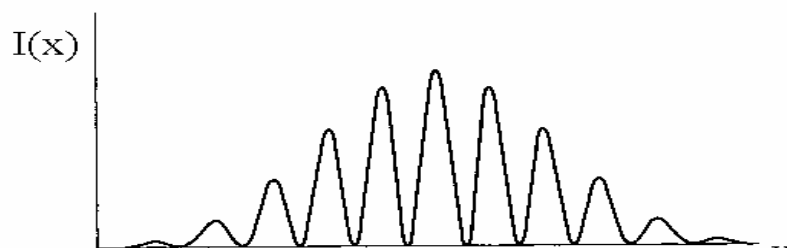
Ο ανιχνευτής σαρώσεως κινείται επάνω στο πέτασμα και καταγράφει σε κάθε θέση την ένταση της δέσμης των ηλεκτρονίων, τα οποία έχουν διέλθει από τις δύο οπές.

Παρόμοια διάταξη χρησιμοποιείται και για νετρόνια ή άλλα σωματΙΑ-κύματα

Για να εκτελέσουμε το πείραμα των δύο οπών θα πρέπει να έχουμε «μονοχρωματικά» κύματα, ενός και μοναδικού μήκους κύματος. Για τα ηλεκτρόνια αυτό είναι σχετικά εύκολο, αφού το μόνο που απαιτείται, σύμφωνα με την (9.24) είναι μια σταθερή τάση.



(α)



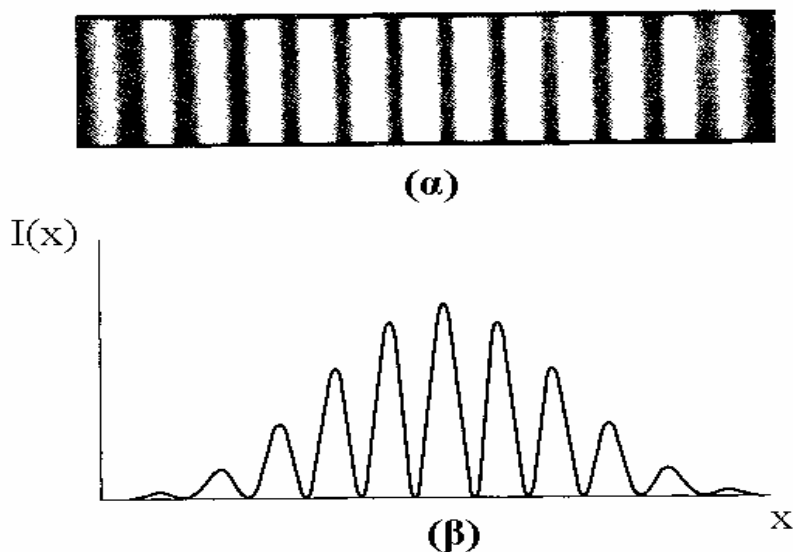
(β)

Σχήμα 9.17

Αποτελέσματα πειράματος δύο οπών για φωτόνια.

(α) πειραματική μέτρηση της έντασης των φωτονίων σαν συνάρτηση της θέσης στο «πέτασμα».

(β) Θεωρητικός προσδιορισμός της έντασης I σαν συνάρτηση της θέσης x .



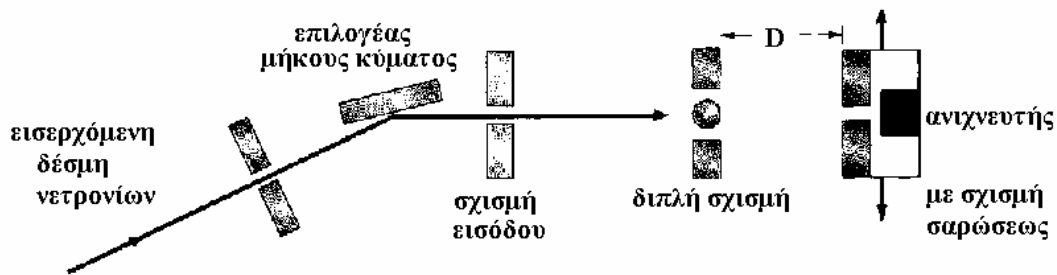
Σχήμα 9.18

Αποτελέσματα πειράματος δύο οπών για ηλεκτρόνια.

(α) πειραματική μέτρηση της έντασης των ηλεκτρονίων σαν συνάρτηση της θέσης στο «πέτασμα».

(β) Γραφική παράσταση της έντασης I , συναρτήσει της θέσης x .

Όμως για τα νετρόνια, τα οποία δεν έχουν ηλεκτρικό φορτίο θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια διαφορετική τεχνική. Για να πάρουμε μονοχρωματικά νετρόνια θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία που ακολουθούμε για να αναλύσουμε το ηλιακό φως στα μονοχρωματικά μήκη κύματος από τα οποία αποτελείται, χρησιμοποιώντας ένα οπτικό φράγμα (ή ένα πρίσμα). Μόνο που στην προκειμένη περίπτωση, τον ρόλο του φράγματος θα παίξει ένας κατάλληλος μονοκρύσταλλος με συγκεκριμένο προσανατολισμό, όπως φαίνεται στο σχήμα 9.19. Τον ρόλο του φωτογραφικού φιλμ παίξει ένας κατάλληλος ανιχνευτής με μια λεπτή σχισμή, ο οποίος καταγράφει σε κάθε θέση το πλήθος των νετρονίων που φτάνουν μέσα στο ίδιο χρονικό διάστημα στη σχισμή. Η θέση του ανιχνευτή και (της σχισμής) μεταβάλλεται, όπως και στη διάταξη του σχήματος 9.16, ώστε να σαρώσει όλη την περιοχή ενδιαφέροντος.



Σχήμα 9.19

Σχηματική παράσταση της διάταξης για το πείραμα των δύο οπών για τα νετρόνια.

Ένας μονοκρυστάλλος με κατάλληλο προσανατολισμό παίζει τον ρόλο του επιλογέας μήκους κύματος. Τα νετρόνια κινούνται «θερμικά».

Η συσκευή για την παραγωγή και διέλευση των νετρονίων μέσα από τις δύο οπές είναι παρόμοια με την διάταξη του σχήματος 9.16 , μόνο που τα νετρόνια επειδή δε έχουν φορτίο δεν επιταχύνονται με ηλεκτρικά πεδία αλλά κινούνται μέσω της θερμικής τους κίνησης. Τα νετρόνια συνήθως παράγονται σε ένα πυρηνικό αντιδραστήρα και συγκρουόμενα με τα άτομα του υλικού των τοιχωμάτων του αντιδραστήρα σύντομα έρχονται σε θερμική ισορροπία με τα τοιχώματα. Δηλαδή τα νετρόνια συμπεριφέρονται σαν τα μόρια ενός αερίου, των οποίων η θερμοκρασία σχετίζεται με την μέση κινητική τους ενέργεια $\langle E_K \rangle$, σύμφωνα με το θεώρημα ισοκατανομής της ενέργεια που είδαμε νωρίτερα στα κεφάλαια 3 και 4:

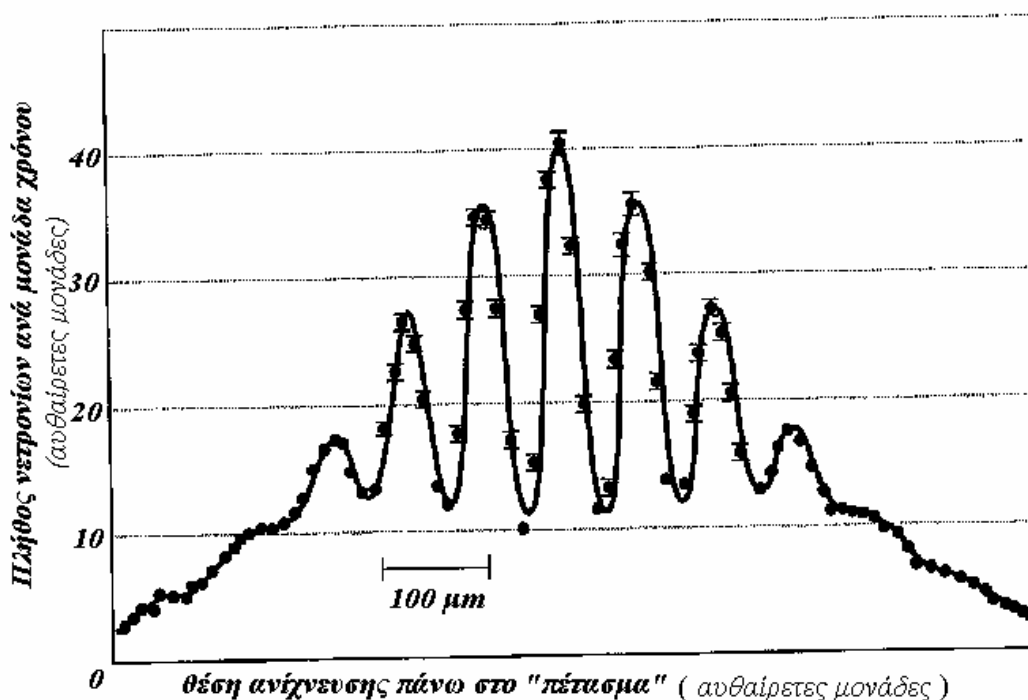
$$\langle E_K \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = \frac{3}{2} k_B T \quad (9.41).$$

Αυτά τα «θερμικά» νετρόνια με μάζα $m = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, κινούνται λόγω της θερμικής τους κίνησης και κατευθύνονται μέσα από κατάλληλες ευθυγραμμιστικές διατάξεις. Το (μέσο) μήκος κύματος De Broglie των θερμικών νετρονίων δίνεται από τη σχέση:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}} = \frac{3}{2} k_B T = 1.4 \text{ \AA} \quad (9.42).$$

Τα αποτελέσματα του πειράματος των δύο οπών για τα νετρόνια δίνονται στο σχήμα 9.20. Αυτού του είδους τα πειράματα, όπως και τα πειράματα περίθλασης, με νετρόνια έδειξαν ότι τα «υλικά» κύματα δεν είναι ηλεκτρομαγνητικής φύσεως (αφού τα νετρόνια

δεν έχουν ηλεκτρικό φορτίο) και ότι το ηλεκτρικό φορτίο δεν παίζει κανένα ρόλο στην κυματική συμπεριφορά των υλικών σωμάτων.



Σχήμα 9.20

Αποτελέσματα του πειράματος των δύο οπών με νετρόνια

Στον κατακόρυφο άξονα απεικονίζεται η ένταση (πλήθος νετρονίων ανά μονάδα χρόνου που φτάνουν στην επιφάνεια του ανιχνευτή μέσα από τη σχισμή σαρώσεως (σε αυθαίρετες μονάδες). Στον οριζόντιο άξονα απεικονίζεται (σε αυθαίρετες μονάδες η θέση του ανιχνευτή (και της σχισμής) σύμφωνα με την συσκευή του σχήματος 9.19.

Είδαμε λοιπόν σ' αυτό το υποκεφάλαιο, για μια σειρά διαφορετικά σωμάτια, με μια σειρά από διαφορετικές πειραματικές τεχνικές, ότι η κυματική υπόθεση και σχέση του de Broglie επαληθεύονται πανηγυρικά, για τα μικροσκοπικά σωμάτια.

Ερωτήσεις

9.2 Με βάση τα δεδομένα του σχήματος 9.15, μπορείτε να εκτιμήσετε την τάξη μεγέθους της διαμέτρου του πυρήνα του οξυγόνου;

Ασκήσεις

9.2 Βρείτε το μήκος κύματος de Broglie των εξής σωμάτων

- α) Μια σφαίρα μάζας 10 gr η οποία έχει ταχύτητα 100 m/s
- β) Ένα σωματίο καπνού μάζας 10^{-9} gr το οποίο κινείται με ταχύτητα 1 cm/s
- γ) Ένα ηλεκτρόνιο με κινητική ενέργεια 1 eV
- δ) Ένα ηλεκτρόνιο με κινητική ενέργεια 54 eV
- ε) Ένα ηλεκτρόνιο με κινητική ενέργεια 100 eV
- στ) Ένα ηλεκτρόνιο 100 MeV

9.3 Τι κινητική ενέργεια (σε eV) πρέπει να έχει μια δέσμη ηλεκτρονίων, ώστε να δώσει την ίδια εικόνα περίθλασης με δέσμη ορατού κόκκινου φωτός (6200\AA) η οποία υφίσταται περίθλαση από το ίδιο οπτικό φράγμα;

9.4 Δείξτε τη σχέση (9.29) και βρείτε την ειδικότερη μορφή που παίρνει για φωτόνια. Δείξτε επίσης ότι για σωματία με μικρή κινητική ενέργεια (σε σχέση με την ενέργεια ηρεμίας) η (9.29) ανάγεται στην $\lambda = \frac{12400 eVA^{\circ}}{\sqrt{2E_k m_0 c^2}}$, που είναι ισοδύναμη με τη (9.23).

9.5 Δείξτε ότι η συνθήκη (9.40) εκφράζει την φυσική απαίτηση η διαφορά δρόμου δύο σκεδαζομένων (ανακλωμένων) ακτίνων από διαδοχικά επίπεδα Bragg να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος, ώστε τα κύματα να συμβάλλουν ενισχυτικά.

9.6 Μία «πολυχρωματική» δέσμη ακτίνων X προσπίπτει σε ένα κρύσταλλο KCl του οποίου η δομή είναι όμοια με εκείνη του NaCl του σχήματος 9.7, με μόνη διαφορά ότι η απόσταση d είναι σ' αυτή την περίπτωση ίση προς 3.14 \AA . Ποια μήκη κύματος θα υποστούν σημαντική «ανάκλαση Bragg» σε γωνία σκεδάσεως 30 μοιρών;

***9.3 Εφαρμογή: Το ηλεκτρονικό μικροσκόπιο**

Όπως είναι γνωστό από την Οπτική, το μικροσκόπιο με το οποίο απεικονίζουμε μεγενθυσμένα μικροσκοπικά αντικείμενα (όπως και τα υπόλοιπα οπτικά όργανα), έχει περιορισμούς στην ευκρίνεια των ειδώλων που σχηματίζει λόγω του φαινομένου της περίθλασης. Λόγω του φαινομένου της περίθλασης, οι εικόνες δύο διαφορετικών και διακριτών σημείων ενός αντικειμένου, απεικονίζονται μέσα από το μικροσκόπιο ως μικροί κύκλοι περίθλασης, με ακτίνες οι οποίες εξαρτώνται από γεωμετρικά χαρακτηριστικά του οργάνου και το μήκος κύματος του φωτός. Στο σχήμα 9.21 φαίνεται μια απλοποιημένη περιγραφή αυτού του φαινομένου, όπου αντί για μικροσκόπιο έχουμε μόνο μια λεπτή κυκλική οπή (με ή χωρίς φακό) διαμέτρου D . Ανάλογα, με την γωνιακή απόσταση των δύο πηγών, δηλαδή την γωνία θ που σχηματίζουν οι δύο πηγές με κορυφή

το μέσον της οπής, οι κύκλοι περίθλασης μπορεί να αλληλοεπικαλύπτονται, όπως φαίνεται στο σχήμα 9.22 με αποτέλεσμα να μην μπορούμε να διακρίνουμε τα δύο σημεία ως διαφορετικά και να έχουμε συνολικά μια θολή εικόνα του αντικειμένου. Έτσι, παρόλο ότι μπορούμε να μεγεθύνουμε ένα αντικείμενο σχεδόν απεριόριστα, από ένα όριο και πέρα δεν μπορούμε να διακρίνουμε καμία επιπλέον λεπτομέρεια. Η ελάχιστη γωνιακή απόσταση $\theta_{\epsilon\lambda\alpha\chi}$ μεταξύ δύο διαφορετικών σημείων, η οποία επιτρέπει τον διαχωρισμό των ειδώλων τους (δηλαδή την διάκριση τους ως διαφορετικά σημεία) ονομάζεται **όριο διακριτικότητας** ή **διακριτικό όριο**. Ένα κριτήριο για την ελάχιστη γωνία, από την οποία προσδιορίζεται το διακριτικό όριο είναι το **κριτήριο του Rayleigh**, σύμφωνα με το οποίο όταν το κεντρικό μέγιστο της εικόνας περίθλασης από την μία πηγή συμπίπτει με το πρώτο ελάχιστο της εικόνας περίθλασης από την άλλη έχουμε την ελάχιστη γωνία $\theta_{\epsilon\lambda\alpha\chi}$ και λέμε τότε ότι οι δύο εικόνες ίσα-ίσα που διακρίνονται. Από την κυματική όμως γνωρίζουμε⁹² ότι για μια λεπτή σχισμή εύρους D , το πρώτο ελάχιστο βρίσκεται σε γωνιακή απόσταση θ που δίνεται από τη σχέση $\sin \theta_{\epsilon\lambda\alpha\chi} = \frac{\lambda}{D}$, όπου λ το μήκος κύματος του φωτός. Για μικρές γωνίες θ η σχέση αυτή γράφεται ισοδύναμα:

$$\sin \theta_{\epsilon\lambda\alpha\chi} \cong \theta_{\epsilon\lambda\alpha\chi} = \frac{\lambda}{D} \quad (9.43) \quad \underline{\text{διακριτικό όριο σχισμής.}}$$

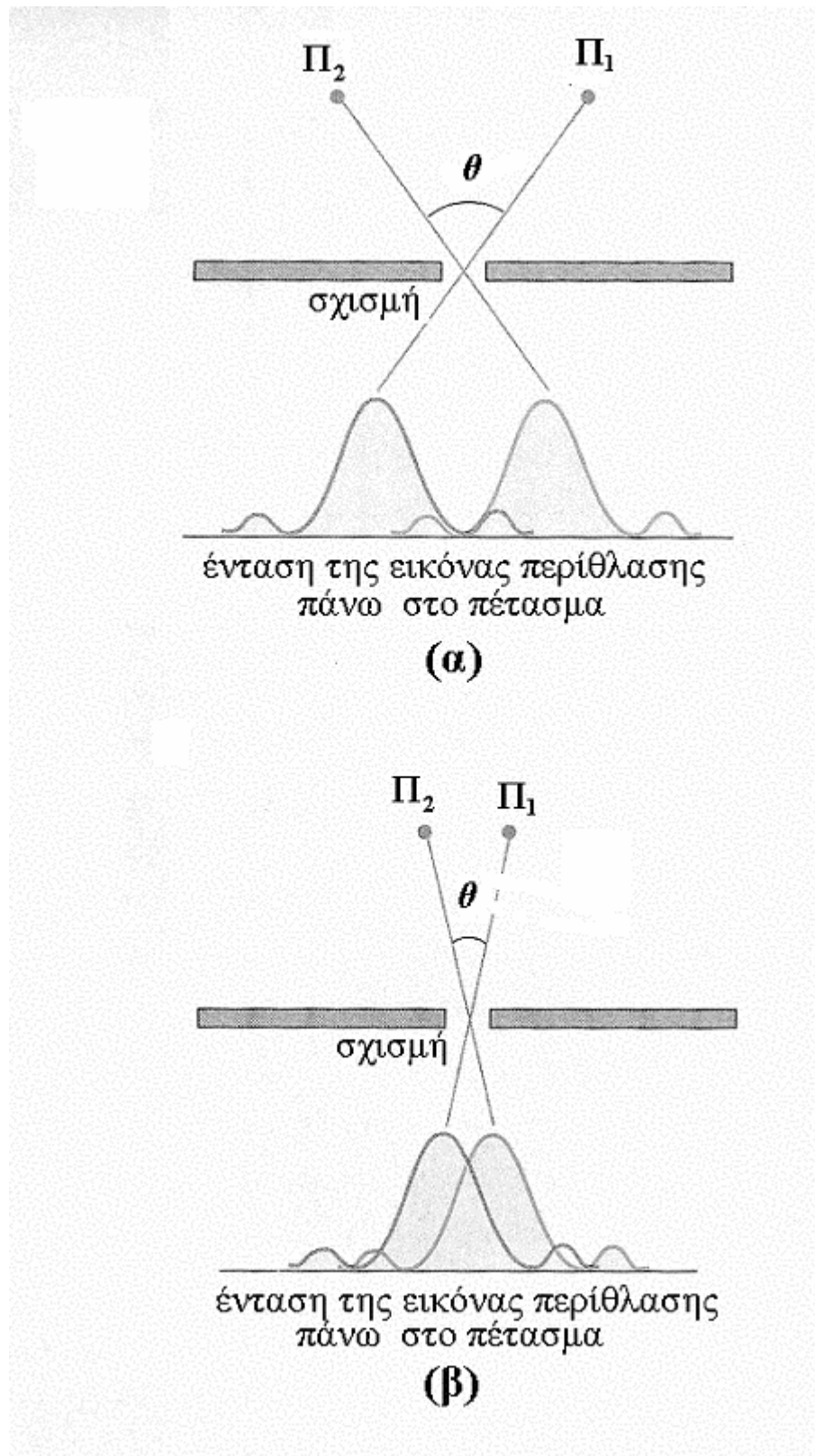
Εάν αντί σχισμής (με ορθογώνια γεωμετρία) έχουμε μια κυκλική οπή, η (9.43) γράφεται:

$$\sin \theta_{\epsilon\lambda\alpha\chi} \cong \theta_{\epsilon\lambda\alpha\chi} = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (9.44) \quad \underline{\text{διακριτικό όριο οπής.}}$$

Σ' αυτή τη σχέση εκτός από το μήκος κύματος λ και την διάμετρο του ανοίγματος της οπής ή του φακού, D , υπεισέρχεται και ένας αριθμητικός παράγοντας 1.22, ο οποίος προέρχεται από την (κυκλική) γεωμετρία του ανοίγματος.

Το μικροσκόπιο, όπως και τα υπόλοιπα οπτικά όργανα χαρακτηρίζονται από κάποιο (κυκλικό ή ορθογώνιο) άνοιγμα (οπή ή σχισμή) μέσα από το οποίο διέρχονται οι οπτικές ακτίνες οι οποίες εκπορεύονται από το αντικείμενο ή το δείγμα προς μελέτη. Η διακριτική ικανότητα (η ικανότητα να διαχωρίζει γειτονικές εικόνες) ενός μικροσκοπίου (ή άλλου οπτικού οργάνου) συνδέεται άμεσα με την διακριτική ικανότητα του χαρακτηριστικού ανοίγματος. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την **διακριτική ικανότητα, δ** , ενός οπτικού οργάνου μέσα από την οριακή γωνία $\theta_{\epsilon\lambda\alpha\chi}$.

⁹² Δείτε «Ταλαντώσεις και Κύματα», Α. Ζδέτση, υποκεφάλαιο 8.7



Σχήμα 9.21

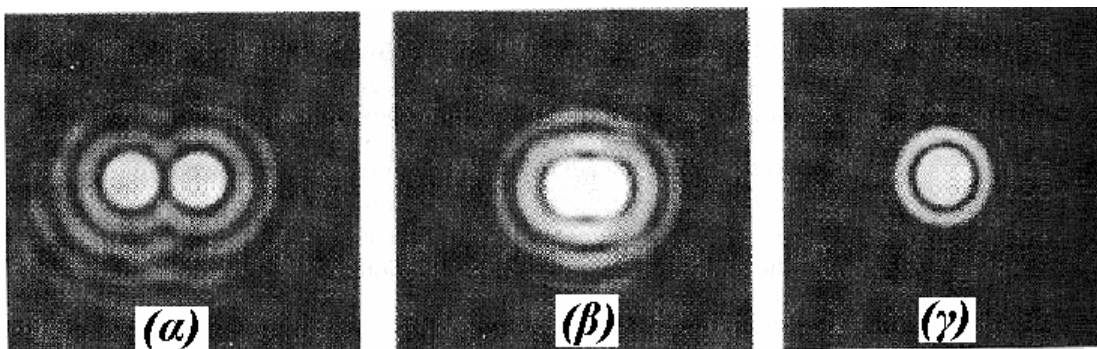
Η ένταση της εικόνας περίθλασης δύο σημειακών φωτεινών πηγών Π_1 και Π_2 μέσα από μια λεπτή σχισμή, σαν συνάρτηση της θέσης πάνω στο πέτασμα.

Η συνολική ένταση είναι το άθροισμα των δύο καμπυλών. Στην πρώτη περίπτωση (α) η γωνιακή απόσταση θ μεταξύ των πηγών (με κορυφή το μέσον της σχισμής) είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη γωνία στην περίπτωση (β). Σαν αποτέλεσμα, στην περίπτωση (α) τα μέγιστα από τις δύο πηγές είναι ξεχωριστά και ευδιάκριτα ενώ στην περίπτωση (β) μόλις που διακρίνονται (συγκρίνεται με τις εικόνες περίθλασης (α) και (β) στο σχήμα 9.22.

Όσο μικρότερο είναι το διακριτικό όριο $\theta_{\text{ελαχ}}$, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η **διακριτική ικανότητα** δ του οργάνου, η οποία ορίζεται από το αντίστροφο της γωνίας $\theta_{\text{ελαχ}}$ της σχέσης (9.44), $\delta = 1/\theta_{\text{ελαχ}}$ (9.45) **διακριτική ικανότητα**.

Βλέπουμε δηλαδή, ότι για δοσμένη διάμετρο του ανοίγματος (της οπής ή του φακού) η διακριτική ικανότητα είναι αντιστρόφως ανάλογη προς το μήκος κύματος.

Θα μπορούσαμε, για να βελτιώσουμε την διακριτική ικανότητα να αυξήσουμε την διάμετρο του ανοίγματος, αλλά τότε χάνουμε σε μεγέθυνση και σε ακρίβεια λόγω άλλων σφαλμάτων. Συμφέρει λοιπόν η χρησιμοποίηση όσο το δυνατόν μικρότερου μήκους κύματος (αφού η χρήση μεγαλύτερου ανοίγματος έχει άλλα μειονεκτήματα). Με το συνηθισμένο οπτικό μικροσκόπιο όμως, το μήκος κύματος δεν μπορεί να γίνει μικρότερο από περίπου 4000 \AA , που είναι το μήκος κύματος του ιώδους άκρου της ορατής περιοχής. Αν όμως αντί ορατού φωτός, δηλαδή αντί για φωτόνια, χρησιμοποιήσουμε ηλεκτρόνια, τότε μπορούμε εύκολα (όπως είδαμε στο παραδείγματα 9.3 και στην άσκηση 9.2) να πετύχουμε μήκη κύματος της τάξεως του ενός \AA .



Σχήμα 9.22

Εικόνες περίθλασης των δύο σημειακών πηγών του σχήματος 9.21 για διαδοχικά, από (α)-(γ), μικρότερες γωνίες .

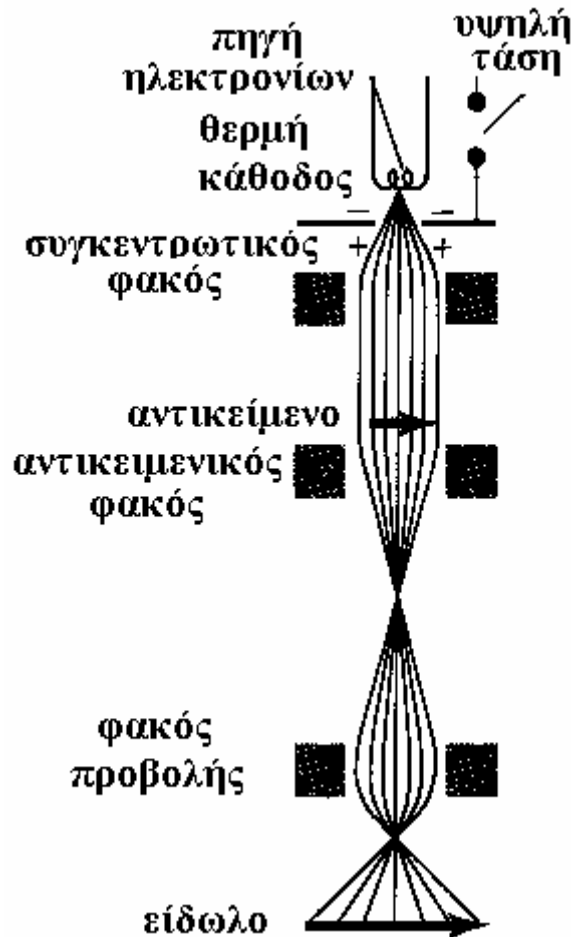
Η περίπτωση (β) όπου οι εικόνες των δύο πηγών μόλις διακρίνονται αντιστοιχεί στην οριακή γωνία $\theta_{\text{ελαχ}}$, ενώ στην περίπτωση (γ) οι δύο εικόνες συμπίπτουν και δεν διακρίνονται.

Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορούμε να αυξήσουμε την διακριτική ικανότητα του μικροσκοπίου, και την αντίστοιχη μεγέθυνση, κατά χίλιες φορές περίπου. Υπό την προϋπόθεση βέβαια, ότι μπορούμε να «εστιάζουμε» τα ηλεκτρόνια (δηλαδή ηλεκτρόνια που σκεδάζονται από το ίδιο σημείο του αντικειμένου να κατευθύνονται τελικά στο ίδιο σημείο του ειδώλου). Η αρχή λειτουργίας του **ηλεκτρονικού μικροσκοπίου**, το οποίο φαίνεται σχηματικά στο σχήμα 9.23, βασίζεται ακριβώς σ' αυτή την ιδέα. Η εστίαση των ηλεκτρονίων επιτυγχάνεται στο ηλεκτρονικό μικροσκόπιο με κατάλληλο συνδυασμό ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων (δηλαδή «ηλεκτρομαγνητικών φακών»).

Οι ηλεκτρομαγνητικοί φακοί αποτελούνται από κατάλληλα σχεδιασμένα πηνία, τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία των οποίων εξασκούν επιθυμητές δυνάμεις στα ηλεκτρόνια, ώστε να κάμψουν κατάλληλα τις τροχιές τους και να τα «εστιάσουν».

Όπως φαίνεται στο σχήμα 9.23, τα ηλεκτρόνια εκπέμπονται από μια θερμαινόμενη κάθοδο (αρνητικό ηλεκτρόδιο) και επιταχύνονται από μια ρυθμιζόμενη υψηλή τάση. Αφού περάσουν από κατάλληλο «συγκλίνοντα» συγκεντρωτικό φακό, προσπίπτουν ως παράλληλη δέσμη «ακτίνων» ηλεκτρονίων στο προς μεγέθυνση αντικείμενο. Κατόπιν η δέσμη περνάει με μέσα από δύο συστήματα φακών ανάλογα προς τον αντικειμενικό και προσοφθάλμιο φακό του οπτικού μικροσκοπίου και εστιάζει το είδωλο πάνω σε ένα φθορίζον διάφραγμα ή κατάλληλα κατασκευασμένο φιλμ. Η συνολική διαδρομή των ηλεκτρονίων καθώς και το αντικείμενο (το δείγμα) προς μεγέθυνση, διατηρούνται μέσα σε υψηλό κενό, ώστε να αποφεύγεται η σκέδαση των ηλεκτρονίων από μόρια του αέρος, η οποία θα είχε ως αποτέλεσμα τον σχηματισμό θολής εικόνας του αντικειμένου. Επίσης, το δείγμα πρέπει να είναι πολύ λεπτό (20 με 50 nm) ώστε να αποφεύγεται η επιβράδυνση των ηλεκτρονίων. Διαφορετικά, τα επιβραδυνθέντα ηλεκτρόνια (με μεγαλύτερο μήκος κύματος) θα καμφθούν διαφορετικά από τους ηλεκτρομαγνητικούς φακούς και θα εστιασθούν σε διαφορετικά σημεία με αποτέλεσμα την ασαφή απεικόνιση. Αυτό το είδος του σφάλματος είναι ανάλογο προς τα χρωματικά σφάλματα των συνηθισμένων οπτικών φακών. Στα συνηθισμένα ηλεκτρονικά μικροσκόπια χρησιμοποιούνται υψηλές τάσεις για την επιτάχυνση των ηλεκτρονίων, ώστε να έχουμε όσο το δυνατόν μικρότερο μήκος κύματος. Για παράδειγμα ηλεκτρόνια που επιταχύνονται από τάσεις 100000 Volts, με

ενέργειες 100 keV, έχουν μήκος κύματος περίπου 0.004nm. Η αντίστοιχη διαχωριστική ικανότητα όμως, σε αντίθεση με ότι θα περιμέναμε, δεν είναι του ίδιου μεγέθους για αρκετούς πρακτικούς λόγους.



Σχήμα 9.23

Σχηματική παράσταση του ηλεκτρονικού μικροσκοπίου.

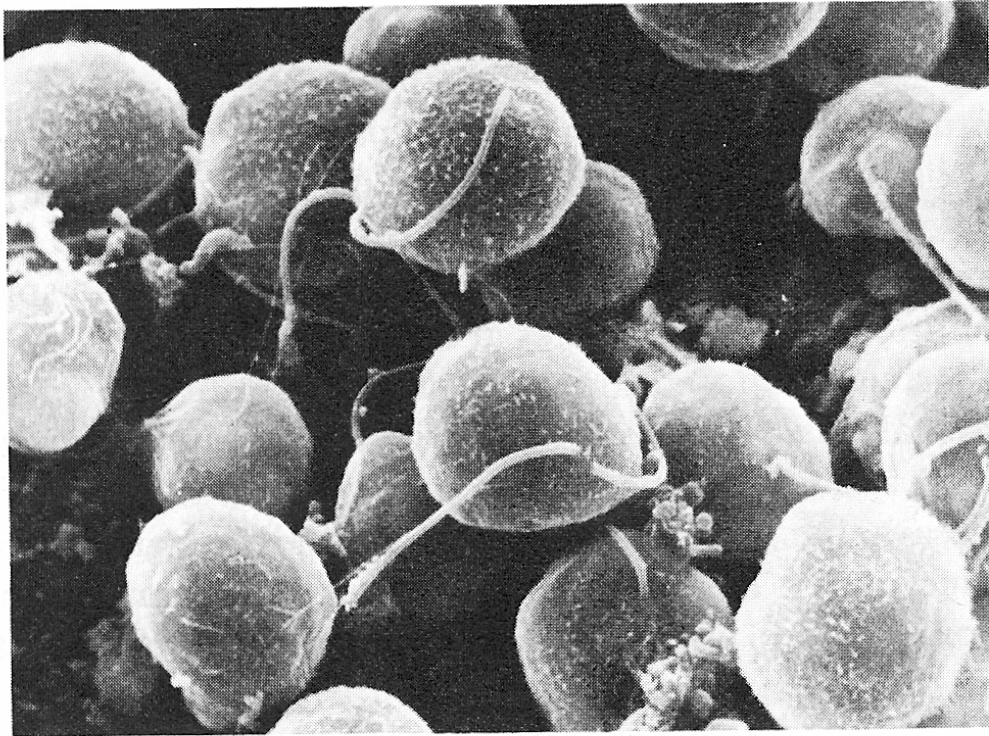
Τα μαύρα τετράγωνα παριστάνουν τα ηλεκτρομαγνητικά πηνία, τα οποία συνθέτουν τους «ηλεκτρονικούς φακούς». Το είδωλο του αντικειμένου (βέλους) σχηματίζεται μεγεθυσμένο από την δέσμη των ηλεκτρονίων πάνω σε κατάλληλο φθορίζον πέτασμα (οθόνη). Το τελευταίο σύστημα φακών (ο φακός προβολής) αντιστοιχεί προς τον προσοφθάλμιο φακό του συνηθισμένου οπτικού μικροσκοπίου.

Για παράδειγμα στα ηλεκτρονικά μικροσκόπια χρησιμοποιούνται μικρότερα ανοίγματα από τα οπτικά μικροσκόπια, επειδή ηλεκτρονικοί φακοί με μεγάλα ανοίγματα παραμορφώνουν σημαντικά την εικόνα. Άλλα σφάλματα του ηλεκτρονικού

μικροσκοπίου συνδέονται με την πειραματική δυσκολία να διατηρηθεί σταθερό το ρεύμα μέσα στα πηνία των ηλεκτρομαγνητικών φακών. Διακυμάνσεις του ρεύματος συνοδεύονται με αλλαγές στην εστιακή απόσταση των φακών. Έτσι το καλύτερο διακριτικό όριο είναι γύρω στα 0.2 nm (1000 φορές καλύτερο από τα καλύτερα οπτικά μικροσκόπια) για ηλεκτρόνια των 100 keV και αντιστοιχεί σε μεγέθυνση της τάξεως των 10^6 . Βέβαια, για τόσο υψηλές τάσεις και ενέργειες των ηλεκτρονίων δεν είναι σίγουρο πάντα, ιδίως για βιολογικά δείγματα, ότι η εικόνα που παρατηρούμε αντιστοιχεί στο πραγματικό δείγμα ή στα «απομεινάρια» του. Θα πρέπει όμως να αναλογισθούμε ότι σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό κάθε παρατήρηση σε μικροσκοπικό επίπεδο «διαταράσσει» το παρατηρούμενο αντικείμενο (όχι πάντα μέχρι θανάτου). Μ' αυτό τον τρόπο όμως, δεν είμαστε πάντα σίγουροι για τα ακριβή χαρακτηριστικά του παρατηρουμένου αντικειμένου. Την ιδέα αυτή, η οποία συνδέεται με την περίφημη *αρχή της αβεβαιότητας*, θα την επεξεργασθούμε και θα την διατυπώσουμε φορμαλιστικά στο επόμενο υποκεφάλαιο.

Το πρώτο ηλεκτρονικό μικροσκόπιο κατασκευάστηκε το 1930. Από τότε η ηλεκτρονική μικροσκοπία έχει βελτιωθεί και εξελιχθεί κατά πολύ. Υπάρχουν πολλών ειδών ηλεκτρονικά μικροσκόπια, ανάμεσα στα οποία περιλαμβάνονται τα *ηλεκτρονικά μικροσκόπια σαρώσεως*, τα οποία μπορούν να παράγουν εξαιρετικής ποιότητας τρισδιάστατες εικόνες με πολύ καλό «κοντράστ», όπως αυτή του σχήματος 9.24. Σ' αυτά τα μικροσκόπια μια λεπτή δέσμη των ηλεκτρονίων εστιάζεται σε πολύ μικρά (σχεδόν σημειακά) τμήματα της επιφάνειας του δείγματος, την οποία σαρώνει προσεκτικά με τη βοήθεια κατάλληλων μαγνητικών πεδίων σαρώσεως. Για την απεικόνιση χρησιμοποιείται η ανακλώμενη και όχι η διερχόμενη δέσμη ηλεκτρονίων, καθώς και τα δευτερογενή ηλεκτρόνια τα οποία εκπέμπονται από την επιφάνεια, και των οποίων η ένταση εξαρτάται από το βάθος. Στην κατηγορία των μικροσκοπίων σάρωσης ανήκουν και τα *σαρωτικά ηλεκτρονικά μικροσκόπια «σήραγγος»* (*scanning tunneling microscope, STM*). Αυτά τα μικροσκόπια χρησιμοποιούν τα δευτερογενή ηλεκτρόνια τα οποία εκπέμπονται από την επιφάνεια του δείγματος λόγω του *φαινομένου «σήραγγος»* (tunneling effect) όταν μια πολύ λεπτή (σχεδόν ατομικών διαστάσεων) φορτισμένη (σε σχέση με το δείγμα) ακίδα βρίσκεται στην άμεση γειτονία της. Η ακίδα, η οποία είναι συνδεδεμένη με ένα κατάλληλο πιεζοηλεκτρικό⁹³ σύστημα, σαρώνει με ομοιόμορφο

⁹³ Το πιεζοηλεκτρικό σύστημα βασίζεται σε ένα κρύσταλλο, ο οποίος παρουσιάζει το *πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο*. Δηλαδή το φαινόμενο κατά το οποίο αναπτύσσεται ηλεκτρική τάση στα άκρα του κρυστάλλου

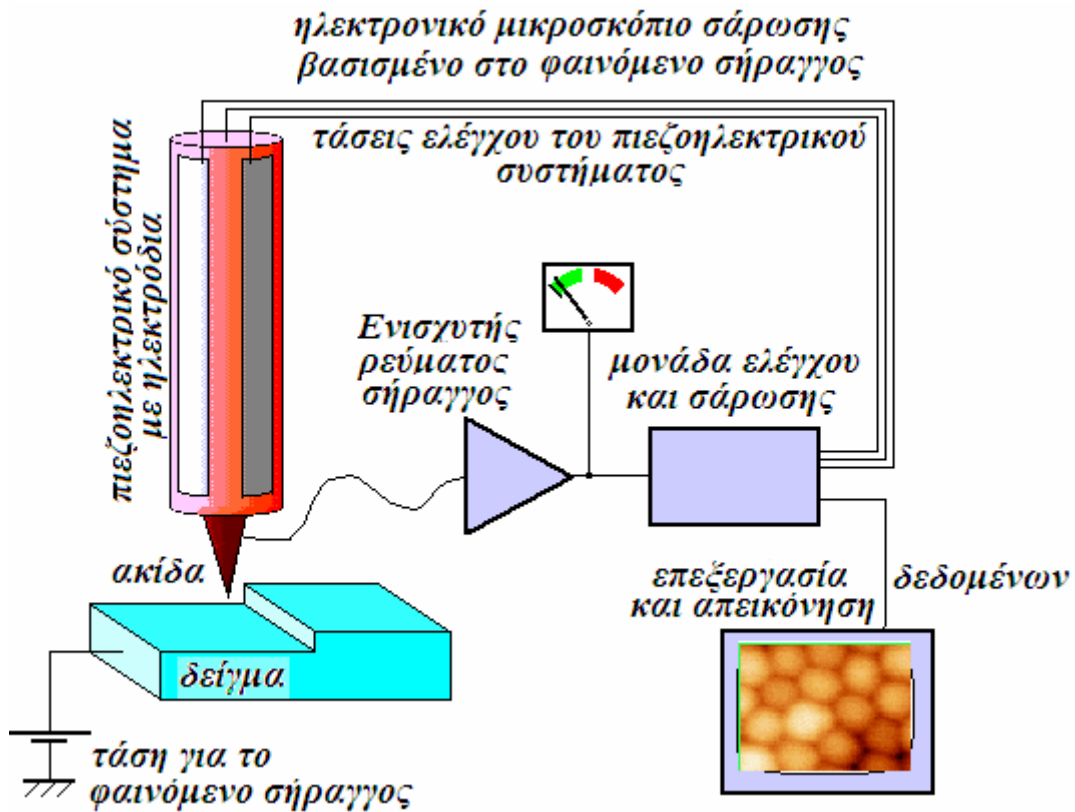


Σχήμα 9.24

Απεικόνιση με ηλεκτρονικό μικροσκόπιο των βακτηριδίων πράσινων τετρασπόρων.

τρόπο την επιφάνεια του δείγματος. Οι αλλαγές του ηλεκτρικού πεδίου κατάλληλα ανιχνεύονται από το πιεζοηλεκτρικό σύστημα, ενισχύονται και καταγράφονται μέσω της επεξεργασίας κάποιου υπολογιστή σε φωσφορίζουσα οθόνη ή φιλμ, όπως φαίνεται παραστατικά στο σχήμα 9.25.

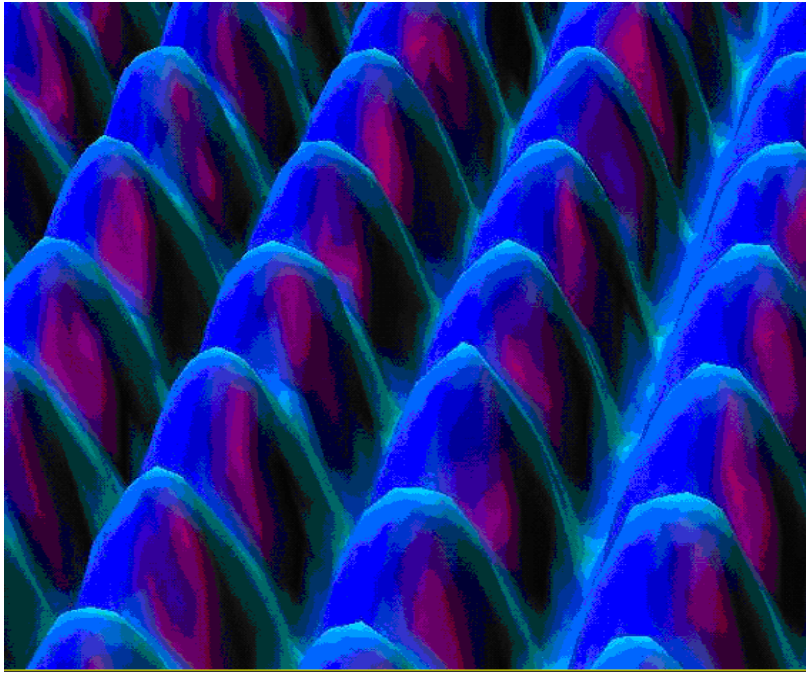
όταν μεταβάλλεται η πίεση που ασκείται στον κρύσταλλο. Αντίστροφα η συμπίεση ή η επιμήκυνση ενός πιεζοηλεκτρικού κρυστάλλου, μεταβάλλεται (γραμμικά) με την τάση στα άκρα του.

**Σχήμα 9.25****Σχηματική παράσταση του σαρωτικού μικροσκοπίου σήραγγος (STM)**

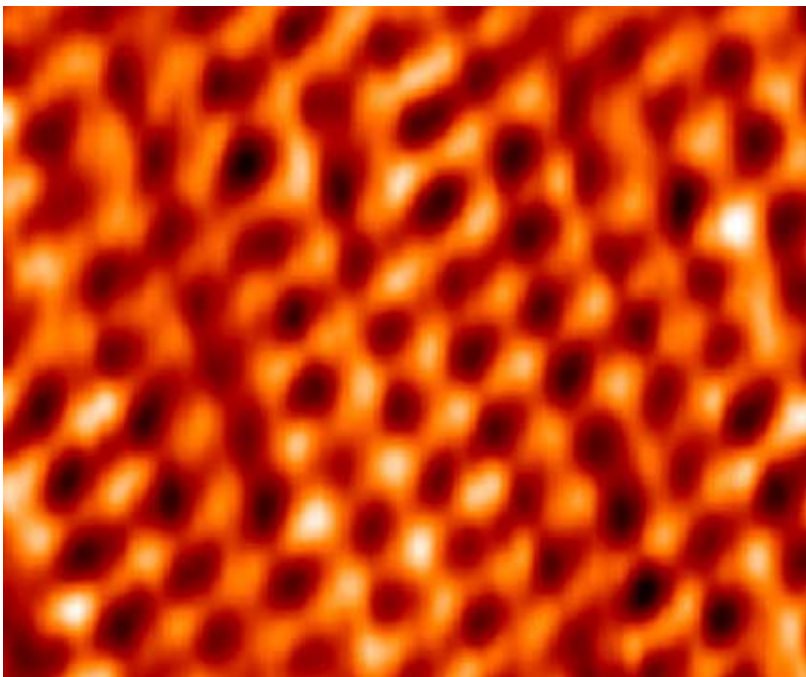
Η ακίδα, μετακινείται με σταθερό ρυθμό από την μονάδα ελέγχου και σάρωσης και διατηρείται σε σταθερή απόσταση από το δείγμα μέσω του συστήματος πιεζοηλεκτρικών κρυστάλλων.

Ο έλεγχος του πιεζοηλεκτρικού συστήματος καθορίζεται από το ρεύμα, το οποίο δημιουργείται από τα ηλεκτρόνια που αποσπώνται από το δείγμα λόγω του κβαντομηχανικού φαινομένου σήραγγος (μετά την ενίσχυσή του). Για τον σκοπό αυτό (για την εκδήλωση του φαινομένου σήραγγος) το δείγμα βρίσκεται κάτω από ηλεκτρική τάση. Η εικόνα που φαίνεται στην μονάδα απεικόνισης κάτω δεξιά, είναι πραγματική εικόνα STM ατομικών συσσωματωμάτων χρυσού διαμέτρου 4nm , πάνω σε επιφάνεια GaAs.

Μ' αυτό τον τρόπο μπορούμε να διακρίνουμε άτομα στην επιφάνεια ενός μετάλλου, όπως φαίνεται με περισσότερη λεπτομέρεια στο σχήμα 9.26. Η διακριτική ικανότης του ηλεκτρονικού μικροσκοπίου σάρωσης είναι της τάξεως $1\text{-}2 \text{ \AA}$. Ο τρόπος με τον οποίο διακρίνουμε τις λεπτομέρειες (ατομικών διατάσεων) με το σαρωτικό μικροσκόπιο σήραγγος είναι ανάλογος με τον τρόπο κατά τον οποίο ένας τυφλός



(α)



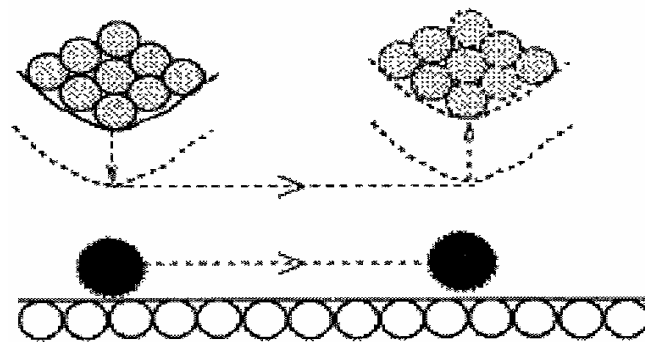
(β)

Σχήμα 9.26

*Εικόνες ατόμων σε μεταλλικές επιφάνειες, με το σαρωτικό μικροσκόπιο σήραγγος.
(α) Πάνω στην τέλεια (χωρίς ανωμαλίες και αλλοιώσεις) επιφάνεια του Νικελίου, με δείκτες προσανατολισμού [110] διακρίνονται πολύ καθαρά τα άτομα του Νικελίου σε ιδανική τετραγωνική διάταξη.
(β) Στην επιφάνεια του Νικελίου υπάρχουν ανωμαλίες και αλλοιώσεις, οι οποίες διακρίνονται ως σκούρα κηλίδες στην εικόνα.*

(β) Άτομα στην επιφάνεια του κρυστάλλου MoS_2 εμβολιασμένου με αρνητικά ιόντα. Οι φωτεινότερες ζ περιοχές αντιστοιχούν σε άτομα S, ενώ οι σκοτεινότερες σε άτομα Mo.

αντιλαμβάνεται τα εμπόδια στον δρόμο του, ακουμπώντας τα με το μαστούνι του. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι σε αντίθεση με τα οπτικά μικροσκόπια, τα οποία στηρίζουν την λειτουργία τους στην όραση, τα σαρωτικά μικροσκόπια σήραγγος στηρίζουν την λειτουργία τους στην αφή... Ουσιαστικά δεν βλέπουμε τα άτομα, αλλά τα «ακουμπάμε»!... Για την ακρίβεια δεν τα ακουμπάμε αλλά τα πλησιάζουμε πάρα πολύ κοντά, σε απόσταση που μπορεί να είναι μικρότερη από 1 Å. Το σαρωτικό μικροσκόπιο σήραγγας ανακαλύφθηκε από τους Gerd Binnig και Heinrich Rocher το 1981, οι οποίοι βραβεύτηκαν με το βραβείο Nobel το 1986. Με την ίδια κεντρική ιδέα του σαρωτικού μικροσκοπίου σήραγγας (δηλαδή την τεχνική της λεπτής ακίδας, με άκρη που απολήγει σε ένα άτομο) άλλοι ερευνητές, με πρωτεργάτη των D. Eigler στα εργαστήρια της IBM, επέτυχαν να μετακινήσουν προσροφημένα άτομα από μία θέση, σε άλλη θέση της επιφανείας (σχήμα 9.27).



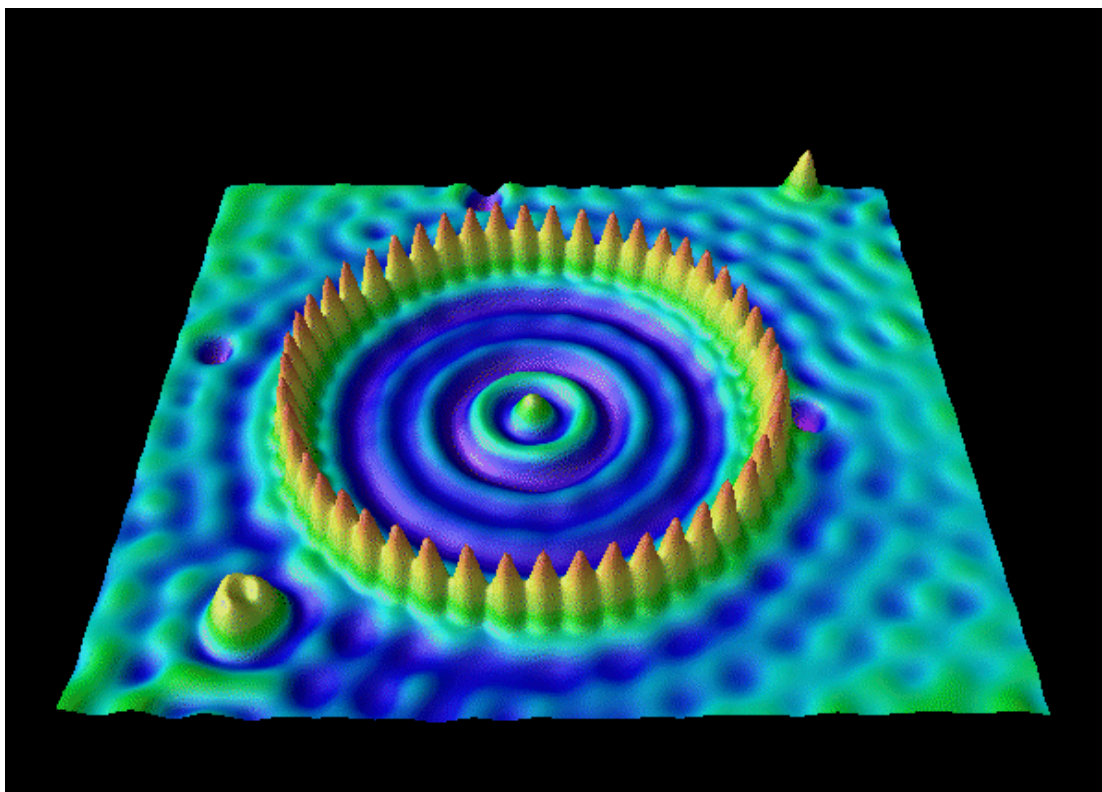
Σχήμα 9.27

Μετακινώντας προσροφημένα άτομα από μια θέση σε άλλη με την τεχνική της «ατομικής ακίδας» την οποία χρησιμοποιεί το σαρωτικό μικροσκόπιο σήραγγος (STM).

Πλησιάζοντας την ακίδα πάνω από ένα προσροφημένο (ξένο) άτομο σε μια επιφάνεια, μπορούμε να το «σύρουμε» σε μια νέα θέση. Εάν απομακρύνουμε κατόπιν αργά-αργά την ακίδα το άτομο παραμένει στη νέα του θέση.

(από την δημοσίευση των Eigler και Schweizer στο επιστημονικό περιοδικό Nature, σελίδα 524, τόμος 344 του 1990).

Σχημάτισαν έτσι, με προσροφημένα άτομα πάνω σε κρυσταλλικές επιφάνειες γράμματα της αλφαβήτου σε ατομική κλίμακα. Κατάφεραν μάλιστα να σχηματίσουν με άτομα Ξένου, τα αρχικά *IBM* πάνω σε μεταλλικό υπόστρωμα. Πιο εντυπωσιακά ακόμη είναι τα «κβαντικά κοράλλια», όπως αυτό του σχήματος 9.28, στο οποίο φαίνονται καθαρά τα φαινόμενα συμβολής των ηλεκτρονικών κυμάτων στην επιφανείας χαλκού με δείκτες προσανατολισμού [111].



Σχήμα 9.28

«Κβαντικά κοράλλια» φτιαγμένα από άτομα *Fe* σε κυκλική διάταξη πάνω σε επιφάνεια χαλκού με προσανατολισμό [111].

Το κυκλικό φράγμα των ατόμων σιδήρου περιορίζει τα κύματα *De Broglie* των ηλεκτρονίων της επιφάνειας του χαλκού μέσα στην κυκλική περιοχή. Σαν αποτέλεσμα, σχηματίζονται διδιάστατα στάσιμα ηλεκτρονικά κύματα, ανάλογα προς τα μονοδιάστατα στάσιμα κύματα του σχήματος 9.6. Το φράγμα των ατόμων σιδήρου, πάνω στο οποίο τα ηλεκτρονικά κύματα σχηματίζουν κόμβους, είναι στην ουσία ένα (περίπου) απειρόβαθο κυκλικό φράγμα δυναμικού.,

Τα κυκλικά στάσιμα κύματα στο κέντρο της εικόνας είναι πραγματικές STM φωτογραφίες των ηλεκτρονικών κυμάτων που δημιουργούνται στην επιφάνεια λόγω του περιορισμού τους από το κυκλικό φράγμα των ατόμων σιδήρου. Τα στάσιμα αυτά κύματα είναι η υλοποίηση στις δύο διαστάσεις των «αφηρημένων» στασίμων κυμάτων του σχήματος 9.6 τα οποία προέρχονται από τον περιορισμό των ηλεκτρονίων μέσα σε ένα μονοδιάστατο απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού.

Κλείνοντας εδώ την συζήτηση για την απεικόνιση σε ατομική κλίμακα, θα πρέπει να αναφέρουμε ακόμη ότι με πιο σύγχρονες τεχνικές, οι οποίες βασίζονται στην παραγωγή femtosecond παλμών λέιζερ, δηλαδή παλμών εξαιρετικά βραχείας διάρκειας 10^{-15} sec, έχει γίνει δυνατόν όχι μόνο να «βλέπουμε» μεμονωμένα άτομα, αλλά να μπορούμε σε μερικές περιπτώσεις, υπό κατάλληλες συνθήκες, να απεικονίζουμε την κίνησή τους σε μορφή κινηματογραφικής ταινίας. Για την ανάπτυξη αυτής της τεχνικής, με την οποία μπορούμε για παράδειγμα να παρακολουθήσουμε τον σχηματισμό ή το «σπάσιμο» χημικών δεσμών σε συγκεκριμένες χημικές αντιδράσεις, δόθηκε το βραβείο Nobel 1999 στον Ahmed Zewail του τεχνολογικού ινστιτούτου της Καλιφόρνιας, ΗΠΑ.

9.4 Αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg

9.4.1 Εντοπισμένα κύματα και σωμάτια

Μία από τις κυριότερες λογικές αντιρρήσεις στην μέχρι τώρα εικόνα των υλικών κυμάτων είναι η φαινομενική αντίφαση μεταξύ του «εντοπισμένου» και «συγκεντρωμένου» τρόπου μεταφοράς ενέργειας και ορμής από τα υλικά σωμάτια (τα οποία «κουβαλούν» την ενέργεια και ορμή «επάνω τους»), σε σχέση με τον «εκτεταμένο» και «διάσπαρτο» τρόπο μεταφοράς ενέργειας και ορμής από τα συνηθισμένα κύματα. Εκτός από τα κύματα της θάλασσας (τα οποία μας φαίνονται αλλά δεν είναι), «συνηθισμένα» κύματα θεωρούνται τα ιδανικά αρμονικά (ημιτονοειδή ή συνημιτονοειδή) κύματα, της μορφής $\psi(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$, τα οποία απλώνονται σ' όλο τον χώρο. Σε τέτοιες ιδανικές περιπτώσεις ο χώρος ή το μέσο διαδόσεως θεωρείται ομοιογενές και ισότροπο. Δηλαδή, χωρίς ανομοιογένειες και εμπόδια. Τέτοιου είδους κύματα έχουν ελάχιστο ενδιαφέρον. Τα πιο ενδιαφέροντα κυματικά φαινόμενα αφορούν κύματα που συναντούν εμπόδια, ανωμαλίες, και ανομοιογένειες. Οι ανομοιογένειες μπορεί να είναι μεμονωμένες, διακριτές και διασκορπισμένες ή κατανεμημένες και συμπαγείς. Μεμονωμένα εμπόδια στον δρόμο των κυμάτων δίνουν τα χαρακτηριστικά

φαινόμενα ανάκλασης, περίθλασης και συμβολής (εφόσον το μήκος κύματος είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τις διαστάσεις των εμποδίων). Εάν τα εμπόδια είναι συμπαγή και αδιαπέραστα, οπότε παρουσιάζουν άπειρη αντίσταση στην διάδοση του κύματος, έχουμε το σχηματισμό στασίμων κυμάτων λόγω συμβολής του αρχικού με το ανακλώμενο κύμα. Τα στάσιμα κύματα είναι φυσικά περιορισμένα και εντοπισμένα ανάμεσα στα εμπόδια (δείτε το παράδειγμα του σωματίου σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού και τα αντίστοιχα στάσιμα κύματα στο σχήμα 9.6, ή τα στάσιμα κύματα των ηλεκτρονίων στο «κβαντικό κοράλλι» του σχήματος 9.28) για όλες τις χρονικές στιγμές, ενώ η αντίστοιχη κίνηση των υλικών σωματιδίων είναι «περατωμένη». Τα σωματάρια, δηλαδή δεν μπορούν να διαφύγουν στο άπειρο.

Απ' την άλλη μεριά οι κατανεμημένες ανομοιογένειες οδηγούν στην διασπορά ή διασκεδασμό. Η διασπορά, η οποία εμφανίζεται σε «διασπορικά» ή ανομοιογενή μέσα (όπως τα κρυσταλλικά στερεά) εκδηλώνεται με εξάρτηση της ταχύτητας διαδόσεως από το μήκος κύματος. Σαν αποτέλεσμα, κάτω από κατάλληλες συνθήκες έχουμε τον σχηματισμό «κυματοπακέτων» ή ομάδας κυμάτων, τα οποία αποτελούνται από μεγάλο πλήθος αρμονικών κυμάτων με «κοντινές» συχνότητες. Τα κυματοπακέτα είναι εντοπισμένα, για μια δοσμένη χρονική στιγμή, σε μια περιοχή του χώρου Δx , αλλά κινούνται ελεύθερα σαν σύνολο καθώς περνά ο χρόνος. Η αντίστοιχη κίνηση των σωματιδίων είναι «μη-περατωμένη». Και στις δύο περιπτώσεις τα αντίστοιχα υλικά κύματα αποτελούνται από περισσότερες από μία συνιστώσες. Και στις δύο περιπτώσεις (περατωμένη και μη περατωμένη κίνηση- στάσιμα κύματα και κυματοπακέτα) τα αντίστοιχα κύματα είναι εντοπισμένα και, κατά περίπτωση, εντοπισμένα και περιορισμένα ή εντοπισμένα και ελεύθερα. Το χάσμα μεταξύ αυτού του είδους των κυμάτων και των σωματιδίων δεν είναι τόσο αγεφύρωτο όσο φαινόταν πριν.

Τα παραδείγματα και τις εφαρμογές υλικών κυμάτων που είδαμε μέχρι τώρα για «μικροσκοπικά» συστήματα (όπου και εστιάζεται η προσοχή μας, αφού τα αντίστοιχα μακροσκοπικά δεν έχουν σημασία, λόγω του εξαιρετικά μικρού μήκους κύματος) ανήκουν και στις δύο κατηγορίες:

(α) Τα παραδείγματα με το άτομο υδρογόνου και το σωματάρια σε «κουτί» αντιστοιχούν σε περατωμένη κίνηση με στάσιμα κύματα.

(β) Τα παραδείγματα περίθλασης και η εφαρμογή στο ηλεκτρονικό μικροσκόπιο αντιστοιχούν σε ομάδες κυμάτων και μη-περατωμένη κίνηση.

Και στις δύο περιπτώσεις, όπως θα δείξουμε παρακάτω, το εύρος των αντίστοιχων περιοχών εντοπισμού συνδέεται (αντιστρόφως ανάλογα) με το εύρος της περιοχής των μηκών κύματος (ή των αντίστοιχων κυματαριθμών) των κυμάτων που απαρτίζουν το σύνθετο κύμα. Αυτού του είδους η συσχέτιση για τα υλικά κύματα, οδηγεί σε συσχέτιση της περιοχής εντοπισμού του κύματος (και κατά συνέπεια και του σωματιδίου) με την περιοχή μέσα στην οποία βρίσκεται η ορμή του σωματιδίου.

9.4.2 Αβεβαιότητα και Εντοπισμός: Αρχή της αβεβαιότητας

Είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο ότι έχουμε δύο μεγάλες κατηγορίες «εντοπισμένων» «υλικών» κυμάτων: (α) κύματα στα οποία ο «εντοπισμός» προκαλείται από τα φυσικά εμπόδια ή τους χωρικούς περιορισμούς του προβλήματος (στάσιμα κύματα) και (β) κύματα τα οποία συντίθενται από (ή μπορούν να αναλυθούν σε) μεγάλο αριθμό (άπειρο) αρμονικών κυμάτων⁹⁴. Και στις δύο περιπτώσεις (που ουσιαστικά δεν είναι ανεξάρτητες) το σωματίο που είναι συνδεδεμένο με το κύμα βρίσκεται εντοπισμένο στην ίδια περιοχή του χώρου όπου είναι εντοπισμένο και το κύμα. Είναι λοιπόν προφανές ότι μόνο τέτοιου είδους εντοπισμένα κύματα μπορεί να περιγράφουν τα σωματίδια του μικρόκοσμου. Παρόλο τον εντοπισμό του υλικού κύματος, επειδή οι διαστάσεις των σωματιδίων είναι συνήθως κατά πολύ μικρότερες της περιοχής εντοπισμού, Δx , του κύματος, η περιοχή αυτή αποτελεί και ένα μέτρο της αβεβαιότητας για την ακριβή θέση, x , του σωματιδίου. Κατ' αυτόν τον τρόπο *η θέση, x , του σωματιδίου έχει πάντα μία αβεβαιότητα, ή απροσδιοριστία, της ίδιας τάξης μεγέθους με την περιοχή εντοπισμού Δx του κύματος*. Όμως, όπως είναι γνωστό από την Κυματική (και όπως θα δούμε παρακάτω) η διασπορά στη θέση του κυματοπακέτου (και κατά συνέπεια του σωματιδίου) συνδέεται με την διασπορά των μηκών κύματος (ή των κυματικών αριθμών) των αρμονικών κυμάτων που συνθέτουν το κύμα. Απ' την άλλη μεριά, η διασπορά των μηκών κύματος συνδέεται, κατά τον de Broglie, με την διασπορά ή την απροσδιοριστία της ορμής του σωματιδίου. *Με άλλα λόγια μπορούμε να πούμε ότι όταν περιγράφουμε ένα σωματίο με βάση το (σύνθετο) κύμα που το συνοδεύει (ή που του αντιστοιχεί κατά de Broglie) υπάρχει πάντα μια απροσδιοριστία στη θέση του σωματιδίου, η οποία συνδέεται με την αντίστοιχη απροσδιοριστία στην ορμή του*. Όπως θα δούμε παρακάτω, αυτές οι δύο

⁹⁴ Και τα στάσιμα κύματα είναι μία ειδική περίπτωση σύνθεσης δύο αρμονικών κυμάτων, όπως είδαμε νωρίτερα.

ποσότητες (οι δύο απροσδιοριστίες) είναι αντιστρόφως ανάλογες, σύμφωνα με την **αρχή της απροσδιοριστίας** ή **αρχή της αβεβαιότητας** (uncertainty principle).

9.4.3 Σγέσεις Αβεβαιότητας και στάσιμα κύματα

Ας θεωρήσουμε για μια ακόμη φορά το παράδειγμα του εδαφίου 9.2.3 για ένα σωματίο μέσα σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού και ας εξετάσουμε τις ιδιότητες εντοπισμού του σωματίου καθώς και των αντιστοίχων υλικών κυμάτων. Είναι λίγο-πολύ προφανές ότι η περιοχή εντοπισμού του σωματίου συμπίπτει με το εύρος του L του πηγαδιού. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε αμέσως $\Delta x=L$.

Για να βρούμε το αντίστοιχο εύρος εντοπισμού, την διασπορά, της ορμής του σωματίου ας εστιάσουμε την προσοχή μας στην σχέση (9.37) η οποία καθορίζει τις δυνατές τιμές του μήκους κύματος. Η μεγαλύτερη τιμή του μήκους κύματος, η οποία αντιστοιχεί στην μικρότερη δυνατή ορμή του σωματίου βρίσκεται (για $n=1$) ίση προς:

$$\lambda_1 = 2L = 2(\Delta x) \text{ και ο αντίστοιχος κυματαριθμός } k_1 = \frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{(\Delta x)} \quad (9.46),$$

ενώ το μέτρο της ορμής του σωματιδίου θα είναι $|\vec{p}_1| = \hbar k_1 = \frac{\hbar \pi}{(\Delta x)} \quad (9.47).$

Όπως φαίνεται στο σχήμα 9.5, το σύνθετο (στάσιμο) κύμα που περιγράφει το σωματίο αποτελείται από ένα κύμα που διαδίδεται προς την θετική φορά του άξονα x με κυματικό αριθμό $+k_1$ και ορμή $+p$, και ένα κύμα που διαδίδεται προς την αρνητική φορά του άξονα x με κυματαριθμό $-k_1$ και ορμή $-p$. Άρα η συνολική διασπορά (αβεβαιότητα) στην ορμή του σωματιδίου θα είναι:

$$(\Delta p) = +|\vec{p}_1| - (-|\vec{p}_1|) = 2|\vec{p}_1| = 2\hbar k_1 = \frac{\hbar(2\pi)}{(\Delta x)} = \frac{h}{(\Delta x)} \quad (9.48),$$

$$\text{ή } (\Delta p) \times (\Delta x) = h \quad (9.49) \quad \text{**αρχή της αβεβαιότητας** .}$$

Φαίνεται λοιπόν ότι σε πειράματα που εκδηλώνεται η κυματική συμπεριφορά των σωματιδίων (η οποία περιγράφεται από τα αντίστοιχα κύματα de Broglie) υπάρχει πάντα μια αβεβαιότητα (απροσδιοριστία) στην ορμή και στη θέση του σωματιδίου. Οι δύο αυτές αβεβαιότητες είναι αντιστρόφως ανάλογες (**αρχή της αβεβαιότητας**). Αυτό τουλάχιστον προκύπτει για «δέσμια» σωματία τα οποία εκτελούν «περατωμένη» κίνηση και αντιστοιχούν σε στάσιμα κύματα. Η αρχή της αβεβαιότητας είναι ένα γενικότερο χαρακτηριστικό, όπως θα δούμε παρακάτω, αφού το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει και για μη δέσμια σωματία, τα οποία αντιστοιχούν σε κυματοπακέτα.

Ερώτηση 9.3

Η επιχειρηματολογία που μας οδήγησε στην (9.49), βασίστηκε στην μικρότερη δυνατή τιμή του n , $n=1$, η οποία αντιστοιχεί στη μικρότερη δυνατή τιμή της ορμής και της ενέργειας. Τι συμβαίνει όμως στην γενικότερη περίπτωση;

Ή, Τι συμβαίνει όμως για μεγαλύτερες τιμές του n ;

Απάντηση

Είναι εύκολο να δούμε ότι για $n=2$ η (9.49) γίνεται:

$$(\Delta p)_2 = 2\hbar k_2 = \frac{2h}{(\Delta x)} \quad \text{ή} \quad (\Delta p) \times (\Delta x) = 2h.$$

Δηλαδή στη γενικότερη περίπτωση⁹⁵ το γινόμενο των απροσδιοριστιών γίνεται μεγαλύτερο από την τιμή της σταθεράς του Planck, h , οπότε στην θέση της ισότητας θα έχουμε στην γενική περίπτωση μια ανισότητα της μορφής:

$$(\Delta p) \times (\Delta x) \geq h \quad (9.50) \quad \textbf{Γενική Σχέση αβεβαιότητας.}$$

Σ' αυτή την ανισο-ισότητα, η ισότητα αντιστοιχεί μόνο στην χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση του σωματιδίου, η οποία (σύμφωνα με την αρχή της αβεβαιότητας) δεν μπορεί να είναι μηδενική. Μπορούμε μάλιστα να υπολογίσουμε την ελάχιστη ενέργεια,

αφού προηγουμένως υπολογίσουμε την αντίστοιχη κινητική ενέργεια $E_{κιν} = \frac{p^2}{2m}$, μετά

από τον προσδιορισμό της ορμής p από την (9.47) ή την (9.48) με βάση την περιοχή εντοπισμού Δx του σωματίου:

$$E_{κιν} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m(\Delta x)^2} \quad (9.51).$$

Την σχέση (9.51) θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα στο εδάφιο 9.4.9 για να υπολογίσουμε την θεμελιώδη κατάσταση μερικών «περατωμένων» συστημάτων.

Θα πρέπει πάντως να θυμηθούμε, πριν θεωρήσουμε το θέμα λήξαν, και πολύ περισσότερο, πριν συζητήσουμε τις συνέπειες και την φυσική ερμηνεία της σχέσεως (9.50), ότι αυτού του είδους η σχέση και ο αντίστοιχος εντοπισμός είναι μόνο η μια όψη του νομίσματος. Υπάρχουν, όπως αναφέραμε νωρίτερα, και άλλοι τρόποι «εντοπισμού»

⁹⁵ Αναφερόμενοι στην αναλογία των ενεργειακών καταστάσεων του σωματίου στο «κουτί», με τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης μιας χορδής σταθερά στερεωμένης στα άκρα της, θα πρέπει να θυμηθούμε ότι η γενικότερη κίνηση της χορδής αντιστοιχεί σε μια γραμμική επαλληλία των κανονικών τρόπων ταλάντωσης της. Κάτι ανάλογο συμβαίνει στην πραγματικότητα και με το σωματίο στο κουτί. Η γενικότερη κίνηση μπορεί να περιγραφεί από επαλληλία διαφορετικών καταστάσεων (με $n=1$, $n=2$, $n=3$, κτλ). Έτσι στην γενικότερη περίπτωση θα έχουμε πάντα μια ανισότητα.

των κυμάτων (και φυσικά και των αντίστοιχων σωματίων) όπου δεν έχουμε στάσιμα κύματα και δέσμια σωματάρια, αλλά κυματοπακέτα και μη-δέσμια σωματάρια. Τι ισχύει σ' αυτές τις περιπτώσεις;

9.4.4 Αβεβαιότητα και θεώρημα εύρους ζώνης για Κυματοπακέτα.

Στ υποκεφάλαιο 9.3 είδαμε ότι η διακριτική ικανότητα των ηλεκτρονικών (όπως και των οπτικών) μικροσκοπιών περιορίζεται από την ασάφεια στη θέση των ηλεκτρονίων που σχηματίζουν το είδωλο πάνω στην φθορίζουσα οθόνη. Είδαμε επίσης ότι η ασάφεια της θέσης εξαρτάται από το μήκος κύματος, δηλαδή από την ορμή των ηλεκτρονίων. Μάλιστα δε, επειδή οι δέσμες των ηλεκτρονίων δεν είναι ποτέ στην πράξη τελείως «μονοχρωματικές» (δηλαδή δεν αποτελούνται αυστηρά από ένα μονάχα μήκος κύματος) θα περιμένουμε οι διακυμάνσεις στη θέση των ηλεκτρονίων να συνδέονται (σχετίζονται) με τις διακυμάνσεις στην ορμή τους. Πράγματι, είναι γνωστό από την Κλασική Κυματική ότι τα μονοχρωματικά αρμονικά κύματα αποτελούν μόνο μια εξιδανίκευση της πραγματικής κυματικής διαταραχής κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις. Για παράδειγμα, ακόμη και τα κύματα τα οποία εκπέμπονται από μια αρμονική «μονοχρωματική» πηγή κάποιας συγκεκριμένης συχνότητας ν_0 , παρουσιάζουν διακυμάνσεις στην συχνότητα και (κατά συνέπεια και) στο μήκος κύματος (π.χ. την απόσταση μεταξύ κόμβων). Το φαινόμενο αυτό οφείλεται στην πεπερασμένη διάρκεια της εκπομπής του κύματος από την πηγή, η οποία έχει σαν συνέπεια την πεπερασμένη έκταση του κύματος και τον σχηματισμό ενός *κυματοπακέτου*. Η πεπερασμένη διάρκεια έχει σαν συνέπεια οι αποστάσεις μεταξύ διαδοχικών κόμβων (μηδενισμών της κυματικής διαταραχής) στην «ουρά» του κύματος να μην είναι ίδια με την αντίστοιχη απόσταση κόμβων στο κέντρο του κύματος. Η μαθηματική διατύπωση αυτού του φαινομένου εκφράζεται από το γεγονός ότι ένα καθαρά μονοχρωματικό αρμονικό κύμα (με συχνότητα ν_0 , μήκος κύματος λ_0 , ή κυκλική συχνότητα ω_0 και κυματαριθμό $k_0 = 2\pi/\lambda_0$) της μορφής $A \cos(k_0 x - \omega_0 t)$ πεπερασμένης έκτασης L , αναπτύσσεται κατά Fourier⁹⁶ σε άπειρο άθροισμα μονοχρωματικών αρμονικών κυμάτων (άπειρης έκτασης) με κυματαριθμούς k (ή συχνότητες ω , ή μήκη κύματος λ κτλ) που κατανέμονται με συνεχή τρόπο μέσα σε μια ζώνη *κυματαριθμών* εύρους Δk γύρω από τον κυματικό αριθμό k_0 (ή ζώνης συχνοτήτων εύρους $\Delta \omega$ γύρω από την συχνότητα ω_0). Ένα πεπερασμένο αρμονικό κύμα περιγράφεται μαθηματικά από την σχέση:

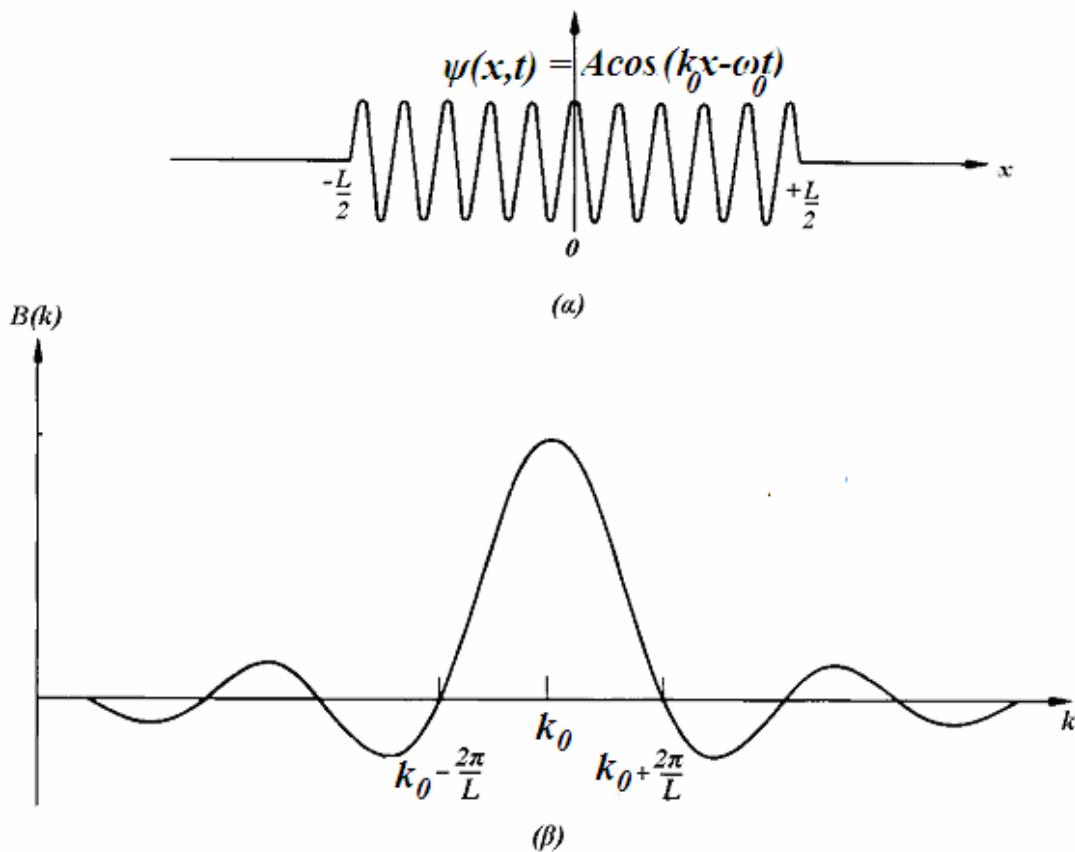
$$\psi(x,t) = \begin{cases} A \cos(k_0 x - \omega_0 t) & -\frac{L}{2} \leq x \leq +\frac{L}{2} \\ 0 & x < -\frac{L}{2}, \eta' x > \frac{L}{2} \end{cases} \quad (9.52),$$

ενώ η αντίστοιχη έκφραση του σύνθετου κύματος σαν συνεχές άθροισμα (ολοκλήρωμα) συνηθισμένων αρμονικών κυμάτων (με άπειρη έκταση) έχει τη μορφή:

$$\psi(x,t) = \int_0^{+\infty} B(k) \cos(kx - \omega t) dk \quad (9.53).$$

Στην σχέση (9.53), το πλάτος του αρμονικού κύματος με κυματαριθμό μεταξύ k και $k+dk$ είναι $B(k)dk$ και υπολογίζεται με κατάλληλη επεξεργασία και αντικατάσταση στην (9.52)

Το πεπερασμένο αρμονικό κύμα καθώς και η κατανομή των πλατών $B(k)$ των αρμονικών κυμάτων, που το απαρτίζουν απεικονίζονται στο σχήμα 9.29.



Σχήμα 9.29

Στιγμιότυπο του πεπερασμένου κύματος $\Psi(x,t)$ της μορφής (9.52), (α)

⁹⁶ Δείτε στο υποκεφάλαιο 7.5 του βιβλίου «Ταλαντώσεις και Κύματα» Α. Ζδέτση, το παράδειγμα 7.4.

και της αντίστοιχης κατανομής πλατών των αρμονικών κυμάτων στην (9.53), (β).

Το πεπερασμένο αρμονικό κύμα (α) είναι «εντοπισμένου» μέσα σε μια περιοχή $\Delta x = L$, ενώ τα πλάτη $B(k)$ είναι εντοπισμένα σε μια περιοχή $2\Delta k$, όπου $\Delta k = 2\pi/L$. (β).

Έτσι έχουμε $(\Delta x)(\Delta k) = 2\pi$ (θεώρημα εύρους ζώνης).

Μπορούμε να αντιληφθούμε από φυσικής πλευράς ότι το μεγάλο πλήθος των άλλων συνιστωσών, οι οποίες εκτείνονται από $-\infty$ μέχρι $+\infty$, χρειάζεται σε τρόπον ώστε να συμβάλουν καταστρεπτικά έξω από την περιοχή εντοπισμού Δx , εκεί όπου η διαταραχή είναι μηδέν (εξ ορισμού). Από την άλλη μεριά οι ίδιες συνιστώσες στο εσωτερικό του κυματοπακέτου (μέσα στην περιοχή εντοπισμού) δεν θα πρέπει να αλλάζουν σημαντικά την εικόνα του ενός και μοναδικού κυματαριθμού (ή της μιας και μοναδικής συχνότητας ν_0). Άρα, οι συνιστώσες θα πρέπει να έχουν κυματικούς αριθμούς «κοντά» στον κυματικό αριθμό k_0 μέσα σε μια ζώνη εύρους Δk γύρω από τον κυματικό αριθμό k_0 (συχνότητες κοντά στην συχνότητα ν_0 μέσα σε μια περιοχή $\Delta \nu$ γύρω από την ν_0). Από το σχήμα βλέπουμε ότι ισχύει:

$$(\Delta x)(\Delta k) = 2\pi \quad (9.54).$$

Η σχέση αυτή, όπως θα δούμε και παρακάτω είναι γνωστή και ως **θεώρημα εύρους ζώνης** και είναι ισοδύναμη⁹⁷ με την (9.49), η οποία εκφράζει **την αρχή της αβεβαιότητας**.

Αντίστροφα, επαλληλία κυμάτων με γειτονικές συχνότητες ή γειτονικούς κυματαριθμούς οδηγεί στον σχηματισμό «εντοπισμένων» κυμάτων ή κυματοπακέτων. Για παράδειγμα στο σχήμα 9.30 έχουμε ένα απλό παράδειγμα επαλληλίας επτά κυμάτων με γειτονικούς κυματικούς αριθμούς (οι οποίοι διαφέρουν κατά μία μονάδα ο ένας από τον άλλο) γύρω από έναν κεντρικό κυματαριθμό $k_0 = 12 \text{ cm}^{-1}$, στον οποίο αντιστοιχεί το μεγαλύτερο πλάτος. Όπως παρατηρούμε στο σχήμα, η συνισταμένη κυματομορφή μπορεί να θεωρηθεί προσεγγιστικά σαν ένα «διαμορφωμένο κύμα» αποτελούμενο από ένα περίβλημα, το οποίο κινείται με μια μέση ταχύτητα $v_g = \frac{(\Delta \omega)}{(\Delta k)}$ (9.55),

μέσα στο οποίο μέσα στο οποίο ταξιδεύουν διάφορες συνιστώσες (με φασική ταχύτητα $v_\phi = \frac{\omega}{k}$). Η ταχύτητα του περιβλήματος, δηλαδή του συνόλου των κυμάτων σαν ομάδας, στην (9.55) είναι γνωστή ως **ταχύτητα ομάδας** και προφανώς δεν είναι

⁹⁷ από την $p = \hbar k$ προκύπτει $(\Delta p) = \hbar(\Delta k)$.

ταυτίζεται με την φασική ταχύτητα κάποιας από τις αρμονικές κυματικές συνιστώσες.

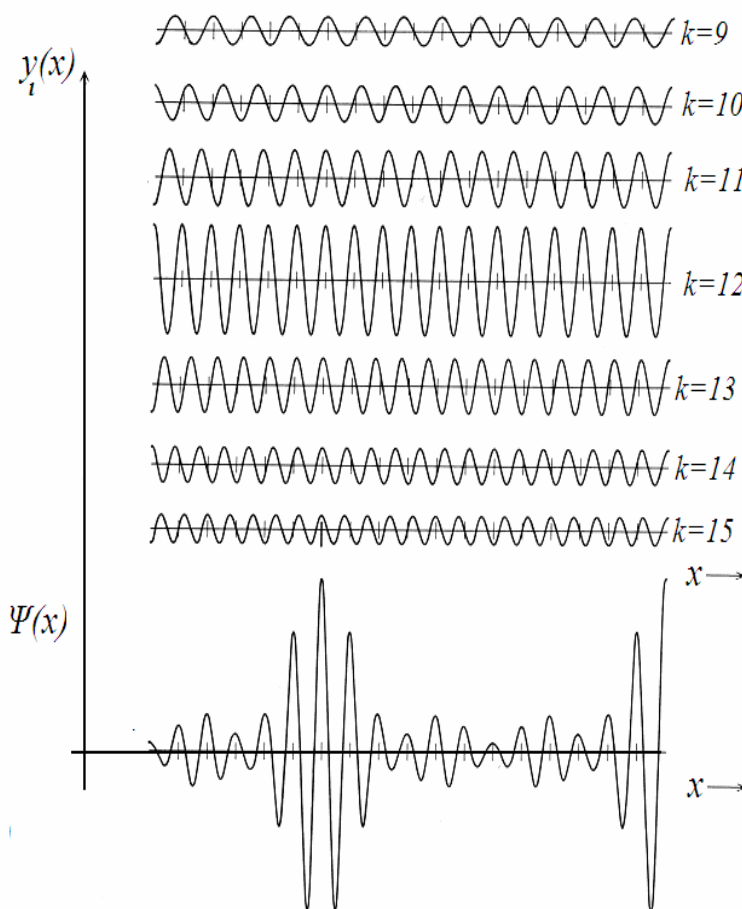
Από το σχήμα βλέπουμε ότι η έκταση του περιβλήματος Δx είναι ίση περίπου προς $4\lambda_0$,

$\Delta x \cong 4\lambda_0 \cong 4 \frac{2\pi}{k_0}$. Το αντίστοιχο εύρος των κυματαριθμών είναι $\Delta k = (15-12) = 3 \text{ cm}^{-1}$ ή

$\Delta k = \frac{k_0}{4}$. Παρατηρούμε πως αν θεωρήσουμε (με κάποια ελαφρότητα) το μήκος

$\Delta x \cong 4\lambda_0 \cong 4 \frac{2\pi}{k_0}$ σαν την περιοχή εντοπισμού του κύματος, θα έχουμε και πάλι την

σχέση $(\Delta x)(\Delta k) = 2\pi$ (θεώρημα εύρους ζώνης).



Σχήμα 9.30

Άθροισμα επτά κυμάτων με γειτονικούς κυματικούς αριθμούς γύρω από έναν κεντρικό κυματαριθμό $k_0 = 12 \text{ cm}^{-1}$, θεωρώντας ότι οι αποστάσεις x μετρούνται σε cm .

Το άθροισμα των κυμάτων, στο κάτω μέρος του σχήματος, παρουσιάζει περιοχές μέγιστου και ελάχιστου εντοπισμού. Από το σχήμα βλέπουμε ότι το εύρος «εντοπισμού» Δx είναι

περίπου ίσο με 4 μήκη κύματος λ_0 , $\Delta x \cong 4 \frac{2\pi}{k_0}$, ενώ το είναι το εύρος της ζώνης των

κυματαριθμών είναι: $\Delta k = (15-12) = 3 \text{ cm}^{-1} = \frac{k_0}{4}$. Έτσι έχουμε και πάλι $(\Delta x)(\Delta k) = 2\pi$

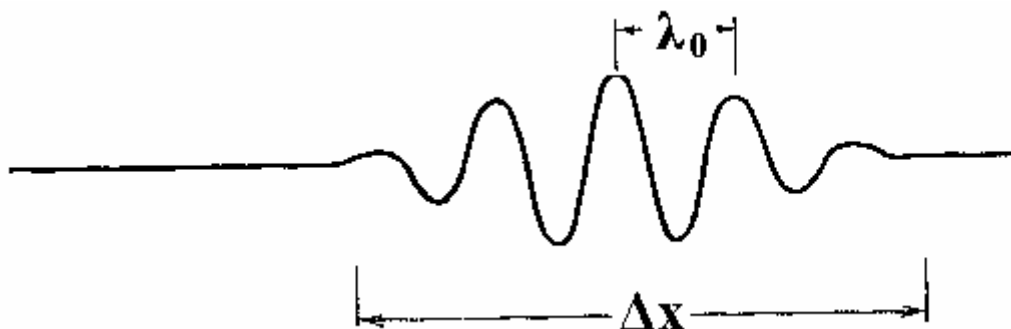
(θεώρημα εύρους ζώνης).

Όμως το άθροισμα των κυμάτων στο σχήμα 9.30 είναι ένα περιοδικό κύμα για το οποίο δεν μπορούμε να μιλάμε αυστηρά για εντοπισμό. Μόνο στο όριο όπου το πλήθος των κυμάτων τείνει στο άπειρο, ενώ οι διαφορές μεταξύ κυματαριθμών τείνουν στο μηδέν (όπως και τα διαδοχικά πλάτη των αρμονικών κυμάτων) το κύμα εντοπίζεται πραγματικά σε μια περιοχή του χώρου εύρους $\Delta x \sim 1/\Delta k$, όπου Δk το εύρος της ζώνης των κυματαριθμών. Στο σχήμα 9.31 φαίνεται ένα πραγματικά εντοπισμένο κύμα, το οποίο είναι επαλληλία ενός απείρου πλήθους αρμονικών κυμάτων με κυματαριθμούς οι οποίοι κατανέμονται με συνεχή τρόπο σε μια περιοχή εύρους Δk γύρω από μια κεντρική τιμή $k_0 = 2\pi/\lambda_0$.

Τα πλάτη των αρμονικών κυμάτων $B(k)$ τα οποία απαρτίζουν το κυματοπακέτο του

σχήματος 9.31 ακολουθούν μια «Γκαουσιανή» κατανομή της μορφής: $B(k) = Ce^{-\left[\frac{(k-k_0)^2}{2(\Delta k)^2}\right]}$

(9.56),



Σχήμα 9.31

Άθροισμα κυμάτων με γειτονικούς κυματικούς αριθμούς γύρω από έναν κεντρικό Μη-περιοδική κυματομορφή, προερχόμενη από άθροισμα απείρου πλήθους κυμάτων.

Η μορφή αυτή είναι ένα «κυματοπακέτο» με ένα κεντρικό μήκος κύματος λ_0 και έκταση (μήκος εντοπισμού) Δx . Οι κυματαριθμοί των συνιστώντων κυμάτων κατανέμονται με

συνεχή τρόπο γύρω από μια κεντρική τιμή $k_0=2\pi/\lambda_0$, με εύρος Δk . Τα πλάτη των αρμονικών κυμάτων που συνθέτουν το κυματοπακέτο δίνονται από την «Γκαουσιανή» κατανομή (9.56). Το μήκος εντοπισμού Δx είναι ίσο προς το αντίστροφο του εύρους Δk . Δηλαδή:

$$(\Delta x)(\Delta k) \cong 1.$$

γι αυτό και η κυματομορφή ονομάζεται «Γκαουσιανό κυματοπακέτο» (Gaussian wave packet) ή «Γκαουσιανός συρμός κυμάτων» (Gaussian wave train).

Η μορφή του «συρμού κυμάτων» $\Psi(x,t)$ σε κάθε θέση x , και κάθε χρονική στιγμή t θα δίνεται από την (9.53) με αντικατάσταση του πλάτους $B(k)$ από την (9.56).

Η ομάδα των κυμάτων του σχήματος 9.31 αποτελεί ένα Γκαουσιανό συρμό κυμάτων, ο οποίος κινείται σαν σύνολο με μέση ταχύτητα v_g ανάλογη με εκείνη της σχέσεως (9.55), μόνο που τώρα επειδή έχουμε συνεχή κατανομή κυματαριθμών και συχνοτήτων, οι μικρές διαφορές $\Delta\omega$ και Δk γίνονται διαφορικά $d\omega$ και dk και το πηλίκο τους παράγωγος, υπολογισμένη για $k=k_0$:

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} \quad (9.57) \quad \text{\textbf{ταχύτητα ομάδας κυματοπακέτου.}}$$

Εάν το κέντρο του κυματοπακέτου βρίσκεται την χρονική στιγμή $t=0$ στη θέση x_0 , το ίδιο σημείο μετά παρέλευση χρόνου t θα βρίσκεται στη θέση:

$$x = x_0 + v_g t \quad (9.58).$$

Εάν η ταχύτητα ομάδας είναι σταθερή (κάτι που δεν συμβαίνει στα «διασπορικά» μέσα) το εύρος εντοπισμού Δx του κυματοπακέτου παραμένει αμετάβλητο⁹⁸ και ίσο περίπου προς το αντίστροφο του εύρους Δk . Δηλαδή:

$$(\Delta x)(\Delta k) \cong 1 \quad (9.59).$$

Η σχέση (9.59), όπως και η (9.54) είναι διαφορετικές εκφράσεις μιας γενικότερης σχέσης, η οποία είναι γνωστή στην κυματική⁹⁹ ως «**θεώρημα εύρους ζώνης**». Ο παράγοντας 2π στην (9.54) ο οποίος δεν υπάρχει στην (9.59) οφείλεται στον διαφορετικό τρόπο ορισμού της περιοχής εντοπισμού. Η αντίστοιχη προς την (9.49) σχέση αβεβαιότητας γράφεται τώρα:

$$(\Delta p) \times (\Delta x) \cong \hbar \quad (9.60) \quad \text{\textbf{Αρχή αβεβαιότητας για κυματοπακέτα.}}$$

⁹⁸ Αν τα άκρα x_1, x_2 του κυματοπακέτου μετά χρόνο t είναι στις θέσεις x'_1, x'_2 , τότε $x_1 - x_2 = x'_1 - x'_2$.

⁹⁹ Δείτε υποκεφάλαιο 7.5 στο βιβλίο «Ταλαντώσεις και Κύματα», του Α. Ζδέτση.

Ισχύουν, όπως εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε και οι αντίστοιχες σχέσεις για το εύρος της ζώνης συχνοτήτων $\Delta\omega$ σε σχέση με τον «χρονικό εντοπισμό» Δt του κύματος. Δηλαδή:

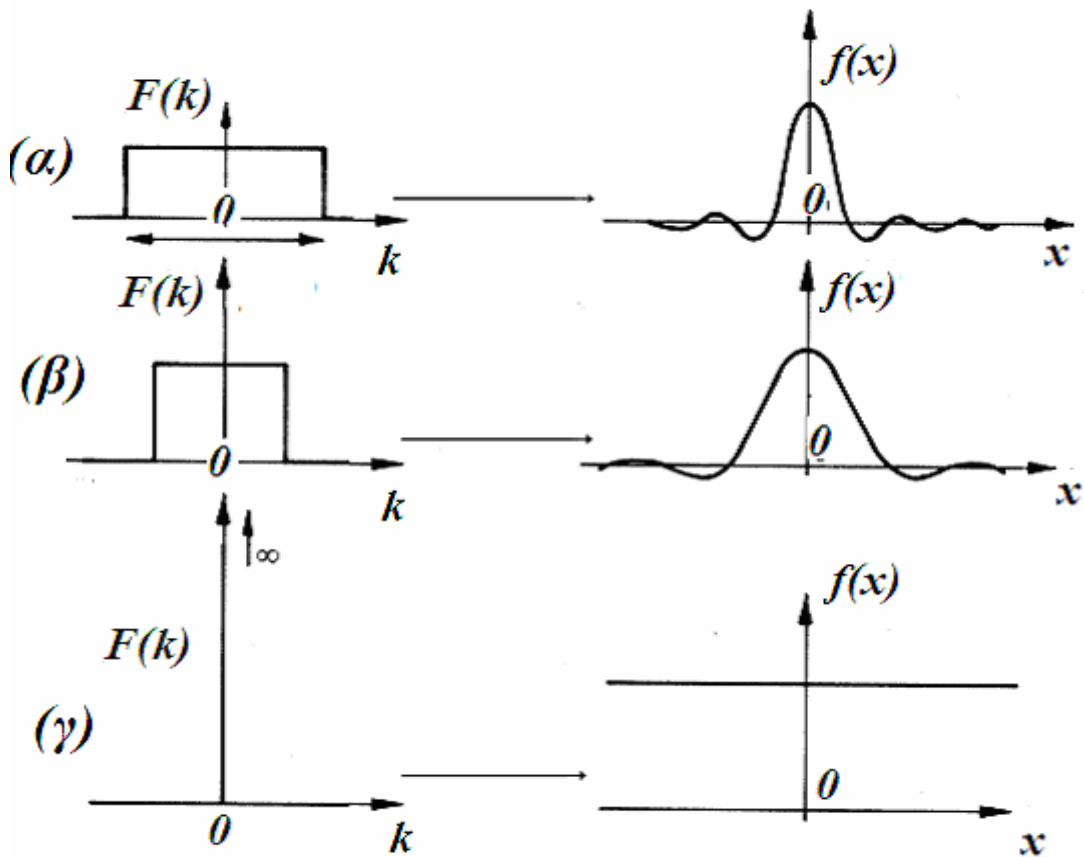
$$(\Delta t)(\Delta\omega) \cong 2\pi \quad \text{ή} \quad (\Delta t)(\Delta\omega) \cong 1 \quad (9.61).$$

Επειδή η ενέργεια και η (κυκλική) συχνότητα των κυμάτων de Broglie συνδέονται με την γνωστή σχέση $E = \hbar\omega$ του Planck, οι σχέσεις (9.61) για τα υλικά κύματα γράφονται:

$$(\Delta E) \times (\Delta t) \cong h \quad \text{ή} \quad (\Delta E) \times (\Delta t) \cong \hbar \quad (9.62) \quad \text{\textit{Αρχή αβεβαιότητας για ενέργεια- χρόνο.}}$$

Όπως θα δούμε παρακάτω, η ερμηνεία αυτής της σχέσης, η οποία συνδέεται με την διάρκεια εκπομπής του κύματος από την πηγή, είναι κάπως διαφορετική από την αντίστοιχη σχέση ορμής-θέσης και σχετίζεται με τον χρόνο ζωής του σωματιδίου.

Το θεώρημα εύρους ζώνης, το οποίο αποδεικνύεται με γενικό τρόπο στην Κυματική Φυσική, συνδέει την διάρκεια του χρόνου εκπομπής του κύματος από την πηγή με το εύρος των συχνοτήτων, όπως και την χωρική έκταση ή «εντοπισμό» του κύματος με το εύρος της ζώνης των κυματαριθμών. Όσο μεγαλύτερη είναι η διάρκεια εκπομπής από την πηγή τόσο πιο μικρή θα είναι η περιοχή συχνοτήτων και αντιστρόφως. Όσον αφορά την χωρική κατανομή του κυματοπακέτου, βλέπουμε πως όσο πιο μεγάλο είναι το εύρος των κυματαριθμών (ή των μηκών κύματος) των κυμάτων τα οποία το απαρτίζουν, τόσο πιο εντοπισμένο θα είναι το κύμα στο χώρο, όπως φαίνεται και στο σχήμα 9.32.



Σχήμα 9.32

Μεταβολή της περιοχής εντοπισμού (της «έκτασης») ενός κύματος (ενός κυματοπακέτου), όπως φαίνεται από το «περίβλημα» του $f(x)$, για διάφορες τιμές του εύρους των κυματαριθμών Δk των αρμονικών κυμάτων τα οποία το απαρτίζουν (α,β,γ).

Τα αρμονικά κύματα έχουν το ίδιο πλάτος $F(k)$, του οποίου το γινόμενο με το εύρος Δk παραμένει σταθερό κατά την μεταβολή και ίσο με την μονάδα.

Όταν το εύρος των κυματαριθμών γίνει μηδενικό (δηλαδή όταν έχουμε αυστηρά ένα μόνο μήκος κύματος, τότε το κύμα εκτείνεται από το $-\infty$ στο $+\infty$ με σταθερό πλάτος.

Μόνο στην περίπτωση μιας ιδανικής αρμονικής πηγής, η οποία εκπέμπει συνεχώς, σταθερά και αδιάλειπτα, στην ίδια συχνότητα ν_0 , δηλαδή $\Delta\nu=0$ (και κατά συνέπεια στο ίδιο μήκος κύματος λ_0 ($\Delta\lambda=0$), στον ίδιο κυματικό αριθμό k_0) οπότε $\Delta k=0$, μόνο τότε μπορούμε να έχουμε αρμονικά κύματα τα οποία εκτείνονται από $-\infty$ έως $+\infty$ ($\Delta x = \infty$) και διαρκούν επ' άπειρον (σχήμα 9.32γ). Όταν μιλάμε για αρμονικά κύματα ή κύματα γενικότερα, συνήθως τέτοιου είδους κύματα έχουμε στο μυαλό μας, τα οποία είναι

απλωμένα σ' όλο τον χώρο και δεν είναι «εντοπισμένα». Δεν πρέπει να ξεχνάμε βέβαια ότι η κυματική διάδοση είναι ένα συνδυασμένο αποτέλεσμα της πηγής, η οποία προκαλεί την διαταραχή και του μέσου, μέσα στο οποίο διαδίδεται η διαταραχή. Θα πρέπει λοιπόν στις προϋποθέσεις για την ιδανική εικόνα του κύματος την οποία έχουμε στο μυαλό μας, να προσθέσουμε ότι θα πρέπει επιπλέον το μέσο διαδόσεως να είναι ομοιογενές και ισότροπο (για τρισδιάστατα κύματα), ώστε να μην υπάρχει ανάκλαση, περίθλαση και διασπορά. Όμως, όπως αναφέραμε και νωρίτερα, τέτοιου είδους κύματα έχουν ελάχιστο ενδιαφέρον. Στα ανομοιογενή μέσα εμφανίζεται εξάρτηση της ταχύτητας διαδόσεως από το μήκος κύματος ή ισοδύναμα. Σαν αποτέλεσμα, και η ταχύτητα ομάδας μεταβάλλεται με τον κυματικό αριθμό k . Τι επιπτώσεις όμως μπορεί να έχει αυτό στο εύρος εντοπισμού Δx του κυματοπακέτου, καθώς περνάει ο χρόνος;

Από τη σχέση (9.58) βλέπουμε ότι αν μια ομάδα κυμάτων την χρονική στιγμή $t=0$ έχει ένα εύρος $(\Delta x)_0$, μετά πάροδο χρόνου t θα έχει ένα εύρος $(\Delta x)_t$, το οποίο θα δίνεται προσεγγιστικά από τη σχέση: $(\Delta x)_t \cong (\Delta x)_0 + (\Delta v_g)t$ (9.63).

Η διαφορά Δv_g υπολογίζεται (προσεγγιστικά) από τη σχέση

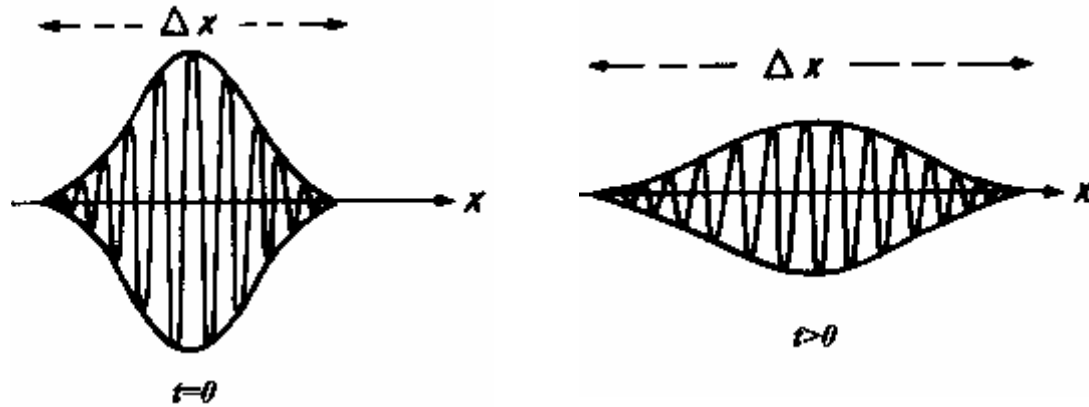
$$\Delta v_g \cong \left(\frac{dv_g}{dk} \right)_0 \cdot (\Delta k) = \left(\frac{d^2\omega}{dk^2} \right)_0 \cdot (\Delta k) \quad (9.64),$$

η οποία βασίζεται στο γεγονός ότι μία ζώνη κυματαριθμών Δk περιέχει μια ζώνη ταχυτήτων ομάδας Δv_g , αφού η ταχύτητα ομάδας εξαρτάται από τον κυματαριθμό k .

Επειδή το εύρος της ζώνης των κυματαριθμών (Δk) είναι αντιστρόφως ανάλογο της αβεβαιότητας στην θέση $(\Delta x)_0$, από τις σχέσεις (9.64) και (9.63) βλέπουμε ότι όσο πιο μεγάλος είναι ο αρχικός εντοπισμός του κυματοπακέτου, όσο πιο μικρή είναι ποσότητα $(\Delta x)_0$, τόσο πιο πολύ «απλώνεται» αργότερα το κυματοπακέτο.

Στο σχήμα 9.33 φαίνεται ο Γκαουσιανός συρμός κυμάτων σε δύο στιγμιότυπα για δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές: $t=0$ και $t>0$.

Όπως βλέπουμε **ο συρμός των κυμάτων, το κυματοπακέτο, «απλώνεται» διαρκώς καθώς ταξιδεύει και απομακρύνεται από την πηγή**



Σχήμα 9.33

Χρονική εξέλιξη ενός Γκαουσιανού συρμού κυμάτων.

Στιγμιότυπα του κύματος για δύο χρονικές στιγμές: 0 (αριστερά) και $t > 0$ (δεξιά).

Καθώς διαδίδεται ο συρμός κυμάτων (προς τη θετική φορά του άξονα x) το εύρος του μεγαλώνει και ο συρμός «διασπείρεται», σύμφωνα με τη σχέση (9.63).

Ο αντίστοιχος χρόνος (Δt), τον οποίο θα χρειασθεί ο συρμός των κυμάτων για να διέλθει από ένα δοσμένο σημείο x θα αυξηθεί ανάλογα. Έτσι, επειδή οι ποσότητες Δk και $\Delta \omega$ είναι σταθερές, οι ισότητες οι οποίες εκφράζουν μαθηματικά το θεώρημα εύρους ζώνης μετατρέπονται σε ανισότητες (όπως και πριν με τα στάσιμα κύματα για «δέσμια» σωμάτια):

$$(\Delta x)(\Delta k) \geq 2\pi \quad (\Delta x)(\Delta k) \geq 1$$

$$(\Delta t)(\Delta \omega) \geq 2\pi \quad \text{ή} \quad (\Delta t)(\Delta \omega) \geq 1 \quad (9.65).$$

Οι παραπάνω σχέσεις για τα υλικά κύματα μετατρέπονται στις σχέσεις απροσδιοριστίας ή αβεβαιότητας, στις οποίες αναφερθήκαμε και προηγουμένως, οι οποίες πλέον ισχύουν για όλα τα σωμάτια δέσμια και μη δέσμια:

$$(\Delta p) \times (\Delta x) \geq \hbar \quad \text{ή} \quad (\Delta p) \times (\Delta x) \geq \hbar \quad (9.66)$$

Σχέσεις Αβεβαιότητας .

$$(\Delta E) \times (\Delta t) \geq \hbar \quad \text{ή} \quad (\Delta E) \times (\Delta t) \geq \hbar \quad (9.67)$$

Το νόημα της (9.67) είναι ότι εάν γνωρίζουμε ότι ένα σωματίο (π.χ. φωτόνιο , ηλεκτρόνιο) ή ένα σύστημα σωματιδίων βρίσκεται σε μια κατάσταση με ενέργεια E για ένα περιορισμένο χρονικό διάστημα Δt , τότε η ενέργεια του περιέχει μια απροσδιοριστία

ΔE τουλάχιστον ίση προς $\hbar/\Delta t$. Αυτό σημαίνει ότι μέσα στο χρονικό διάστημα Δt η διατήρηση της ενέργειας μπορεί να παραβιάζεται κατά ΔE , χωρίς ιδιαίτερα προβλήματα. Η ενέργεια ενός συστήματος μπορεί να είναι καλά καθορισμένη ($\Delta E=0$) μόνο όταν το σύστημα υπάρχει για άπειρο χρονικό διάστημα ($\Delta t \rightarrow \infty$).

Παράδειγμα 9.5

Για παράδειγμα, όταν ένα άτομο διεγείρεται σε μια (διεγερμένη) κατάσταση, μπορεί να εκπέμψει ένα φωτόνιο σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μετά την διέγερση του. Έχει βρεθεί ότι ένας τυπικός μέσος χρόνος αποδιέγερσης του ατόμου είναι της τάξεως των 10^{-8} sec. Τι συνέπειες έχει αυτό για τις φασματικές γραμμές του ατόμου, των οποίων η συχνότητα καθορίζεται από την διαφορά ενέργειας της διεγερμένης από την θεμελιώδη κατάσταση;

Απάντηση

Ο περιορισμένος «χρόνος ζωής» της διεγερμένης κατάστασης οδηγεί σε μια απροσδιοριστία ΔE στην ενέργεια της, $\Delta E \approx \hbar/\Delta t$. Κατά συνέπεια θα υπάρχει στην συχνότητα ν της εκπεμπομένης ακτινοβολίας μια απροσδιοριστία $\Delta \nu$ ίση προς:

$$\Delta \nu = \frac{\Delta E}{h} \approx \frac{\hbar}{h(\Delta t)} \approx \frac{h}{h(2\pi)(\Delta t)} \approx \frac{1}{(2\pi)(\Delta t)} \approx 4 \times 10^6 \text{ sec}^{-1} \quad (\text{για } \Delta t = 10^{-8} \text{ sec}) \quad (9.68).$$

Όπως έχουμε δει νωρίτερα (κεφάλαια 7,8) οι συχνότητες της ορατής περιοχής του φάσματος είναι της τάξης μεγέθους των 10^{14} sec^{-1} . Για παράδειγμα η κίτρινη γραμμή του Νατρίου με μήκος κύματος 5890 \AA αντιστοιχεί σε συχνότητα $\nu = 5.1 \times 10^{14} \text{ sec}^{-1}$.

Λόγω της (9.68) αυτή η γραμμή έχει ένα **πάχος** $\Delta \nu = 4 \times 10^6 \text{ sec}^{-1}$.

Το σχετικό πάχος της γραμμής $\Delta \nu/\nu$ είναι περίπου $\frac{\Delta \nu}{\nu} \approx 10^{-8}$, πάρα πολύ μικρό (δηλαδή

ένα στα 100 εκατομμύρια). Μπορούμε λοιπόν να μιλάμε για **φασματικές γραμμές** με **φυσικό πάχος** $\Delta \nu$. Στην πραγματικότητα το πάχος των γραμμών των ατομικών φασμάτων είναι μεγαλύτερο εξ αιτίας του φαινομένου Doppler (διαπλάτυνση Doppler) λόγω της θερμικής κινήσεως των ατόμων (η οποία εξαρτάται από την θερμοκρασία) και των κρούσεων μεταξύ ατόμων (η οποία εξαρτάται από την πίεση).

Για συνηθισμένα σταθερά σώματα ($\Delta t \rightarrow \infty$) η σχέση (9.67) απλά υποδηλώνει ότι η ενέργεια τους είναι καλά καθορισμένη ($\Delta E=0$) και έτσι, σ' αυτές τις περιπτώσεις, δεν έχει κάποιο ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Θα συγκεντρώσουμε λοιπόν την προσοχή μας, στη συζήτηση που ακολουθεί, κυρίως στις σχέσεις αβεβαιότητας θέσης-ορμής.

Παράδειγμα 9.6

Ας θεωρήσουμε ένα σωματίο μάζας m το οποίο κινείται ελεύθερα κατά μήκος του άξονα x . Η θέση του σωματίου την χρονική στιγμή $t=0$ μετρείται με απροσδιοριστία Δx_0 . Να βρεθεί η απροσδιοριστία στη θέση του σωματίου μετά παρέλευση χρόνου t . **Απάντηση**

Η απροσδιοριστία στην ορμή του σωματίου κατά την χρονική στιγμή $t=0$ είναι τουλάχιστον ίση προς $\Delta p_x \approx \frac{\hbar}{(\Delta x_0)}$. Κατά συνέπεια η αβεβαιότητα στην ταχύτητα του

σωματίου (Δv_x) την χρονική στιγμή $t=0$ θα είναι τουλάχιστον ίση προς:

$$\Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m} \approx \frac{\hbar}{m(\Delta x_0)} \quad (9.69).$$

Έτσι, η απόσταση x που θα διανύσει το σωματίο μέσα σε χρόνο t δεν μπορεί να είναι

$$\text{γνωστή με μεγαλύτερη ακρίβεια από } \Delta x_t = t(\Delta v_x) \approx \frac{\hbar t}{m(\Delta x_0)} \quad (9.70).$$

Βλέπουμε ότι η αβεβαιότητα στη θέση μετά από χρόνο t είναι αντιστρόφως ανάλογη της αρχικής αβεβαιότητας Δx_0 . Επιβεβαιώνεται λοιπόν για μια ακόμη φορά ότι όσο πιο καλά εντοπίσουμε το σωματίο αρχικά, τόσο πιο αβέβαιη θα είναι η θέση του μετά από χρόνο t .

Στις τρεις διαστάσεις ισχύουν οι αντίστοιχες σχέσεις αβεβαιότητας για κάθε μια από τις τρεις συνιστώσες της θέσης και της ορμής:

$$(\Delta x)(\Delta p_x) \geq \hbar$$

$$(\Delta y)(\Delta p_y) \geq \hbar \quad (9.71) \quad \underline{\text{Σχέσεις Αβεβαιότητας σε τρεις διαστάσεις.}}$$

$$(\Delta z)(\Delta p_z) \geq \hbar$$

Όπως βλέπουμε δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός στην αβεβαιότητα της y -συνιστώσας της ορμής σε σχέση με την αβεβαιότητα της x -συνιστώσας της θέσης. Οι περιορισμοί αφορούν μόνο ζευγάρια **συζυγών μεταβλητών** ορμής και θέσης. Τέτοια ζευγάρια συζυγών μεταβλητών, όπως είδαμε και στο εδάφιο 9.1.1, είναι και η στροφορμή p_θ (ή L_θ) και η γωνία θ . Στις τρεις διαστάσεις λοιπόν ισχύει και η σχέση αβεβαιότητας:

$$(\Delta p_\theta) \times (\Delta \theta) \geq \hbar \quad (9.72) \quad \underline{\text{Σχέση Αβεβαιότητας στροφορμής-γωνίας.}}$$

Παράδειγμα 9.7

Η θέση ενός ηλεκτρονίου κατά μήκος του άξονα x καθορίζεται με απροσδιοριστία 10\AA .

Ποια η απροσδιοριστία στις x και y συνιστώσες της ορμής του ;

Απάντηση

Θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (9.71) και το γεγονός ότι η ποσότητα $\hbar c$ είναι ίση

$$\text{προς } \frac{12400}{2\pi} = \text{eV} \cdot \text{\AA}, \text{ οπότε θα βρούμε την ορμή σε μονάδες (eV/c).}$$

Έχουμε $\Delta x = 10 \text{ \AA}$ και $(\Delta p_x) \geq \frac{\hbar c}{(\Delta x)c} = 197.4 \text{ (eV/c)}$.

Η απροσδιοριστία στην x - συνιστώσα της ορμής δεν μπορεί λοιπόν να είναι μικρότερη από 197.4 (eV/c). Για την απροσδιοριστία στην y -συνιστώσα δεν υπάρχει κανένας περιορισμός.

Θα πρέπει να επισημάνουμε για μια ακόμη φορά ότι η διαφορά μεταξύ των σχέσεων (9.50) και (9.66) (\hbar αντί για h) οφείλεται στον μη ακριβή (διαφορετικό) τρόπο καθορισμού της αβεβαιότητας της θέσης και της ορμής. Όταν ορίσουμε με ακρίβεια τις αβεβαιότητες Δx και Δp θα δούμε ότι η ακριβής σχέση μεταξύ τους είναι:

$$(\Delta p) \times (\Delta x) \geq \frac{\hbar}{2} \quad (9.73) \quad \text{\textit{Ακριβής σχέση Αβεβαιότητας,}}$$

σύμφωνα με την οποία η ελάχιστη αβεβαιότητα είναι το $\frac{1}{2}$ της προβλεπόμενης από την (9.66). Πως όμως μπορεί να οριστεί με ακρίβεια και σαφήνεια η αβεβαιότητα θέσης και ορμής;

9.4.5 Αβεβαιότητα και μετρητική διαδικασία.

Μέχρι τώρα αναφερθήκαμε στην αρχή της αβεβαιότητας σαν ένα αναπόφευκτο επακόλουθο της κυματικής φύσης των σωματιδίων, την οποία θεμελίωσε αξιωματικά ο de Broglie. Δεν είναι όμως αυτός ο μόνος τρόπος παρουσίασης και κατανόησης της αρχής της αβεβαιότητας, η ισχύς της οποίας είναι πιο ισχυρή ή τουλάχιστον εξίσου ισχυρή με την υπόθεση των υλικών κυμάτων. Ο Heisenberg, χωρίς καμία παραδοχή για κάποια κυματική φύση των σωματιδίων, θεμελίωσε αξιωματικά την αρχή της αβεβαιότητας, η οποία είναι γνωστή και ως *αρχή του Heisenberg* βασιζόμενος πάνω στην μετρητική διαδικασία. Όπως παρατήρησε ο Heisenberg κάθε διαδικασία μέτρησης της θέσης ή της ορμής ενός μικροσκοπικού σωματιδίου, το διαταράσσει προσδίδοντας του κάποια επιπλέον ενέργεια και ορμή με αποτέλεσμα να είναι αδύνατον να μετρηθεί με απόλυτη ακρίβεια η θέση και η ορμή του σωματιδίου ταυτόχρονα. Το ανώτατο όριο ακρίβειας κατά την μέτρηση της θέσης και της ορμής ενός σωματίου είναι, σύμφωνα με το αξίωμα του Heisenberg ίσο με την σταθερά του Planck. Έτσι η σταθερά του Planck αποκτά ένα επιπλέον καινούργιο νόημα, σύμφωνα με την (9.66), ή την (9.73). Σύμφωνα λοιπόν με την ως αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg η όποια αβεβαιότητα ως προς τη θέση ενός σωματιδίου, συνδέεται αναπόφευκτα με την αβεβαιότητα ως προς την ορμή του, μέσω της σταθεράς του Planck. Όσο πιο μικρή είναι η αβεβαιότητα στη θέση, Δx ,

τόσο πιο μεγάλη θα είναι η αβεβαιότητα στην ορμή Δp . Ο μόνος τρόπος να γίνει απειροστά μικρή η αβεβαιότητα στη θέση ($\Delta x \rightarrow 0$) είναι να γίνει απείρως μεγάλη η αβεβαιότητα στην ορμή ($\Delta p \rightarrow \infty$). Αντίστροφα όπως φαίνεται¹⁰⁰ και στο σχήμα 9.32γ, όταν η αβεβαιότητα στην ορμή του σωματιδίου γίνεται μηδέν, η αβεβαιότητα στη θέση του γίνεται άπειρη. Με άλλα λόγια, **είναι αδύνατον να μετρήσουμε με απόλυτη ακρίβεια ταυτόχρονα την (ακριβή) θέση και ορμή ενός σωματιδίου**. Θα πρέπει να ξεκαθαρίσουμε απ' την αρχή ότι οι αβεβαιότητες της ορμής και της θέσης στην (9.73) δεν έχουν καμία σχέση με τις πειραματικές αβεβαιότητες οι οποίες οφείλονται σε ατέλειες των οργάνων, αλλά έχουν να κάνουν με τις βαθύτερες αρχές της φυσικής και ισχύουν για οσοδήποτε τέλεια όργανα θα μπορούσαν ποτέ να κατασκευασθούν (τα οποία φυσικά θα υπόκεινται στις αρχές και τους νόμους της φυσικής). Οποιοδήποτε πείραμα, οσοδήποτε καλά και αν σχεδιασθεί για να μετρήσει με ακρίβεια τη θέση ενός σωματιδίου, διαταράσσει την αρχική κατάσταση του σωματιδίου, ώστε να του επιφέρει αβεβαιότητες στη θέση και την ορμή που περιγράφονται από τη σχέση αβεβαιότητας

Παράδειγμα 9.7

Ας φανταστούμε ένα τελείως εξιδανικευμένο πείραμα¹⁰¹ που στόχο έχει να προσδιορίσει την θέση και η ορμή ενός ηλεκτρονίου με τη μέγιστη ακρίβεια. Για να γίνει γνωστή η θέση του ηλεκτρονίου το «φωτίζουμε» με ένα μόνο φωτόνιο, (μήκους κύματος), ώστε να επιφέρουμε την ελαχίστη δυνατή διαταραχή στην αρχική κατάσταση του ηλεκτρονίου, που χαρακτηρίζεται από τη θέση του x (εξακολουθούμε να θεωρούμε μονοδιάστατες περιπτώσεις) και την ορμή του p . Η θέση του ηλεκτρονίου καθορίζεται παρατηρώντας το σκεδαζόμενο φωτόνιο. Η αβεβαιότητα Δx στη θέση του ηλεκτρονίου καθορίζεται από το μήκος κύματος λ του φωτονίου,

$$\Delta x \cong \lambda \quad (9.74).$$

Θα πρέπει λοιπόν να κάνουμε όσο γίνεται μικρότερο το μήκος κύματος λ ώστε να αυξήσουμε την ακρίβεια στην θέση του ηλεκτρονίου (στο κάτω-κάτω δικό μας είναι το

¹⁰⁰ Μπορούμε να δεχθούμε χωρίς επεξήγηση προς το παρόν, ότι το σχήμα 9.32 δείχνει στο αριστερό μέρος την κατανομή της ορμής του σωματιδίου και στο δεξιό μέρος την κατανομή της θέσεως του.

¹⁰¹ Εκ των πραγμάτων ένα τέτοιο πείραμα είναι αδύνατον να εκτελεστεί στην πράξη. Αρκεί όμως ο σχεδιασμός, και τα πιθανά αποτελέσματα του να είναι σύμφωνα με τις βασικές αρχές της Φυσικής, ώστε να μπορεί να οδηγήσει σε χρήσιμα συμπεράσματα. Τέτοια «εξιδανικευμένα» ή **ιδεατά** πειράματα, τα οποία είναι γνωστά με τον γερμανικό όρο Gedanken ή τον αγγλικό όρο thought experiments = «πνευματικά» πειράματα, έχουν χρησιμοποιηθεί επανειλημμένα από τους πρωτεργάτες της Κβαντικής θεωρίας Bohr και Einstein, για να υποστηρίξουν τις απόψεις τους. Ο ελληνικός όρος που προσωπικά θα πρότεινα είναι πειράματα επί γάρτου (αν και αυτό θυμίζει στρατιωτικές ασκήσεις) παρ' όλο που ο όρος ιδεατά πειράματα ή ο μικτός όρος Gedanken πειράματα θα ήταν εξ ίσου αποδεκτός.

πείραμα, επί χάρτου είναι, οπότε μπορούμε να κάνουμε ότι θέλουμε, ή σχεδόν ότι θέλουμε). Όμως, λόγω ανακρούσεως του ηλεκτρονίου από το σκεδαζόμενο φωτόνιο θα έχουμε μια μεταβολή (και άρα μια αβεβαιότητα) Δp , στην ορμή του ηλεκτρονίου ίση με την ορμή p_ϕ του φωτονίου:

$$\Delta p = p_\phi = \frac{h}{\lambda} \quad (9.75)$$

Έτσι, όσο μικρότερο μήκος κύματος φωτός χρησιμοποιούμε, στοχεύοντας σε πολύ μικρή αβεβαιότητα, της θέσεως, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η αβεβαιότητα Δp στην ορμή του ηλεκτρονίου. Όπως βλέπουμε από τις (9.74) και (9.75) το ελάχιστο γινόμενο αβεβαιότητας θα είναι:

$$(\Delta x) \times (\Delta p) \cong \lambda \times \frac{h}{\lambda} \cong h ,$$

σε πλήρη συμφωνία με την αρχή του Heisenberg.

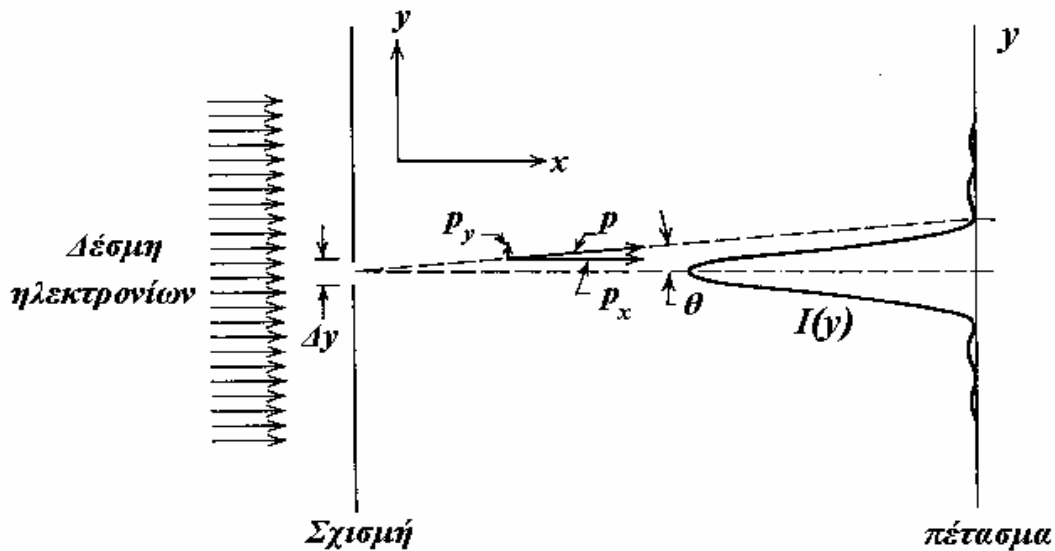
Σαν ένα δεύτερο παράδειγμα της σύνδεσης της αρχής της αβεβαιότητας με την μετρητική διαδικασία ας προσπαθήσουμε να μετρήσουμε με ακρίβεια την y -συνιστώσα της θέσης ενός ηλεκτρονίου σε μια δέσμη ηλεκτρονίων η οποία κινείται προς την θετική φορά του άξονα x . Προς τον σκοπό αυτό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το πείραμα της μιας σχισμής. Από μία διαφορετική σκοπιά, μπορούμε να δούμε το πείραμα της λεπτής σχισμής σαν ένα μετρητικό πείραμα, προσδιορισμού της θέσης του ηλεκτρονίου. Η ακρίβεια της μετρήσεως καθορίζεται από το μέγεθος της σχισμής το οποίο θεωρητικά μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλουμε.

Παράδειγμα 9.8

Για να μετρήσουμε την y συντεταγμένη της θέσης ενός ηλεκτρονίου, το οποίο ανήκει σε μια πλατειά παράλληλη δέσμη ηλεκτρονίων, μπορούμε να παρεμβάλουμε στο δρόμο της δέσμης, η οποία κινείται παράλληλα προς την θετική φορά του άξονα x , μια πολύ λεπτή σχισμή εύρους l (σχήμα 9.34). Δείξτε ότι σαν αποτέλεσμα της μέτρησης, εμφανίζεται μια αβεβαιότητα Δp_y στην y -συνιστώσα της ορμής του ηλεκτρονίου η οποία είναι σε πλήρη συμφωνία με την αρχή αβεβαιότητας του Heisenberg.

Απάντηση

Ας εργασθούμε σε δύο διαστάσεις, όπως στο σχήμα 9.34 και ας θεωρήσουμε ότι η σχισμή έχει αμελητέο ύψος και βάθος και ότι το εύρος της (παράλληλα προς τον άξονα y , που συμπίπτει με την διεύθυνση του πετάσματος) είναι l .



Σχήμα 9.34

Πείραμα μιας λεπτής σχισμής εύρους $l = \Delta y$ για ένα ηλεκτρόνιο, ορμής p , μιας παράλληλης δέσμης ηλεκτρονίων. Στο σχήμα φαίνεται και η καμπύλη κατανομής της έντασης $I(y)$ των ηλεκτρονικών κυμάτων μετά την περίθλαση στην λεπτή σχισμή. Η περιοχή μέσα στο πρωτεύον μέγιστο της καμπύλης $I(y)$ δείχνει την περιοχή μέσα στην οποία θα βρεθεί το ηλεκτρόνιο μετά την διέλευση μέσα από τη σχισμή, με πιθανότητα μεγαλύτερη από 75%. Το πάνω μέρος αυτής της περιοχής καθορίζεται από τις δύο διακεκομμένες ευθείες.

Έστω λοιπόν ένα ηλεκτρόνιο με ορμή p που εισέρχεται στην οπή παράλληλα με τον άξονα x (κάθετα προς το πέτασμα και την σχισμή) από αριστερά. Προτού το ηλεκτρόνιο εισέλθει στην σχισμή, η y -συνιστώσα της θέσης του ήταν τελείως ακαθόριστη. Όμως τώρα, εάν πάρουμε την αρχή των αξόνων (x, y) να συμπίπτει με το κέντρο (μέσον) της σχισμής, η y -συνιστώσα της θέσεως του ηλεκτρονίου θα είναι $0 \pm \frac{l}{2}$. Περιορίζοντας

λοιπόν το εύρος l της οπής, μπορούμε να περιορίσουμε την αβεβαιότητα στη θέση y , Δy όσο θέλουμε χωρίς, φαινομενικά, καμία συνέπεια. Έχουμε λοιπόν $\Delta y = l$. Η αρχή της αβεβαιότητας όμως, καθορίζει πως κάθε περιορισμός της αβεβαιότητας Δy αυξάνει την αβεβαιότητα της ορμής Δp_y , αντιστρόφως ανάλογα προς Δy . Πως συμβιβάζεται αυτό με το πείραμα μας;

Κατ' αρχήν το ηλεκτρόνιο πριν εισέλθει στην σχισμή δεν έχει καμία συνιστώσα της ορμής παράλληλα με τον y -άξονα, και άρα $p_y = 0$, $\Delta p_y = 0$. Όμως, αμέσως μετά την έξοδο του από την σχισμή, επειδή δεν είναι γνωστό το σημείο του πετάσματος στο οποίο θα

«χτυπήσει» το ηλεκτρόνιο (και βέβαια αυτό το σημείο δεν θα είναι απαραίτητα απέναντι από την σχισμή), το ηλεκτρόνιο κατ' ανάγκη θα έχει και κάποια συνιστώσα της ορμής p_y διάφορο του μηδενός, όπως φαίνεται στο σχήμα 9.34. Εάν θ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της ορμής p με τον άξονα x (διεύθυνση που συμπίπτει με τη διεύθυνση του διανύσματος της ορμής πριν το ηλεκτρόνιο εισέλθει στη σχισμή), τότε η συνιστώσα p_y θα ισούται με:

$$p_y = p \sin \theta \quad (9.76),$$

αφού το μέτρο του διανύσματος της ορμής πριν και μετά την είσοδο στη σχισμή παραμένει σταθερό. Η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή ($\pm p_y$) της συνιστώσας p_y , οι οποίες καθορίζουν την αβεβαιότητα Δp_y εξαρτώνται από την μέγιστη (θ_{max}) και ελάχιστη ($-\theta_{max}$) τιμή της γωνίας θ :

$$\pm p_{y,max} = \pm p \sin \theta_{max} \quad \text{και} \quad \Delta p_y = p_{y,max} - (-p_{y,max}) = 2p \sin \theta_{max} \quad (9.77).$$

Για να εκτιμήσουμε την μέγιστη τιμή της γωνία θ_{max} , θα επιστρατεύσουμε την κυματική εικόνα του ηλεκτρονίου, σύμφωνα με την οποία το ηλεκτρόνιο υφίσταται περίθλαση στα άκρα της σχισμής, οπότε τα όρια της πιθανής θέσης του στο πέτασμα καθορίζονται από τα όρια του κεντρικού μεγίστου περίθλασης, όπως φαίνεται στο σχήμα 9.34. Όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 5 για τα φωτόνια, η ένταση $I(y)$ είναι ανάλογη προς το τετράγωνο του πλάτους του κύματος καθώς επίσης ανάλογη, για ένα μεγάλο πλήθος σωματίων (π.χ. φωτονίων) προς την πυκνότητα του πλήθους των σωματίων dN/dy . Είναι λίγο-πολύ προφανές ότι εκεί (στις θέσεις y) που η πυκνότητα των σωματίων είναι πρακτικά μηδέν η πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο είναι επίσης μηδέν. Αντίστοιχα, εκεί που η πυκνότητα είναι μέγιστη η πιθανότητα να βρεθεί εκεί το ηλεκτρόνιο είναι μέγιστη. Κατ' αυτόν τον τρόπο, τα όρια του κεντρικού μεγίστου περίθλασης (τα οποία συμπίπτουν με τις θέσεις των πρώτων ελαχίστων) καθορίζουν την περιοχή στην οποία θα βρεθεί το ηλεκτρόνιο με πολύ μεγάλη πιθανότητα (μεγαλύτερη από 75%) μετά το πέρασμα του μέσα από την σχισμή. Κατά συνέπεια, η μέγιστη και η ελάχιστη γωνία $\pm \theta_{max}$ θα δίνεται

$$\text{από την σχέση}^{102} : \quad \pm \sin \theta_{max} = \pm \frac{\lambda}{l} \quad (9.78),$$

η οποία καθορίζει τα πρώτα ελάχιστα στην εικόνα περίθλασης.

Άρα, με βάση την (9.77) θα έχουμε :

¹⁰² Δείτε σχέση (8.134) στο κεφάλαιο 8 του βιβλίου «Ταλαντώσεις και Κύματα»

$$\Delta p_y = 2p \times \frac{\lambda}{l} = 2p \times \frac{h}{p \times l} \text{ και:}$$

$$(\Delta y) \times (\Delta p_y) \approx 2p \times \frac{\lambda}{l} = 2h > h \quad (9.79).$$

Ξαναβρήκαμε λοιπόν σαν αποτέλεσμα της μετρικής διαδικασίας την σχέση αβεβαιότητας¹⁰³.

Βλέπουμε ότι την αρχή της αβεβαιότητας μπορούμε να την παρουσιάσουμε μέσα από δύο φαινομενικά διαφορετικές εικόνες: Την κυματική (όπου η αρχή της αβεβαιότητας είναι αναγκαίο επακόλουθο του θεωρήματος εύρους ζώνης για τα κλασικά κύματα) και την σωματιδιακή (όπου η αρχή της αντιστοιχίας είναι αναγκαίο επακόλουθο της μετρητικής διαδικασίας στον μικρόκοσμο). Οι δύο αυτές εικόνες, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με την *αρχή της συμπληρωματικότητας*, δεν είναι τίποτα άλλο από τις δύο διαφορετικές όψεις του ίδιου νομίσματος. Η θεμελίωση και ολοκλήρωση της κυματικής εικόνας οδηγεί στην **Κυματομηχανική θεωρία του Schrodinger**, ενώ η θεωρητική θεμελίωση της τη σύγχρονης Κβαντικής θεωρίας βασισμένη στην μετρητική διαδικασία οδηγεί στην **Μηχανική των μητρών (ή Μηχανική των πινάκων) του Heisenberg**. Την μαθηματική ισοδυναμία των δύο εικόνων απέδειξε εκ των υστέρων ο ίδιος ο Schrodinger. Η φυσική ερμηνεία της ισοδυναμίας των δύο αναπαραστάσεων βασίζεται αφενός μεν στην αρχή της συμπληρωματικότητας και αφετέρου στην ερμηνεία και κατανόηση της φύσεως των υλικών κυμάτων (την οποία θα συζητήσουμε παρακάτω στην ενότητα 9.6).

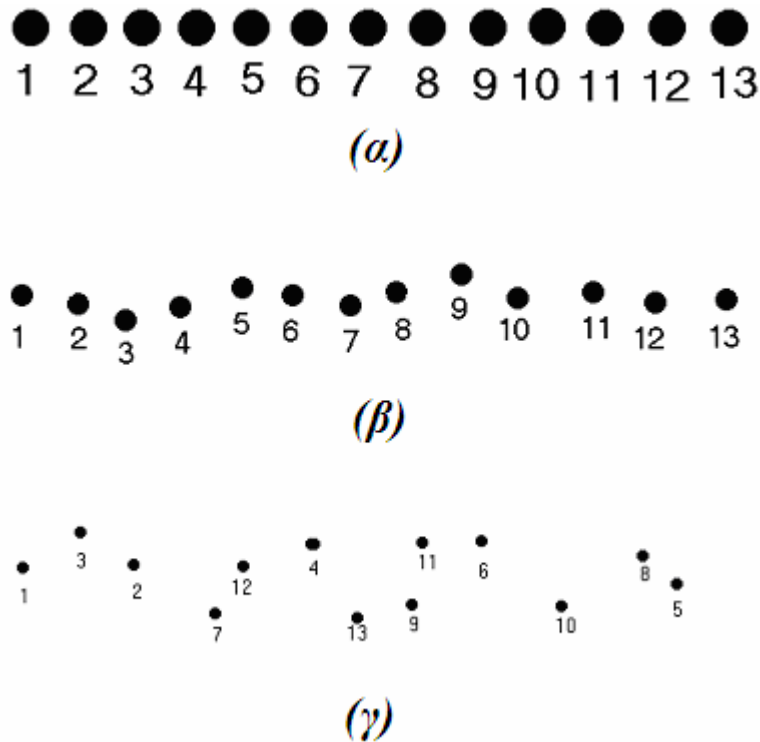
9.4.6 Αβεβαιότητα και Συμπληρωματικότητα

Στα παραδείγματα 9.7 και 9.8 που είχαν στόχο την κατανόηση και αποσαφήνιση της σχέσεως της αρχής της αβεβαιότητας με την μετρητική διαδικασία, χρησιμοποιήσαμε μια διγλωσσία (όχι βέβαια με την κακή έννοια της λέξης, που σχετίζεται με την πολιτική) την οποία μπορούμε να δικαιολογήσουμε με βάση την αρχή της Συμπληρωματικότητας. Στο παράδειγμα 9.7 έμμεσα, πλην σαφώς, κάναμε χρήση του δυϊσμού σωματίου-κύματος για το φωτόνιο χωρίς να χρειασθεί να επικαλεσθούμε τα υλικά κύματα του de Broglie για το ηλεκτρόνιο. Στο παράδειγμα 9.8 για να υπολογίσουμε την πιθανή περιοχή στην οποία θα «χτυπήσει» το ηλεκτρόνιο στο πέτασμα (και εξ αυτής, την αβεβαιότητα στην ορμή του) χρησιμοποιήσαμε την καμπύλη κατανομής της έντασης του υλικού κύματος στην εικόνα περίθλασης από την σχισμή. Αυτό φαίνεται να επιβεβαιώνει και να αναιρεί ταυτόχρονα

την εξάρτηση της αρχής της αβεβαιότητας από τις «κυματικές ιδιότητες των υλικών σωματιδίων», στην λεπτομερή φύση των οποίων δεν έχουμε μέχρι στιγμής εισέλθει. Η βασική ιδέα που ενώνει τις δύο φαινομενικά αντίθετες προσεγγίσεις εκφράζεται από την **αρχή της συμπληρωματικότητας** που εν μέρει είδαμε νωρίτερα (κεφάλαιο 3) για τα φωτόνια. Τα φωτόνια όπως και τα ηλεκτρόνια (και τα άλλα σωματίδια του μικρόκοσμου) παρουσιάζουν μια ιδιαίτερη «Κβαντική συμπεριφορά» η οποία, όπως είδαμε, δεν μπορεί να περιγραφεί από τις συνήθεις έννοιες του σωματίου ή του κύματος με τις οποίες είμαστε εξοικειωμένοι από την μακροσκοπική εμπειρία μας. Κατ' αυτόν τον τρόπο είμαστε αναγκασμένοι, ανάλογα με το πείραμα, να επικαλούμαστε για το ηλεκτρόνιο (και τα άλλα σωματίδια) τότε την μία και τότε την άλλη εικόνα. Η κάθε μία από αυτές τις εικόνες συμπληρώνει την άλλη σε μια ολοκληρωμένη και γενικευμένη περιγραφή. Σύμφωνα λοιπόν με την αρχή της συμπληρωματικότητας, η σωματιδιακή και η κυματική εικόνα δεν είναι αντίθετες έννοιες αλλά συμπληρώνουν η μία την άλλη. Μπορούμε να δούμε ότι οι θεμελιώδεις περιορισμοί που εκφράζει η αρχή της αβεβαιότητας ως προς την ακρίβεια των μετρήσεων θέσεως και ορμής απ την μια μεριά, και ενέργειας και χρόνου απ την άλλη, είναι συμβατοί με την αρχή της συμπληρωματικότητας. Εάν θέλουμε να αναδείξουμε την σωματιδιακή εικόνα ενός ηλεκτρονίου για παράδειγμα, θα πρέπει να του αποδώσουμε συγκεκριμένη θέση x , για συγκεκριμένο χρόνο t , οπότε και οι δυο αβεβαιότητες Δx και Δt πρέπει να είναι ίσες με μηδέν. Εάν όμως υιοθετήσουμε την σωματιδιακή εικόνα, θα πρέπει τότε να τείνει να εξαφανισθεί η κυματική εικόνα, όπως απαιτεί η αρχή της συμπληρωματικότητας. Αυτό μας το εξασφαλίζει η αρχή της αβεβαιότητας η οποία δείχνει ότι όλα τα κυματικά χαρακτηριστικά ν, ω, λ καθώς και E και p είναι τελείως αβέβαια (οι αντίστοιχες αβεβαιότητες απειρίζονται). Όμοια εάν θέλουμε να αναδείξουμε την κυματική εικόνα θα πρέπει σύμφωνα με την αρχή της συμπληρωματικότητας τα κυματικά χαρακτηριστικά να είναι τελείως καθορισμένα, δηλαδή $\Delta k=0$, $\Delta \lambda=0$ και $\Delta \nu=0$ (επίσης $\Delta \omega=0$, $\Delta E=0$, $\Delta p=0$). Τότε όμως η αρχή της αβεβαιότητας, όπως και της συμπληρωματικότητας, μας εμποδίζει από το να καθορίσουμε ταυτόχρονα την ακριβή θέση (του σωματιδίου) στον χώρο και τον χρόνο ($\Delta x=\infty$, $\Delta t=\infty$). Η ακριβής θέση σε κάθε χρονική στιγμή είναι ένα καθαρά σωματιδιακό χαρακτηριστικό.

¹⁰³ Ο παράγοντας 2 οφείλεται στον συγκεκριμένο τρόπο ορισμού των Δy , Δp_y . Για παράδειγμα, ορίζοντας $\Delta y \sim l/2$ ή $\Delta p_y \sim p_y$, ο παράγοντας 2 απαλείφεται.

Με την πάροδο του χρόνου, η σύνδεση των διαδοχικών θέσεων x_n ενός σωματιδίου κατά τις χρονικές στιγμές t_n ($n=1,2,3,\dots$) δίνει την έννοια της τροχιάς του σωματιδίου. Όμως η θέση x_n ενός σωματιδίου την χρονική στιγμή t_n , εξαρτάται από την ταχύτητά του ή την ορμή του κατά την χρονική στιγμή t_{n-1} (στη θέση x_{n-1}). Ως εκ τούτου, επειδή δεν είναι δυνατόν να γνωρίζουμε την θέση και την ορμή ενός σωματιδίου με απεριόριστη ακρίβεια, δεν είναι πάντα δυνατόν, σύμφωνα με την αρχή της αβεβαιότητας, να καθορίσουμε με ακρίβεια την τροχιά ενός σωματιδίου. Θα έχουμε δηλαδή και **μια «αβεβαιότητα» στην κλασική έννοια της τροχιάς ενός σωματιδίου**. Με άλλα λόγια, για να προσδιορίσουμε την τροχιά ενός σωματιδίου πρέπει από τις δύο συμπληρωματικές εικόνες να αναδείξουμε την σωματιδιακή. Θα πρέπει λοιπόν να περιορίσουμε (μέχρι μηδενισμού) την αβεβαιότητα στη θέση (και τον χρόνο) οπότε όμως μεγαλώνει (μέχρι απειρισμού) η αβεβαιότητα στην ορμή Δp και την ταχύτητα Δv ($\Delta v \rightarrow \infty$). Κάτι τέτοιο όμως, όπως φαίνεται από τη σχέση (9.70) και το σχήμα 9.33, εμποδίζει τον καθορισμό (ανάμεσα σε άλλα) της αλληλουχίας των θέσεων x_n του σωματιδίου κατά τις χρονικές στιγμές t_n ($n=1,2,3,\dots$), οι οποίες δίνουν την εντύπωση της τροχιάς. Έτσι, **η αρχή της αβεβαιότητας, μέσω της σταθεράς \hbar θέτει ένα κβαντικό όριο στην ακρίβεια του προσδιορισμού της τροχιάς ενός σωματιδίου**. Για να διατηρήσουμε την έννοια της τροχιάς, θα πρέπει να συμβιβαστούμε με την αρχή της αβεβαιότητας, όπως φαίνεται χαρακτηριστικά στο σχήμα 9.35. Στην περίπτωση του σχήματος 9.35(α) και (β), η μεγάλη (σχετικά) αβεβαιότητα στη θέση (όπως φαίνεται από το μέγεθος των κουκκίδων) δίνει την εντύπωση της συνεχούς τροχιάς, σε αντίθεση με την περίπτωση (γ) με μικρή αβεβαιότητα θέσης όπου έχει χαθεί τελείως κάθε έννοια τροχιάς.



Σχήμα 9.35

Σχηματική παράσταση του πειραματικού καθορισμού της θέσης x_n ενός σωματιδίου σε διαδοχικές χρονικές στιγμές t_n , $n=1,2,3,\dots,13$.

Το μέγεθος των κουκκίδων (και του δείκτη $n=1,2,3,\dots,13$ που τις συνοδεύει) είναι ανάλογο της πειραματικής αβεβαιότητας της θέσης.

Για μεγάλη πειραματική αβεβαιότητα στη θέση, (α) και(β), η αλληλουχία των θέσεων x_n του σωματιδίου κατά τις χρονικές στιγμές t_n (με $n=1,2,3,\dots,13$) αντιστοιχεί στην κλασική εικόνα της τροχιάς. Για μικρή αβεβαιότητα, (γ), η έννοια της τροχιάς έχει χαθεί.

Βλέπουμε λοιπόν ότι όσο περισσότερο εντοπισμένο είναι αρχικά το σωματίο τόσο λιγότερο θα είναι καθορισμένη η τροχιά του. Αντίθετα όσο λιγότερο εντοπισμένο είναι το σωματίο, και όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα του (κάτι που εύκολα ικανοποιείται από τα κλασικά σώματα) τόσο καλύτερα θα είναι καθορισμένη η τροχιά του, σε πλήρη συμφωνία με την αρχή της αντιστοιχίας.

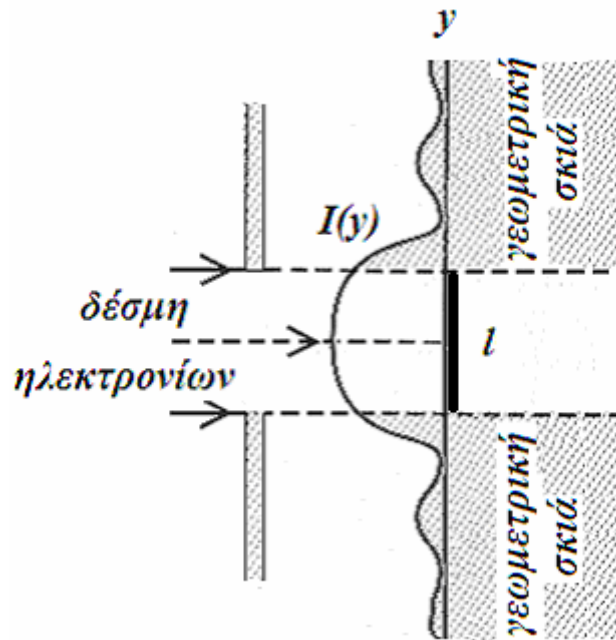
9.4.7 Αβεβαιότητα και αρχή της αντιστοιχίας.

Στο κλασικό όριο, $h \rightarrow 0$ ($\hbar \rightarrow 0$), όπως θα ήταν αναμενόμενο, δεν υπάρχει κανείς περιορισμός από την αρχή της αβεβαιότητας, αφού οι αβεβαιότητες θέσης και ορμής

μπορεί να είναι κάθε μία χωριστά ή και οι δύο μαζί μηδενικές. Σ' αυτή την κλασική περίπτωση η σωματιδιακή εικόνα είναι τελείως καθορισμένη και διακριτή όπως και η «κυματική». Τα σωματίδια είναι σωματίδια και τα κύματα είναι κύματα. Η αρχή της συμπληρωματικότητας δεν παίζει πλέον κανένα ρόλο, σ' αυτή την περίπτωση κατά την οποία προσεγγίζουμε το όριο της Κλασικής Φυσικής μέσα από την αρχή της αντιστοιχίας. Αντίθετα στο Κβαντικό όριο ($h \neq 0$) η σωματιδιακή και κυματική εικόνα συνδυάζονται μέσα από την αρχή της Συμπληρωματικότητας τόσο για τα κλασικά κύματα (φως) όσο και για τα κλασικά σωματίδια (ηλεκτρόνια) με τον ίδιο ενιαίο τρόπο.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την διαδρομή από το Κβαντικό όριο (και την αρχή της Συμπληρωματικότητας) μέχρι το Κλασικό όριο (και την αρχή της αντιστοιχίας), ας δούμε ξανά με περισσότερη προσοχή και ενιαίο τρόπο (για φωτόνια και ηλεκτρόνια) το παράδειγμα 9.8 της περίθλασης ηλεκτρονίων από μια λεπτή σχισμή. Ας μεγεθύνουμε λίγο το σχήμα 9.34 και ας παρακολουθήσουμε ξανά την κίνηση της δέσμης των σωματίων (ηλεκτρονίων ή φωτονίων) στο μεγεθυμένο σχήμα 9.36. Στην περίπτωση που θεωρούμε μια φωτεινή δέσμη (δέσμη φωτονίων) είναι γνωστό από την Γεωμετρική Οπτική ότι σε συνηθισμένες μακροσκοπικές συνθήκες μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το φως διαδίδεται σε ευθείες γραμμές κατά μήκος των *οπτικών ακτίνων*. Η δέσμη των ακτίνων όταν συναντά εμπόδια στον δρόμο της υφίσταται (ελαστικές) «κρούσεις» ή «σκεδάσεις». Σαν αποτέλεσμα των κρούσεων, ανακλάται και διαθλάται στα εμπόδια συνεχίζοντας την ευθύγραμμη διάδοση της προς νέες κατευθύνσεις. Αυτού του είδους η ευθύγραμμη διάδοση είναι λίγο-πολύ παρόμοια με την κίνηση ομογενούς δέσμης αποτελούμενης από όμοια σωματίδια (τα φωτόνια εν προκειμένω). Από την σκοπιά της Κυματικής Οπτικής, η ευθύγραμμη διάδοση είναι συνυφασμένη με επίπεδα μέτωπα κύματος, οπότε οι οπτικές ακτίνες ταυτίζονται με τις καθέτους επάνω στα (επίπεδα) μέτωπα κύματος, οι οποίες έχουν κατεύθυνση την κατεύθυνση διαδόσεως του κύματος. Σύμφωνα λοιπόν με την κλασική Κυματική Οπτική, η Γεωμετρική Οπτική είναι μια προσέγγιση¹⁰⁴ η οποία είναι ικανοποιητική όταν βρισκόμαστε σε μεγάλες αποστάσεις από την πηγή και το μέγεθος των εμποδίων (ή των ανοιγμάτων) είναι πολύ μεγάλο σε σχέση με το μήκος κύματος. Βλέπουμε δηλαδή, ότι η Γεωμετρική Οπτική προσεγγίζεται είτε από την κυματική είτε από την σωματιδιακή εικόνα, στο όριο των μικρών μηκών κύματος ή των μεγάλων διαστάσεων.

¹⁰⁴ Δείτε εισαγωγή κεφαλαίων 10 και 11 στον τόμο «Ταλαντώσεις και Κύματα», Α. Ζδέτση

**Σχήμα 9.36****Περίθλαση και Γεωμετρική σκιά.**

Μέρος του σχήματος 9.34 σε μεγέθυνση.

Σύμφωνα με την Γεωμετρική Οπτική, εάν αντί για δέσμη ηλεκτρονίων είχαμε δέσμη φωτεινών ακτίνων, η σκιασμένη περιοχή θα συνέπιπτε με την παρατηρούμενη πραγματική σκιά. Η Κυματική Οπτική προβλέπει ασαφή όρια μεταξύ φωτεινής και σκοτεινής περιοχής, τα οποία περιγράφονται από την καμπύλη έντασης $I=I(y)$. Για σχισμές με πολύ μεγάλο πλάτος l (σε σχέση με το μήκος κύματος λ) οι δύο εικόνες συμπίπτουν, όπως φαίνεται στο σχήμα 9.37(γ).

Η Γεωμετρική Οπτική προβλέπει ότι η δέσμη των φωτονίων (και κατ' αναλογία, των ηλεκτρονίων) θα «φώτιζε» (θα είχε ένταση διάφορη του μηδενός) μόνο την περιοχή του πετάσματος εύρους l ακριβώς απέναντι της. Η περιοχή αυτή είναι σημειωμένη με έντονη γραμμή στο σχήμα 9.36. Αντίθετα στην σκιασμένη περιοχή του πετάσματος δεν θα έφτανε καθόλου φως (σύμφωνα πάντα με την Γεωμετρική Οπτική) και θα υπήρχε σκιά. Από την σκοπιά της Κυματικής Οπτικής (και του πειράματος) τα όρια μεταξύ της φωτεινής και της σκοτεινής περιοχής είναι ασαφή και η ένταση της δέσμης πάνω στο πέτασμα περιγράφεται από την καμπύλη $I=I(y)$, σε πλήρη συμφωνία με το πείραμα. Η διείσδυση των φωτεινών ακτίνων στην περιοχή της γεωμετρικής σκιάς, η οποία δηλώνει την απόκλιση από την ευθύγραμμη πορεία, είναι γνωστή ως *περίθλαση του φωτός*. Όπως

αναφέραμε νωρίτερα, όταν το εύρος της σχισμής γίνει πολύ μεγαλύτερο από το μήκος κύματος, τα αποτελέσματα της Γεωμετρικής και της Κυματικής Οπτικής συμπίπτουν. Στο όριο, λοιπόν, των μικρών μηκών κύματος ή των μεγάλων διαστάσεων και οι δύο εικόνες βρίσκονται σε αντιστοιχία, όπως φαίνεται στο σχήμα 9.37. Ας επιστρέψουμε τώρα στο πείραμα με τα ηλεκτρόνια και ας υποθέσουμε ότι αυξάνουμε το εύρος l της σχισμής ώστε να έχουμε μια πολύ πλατιά σχισμή, όπως στο σχήμα 9.37(γ). Η αβεβαιότητα στη θέση τώρα έχει γίνει πολύ μεγάλη ώστε να μην μπορούμε να καθορίσουμε με σαφήνεια τη θέση του ηλεκτρονίου κατά μήκος του άξονα y . Όμως, εφόσον έχει περιορισθεί μέχρι μηδενισμού το φαινόμενο της περίθλασης, η αβεβαιότητα στην y -συνιστώσα της ορμής έχει πρακτικά μηδενισθεί, όπως φαίνεται από τις (9.77), (9.78) λόγω της ευθύγραμμης πορείας της δέσμης.

Σ' αυτό το όριο τα αποτελέσματα της Κβαντικής και της Κλασικής Φυσικής Συμπίπτουν (αρχή της αντιστοιχίας) και η αρχή της αβεβαιότητας παύει να έχει κάποια πρακτική συνέπεια.

Μπορούμε λοιπόν, κατ' αναλογία προς την συμβολική σχέση:

ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ $\xrightarrow{\lambda \rightarrow 0}$ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ (9.80),

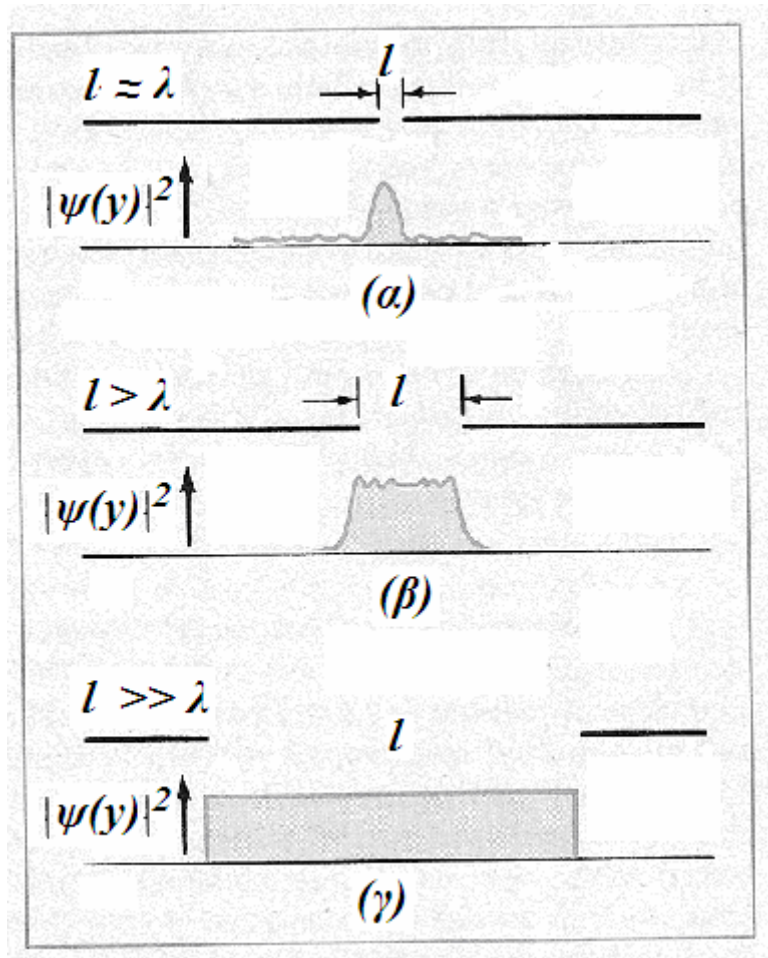
να γράψουμε συμβολικά την αρχή της αντιστοιχίας στην μορφή:

ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ $\xrightarrow{\lambda \rightarrow 0}$ ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ,

ή ακόμη:

ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ $\xrightarrow{\hbar \rightarrow 0}$ ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ (9.81),

αφού για δοσμένη ορμή το μήκος κύματος του σωματιδίου καθορίζεται από την σταθερά του Planck.



Σχήμα 9.37

Το φαινόμενο της περίθλασης για σχισμές με διαδοχικά μεγαλύτερο εύρος.

Ενώ για εύρος l , συγκρίσιμο με το μήκος κύματος λ , τα φαινόμενα περίθλασης είναι έντονα (α), όταν το εύρος της σχισμής γίνει πάρα πολύ μεγάλο, τα φαινόμενα περίθλασης παύουν να είναι ορατά (γ). Σ' αυτό το όριο (πολύ μικρά μήκη κύματος ή πολύ μεγάλες διατάσεις) τα αποτελέσματα της Γεωμετρικής και της Κυματικής Οπτικής συμπίπτουν με το πείραμα και μεταξύ τους.

9.4.8 Αβεβαιότητα και εντοπισμός.

Στα εδάφια 9.2.2 και 9.2.3 είδαμε ότι εντοπισμένα ή «δέσμια» σωμάτια (όπως για παράδειγμα τα ηλεκτρόνια στο άτομο του υδρογόνου ή μέσα σε ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού) αντιστοιχούν σε στάσιμα κύματα και εκτελούν «περατωμένη» κίνηση (δηλαδή κίνηση εντοπισμένη σε μια πεπερασμένη περιοχή του χώρου). Είδαμε επίσης στο εδάφιο 9.4.3 ότι η αρχή της αβεβαιότητας για τέτοιες «δέσμιες» καταστάσεις μας δίνει μια πολύ καλή εκτίμηση της ενέργειας της θεμελιώδους καταστάσεως,

χρησιμοποιώντας την ισότητα στην ανισο-ισότητα της σχέσης (9.50). Θεμελιώδης είναι η κατάσταση με την ελάχιστη ενέργεια, στην οποία φυσιολογικά βρίσκεται το σύστημα, εφόσον δεν υπάρχει κάποια εξωτερική αιτία που να το διεγείρει σε καταστάσεις με υψηλότερες ενέργειες (τις λεγόμενες «διεγερμένες» καταστάσεις). Η ενέργεια της θεμελιώδους καταστάσεως δεν μπορεί να είναι μηδενική, διότι (συν τοις άλλοις) θα παραβίαζε την αρχή της αβεβαιότητας, αφού θα αντιστοιχούσε σε μια κατάσταση καλώς καθορισμένης μηδενικής ορμής, σε κάθε θέση x . Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την απλούστερη περίπτωση ενός σωματίου σ' ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού. Εάν η ενέργεια της θεμελιώδους καταστάσεως ήταν ίση με μηδέν, τότε λόγω μηδενισμού της κινητικής ενέργειας, η ορμή του σωματιδίου θα ήταν αυστηρά καθορισμένη και ίση με μηδέν. Κάτι τέτοιο όμως, δηλαδή $\Delta p=0$, δεν μπορεί να συμβεί για ένα πεπερασμένο φυσικό σύστημα που δεν απλώνεται σ' όλο το χώρο (μέχρι το άπειρο) επειδή τότε θα έπρεπε $\Delta x = \infty$. Αντίθετα, από τη φύση του προβλήματος, φαίνεται καθαρά πως η μεγαλύτερη δυνατή τιμή της αβεβαιότητας Δx πρέπει να είναι το πολύ ίση προς το μήκος L του απειρόβαθου πηγαδιού δυναμικού, αφού το σωματίδιο, εξ ορισμού, βρίσκεται κάπου μέσα σ' αυτή την περιοχή και δεν μπορεί να διαφύγει λόγω του απείρου ύψους (ή βάθους) των «τοιχωμάτων» του δυναμικού.

Μπορούμε να εκτιμήσουμε την ελάχιστη ενέργεια ενός «εντοπισμένου συστήματος», όπως είδαμε νωρίτερα, αφού προηγουμένως υπολογίσουμε την αντίστοιχη κινητική

ενέργεια $E_{κιν} = \frac{p_x^2}{2m}$, από την σχέση:

$$E_{κιν} \approx \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m(\Delta x)^2} \quad (9.51),$$

όπου Δx είναι η περιοχή εντοπισμού L ($\Delta x = L$) του σωματίου, μάζας m .

Εάν, επιπλέον, για ένα συγκεκριμένο σύστημα, η δυναμική ενέργεια $V(x)$, μπορεί να εκφραστεί και αυτή σαν συνάρτηση του χαρακτηριστικού μήκους εντοπισμού L , τότε και η ελάχιστη ολική ενέργεια του συστήματος (ενέργεια της θεμελιώδους καταστάσεως) μπορεί να εκφράσει σαν συνάρτηση του μήκους L , και μπορεί να εκτιμηθεί.

Προτού προχωρήσουμε στο επόμενο εδάφιο με μερικά απλά παραδείγματα εφαρμογής της διαδικασίας που μόλις σκιαγραφήσαμε, αξίζει να επισημάνουμε για μια ακόμη φορά και να τονίσουμε ότι **μεγάλος «εντοπισμός» του συστήματος (μικρό μήκος L) οδηγεί σε μεγάλη τιμή της κινητικής ενέργειας, η οποία με την σειρά της, για δοσμένο**

σταθερό δυναμικό, κάνει την ενέργεια της θεμελιώδους καταστάσεως να είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μικρότερο είναι το μήκος εντοπισμού, L. Κάθε προσπάθεια περιορισμού σε μία μικρή περιοχή ενός σωματίου, ή του αντίστοιχου υλικού κύματος το οποίο φυσιολογικά απλώνεται σ' όλο τον χώρο, βρίσκει τόσο μεγαλύτερη αντίσταση (κοστίζει σε ενέργεια) όσο μικρότερη είναι η περιοχή εντοπισμού.

9.4.9 Αρχή της αβεβαιότητας και εκτιμήσεις τάξης μεγέθους

Όπως έχει εξ αρχής τονισθεί, είναι πάρα πολλές φορές επιθυμητό και σπουδαίο να έχουμε μία γρήγορη εκτίμηση της τάξης μεγέθους μιας φυσικής ποσότητας, όπως για παράδειγμα, της ενέργειας ενός φυσικού συστήματος. Για την πλειονότητα των φυσικών συστημάτων η εύρεση της ακριβούς τιμής μίας ποσότητας (όπως η ενέργεια) απαιτεί μακροσκελείς και χρονοβόρους υπολογισμούς, οι οποίοι συνήθως (από μόνοι τους) δεν διευκολύνουν την καλύτερη αντίληψη της φυσικής του προβλήματος, δηλαδή της βαθύτερης φυσικής αίσθησης και κατανόησης της αλληλεξάρτησης των παραμέτρων (δεδομένων και αποτελεσμάτων) του προβλήματος.

Αυτή η βαθύτερη κατανόηση της φυσικής του προβλήματος και εποπτεία είναι πάντα αναγκαίες για πιθανές προβλέψεις, συσχετισμός γενικεύσεις και επεκτάσεις. Το τίμημα που «πληρώνει» κανείς, όπως είναι φυσικό, για μία τέτοια διαφάνεια και ταχύτητα υπολογισμών είναι η έλλειψη πιο λεπτομερειακής πληροφορίας και, προφανώς, της ακριβούς τιμής. Αυτό το τίμημα δεν είναι πάντα πολύ μεγάλο και φυσικά πάντα μπορεί κανείς να επιστρέψει (εφόσον έχει τα κατάλληλα εφόδια) και να εκτελέσει πιο ακριβείς υπολογισμούς, έχοντας μάλιστα και οδηγό την πρόσθετη φυσική εποπτεία που κέρδισε το μεταξύ.

Μια πρώτη εφαρμογή τέτοιων μεθόδων, οι οποίες περιγράφουν γρήγορα και απλά την βασική φυσική του προβλήματος, έχουμε ήδη συναντήσει νωρίτερα στο κεφάλαιο 3 κατά την διαστατική ανάλυση της φασματικής πυκνότητας του μέλανος σώματος, όπως και στο κεφάλαιο 8, κατά την συζήτηση των εφαρμογών και επεκτάσεων του ατομικού μοντέλου του Bohr. Σ' αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε μερικά παραδείγματα εφαρμογής της αρχής της αβεβαιότητας για εκτιμήσεις τάξης μεγέθους της ενέργειας της θεμελιώδους καταστάσεως διαφόρων «εντοπισμένων» πεπερασμένων (ή «περατωμένων») φυσικών συστημάτων. Προφανώς η ίδια αρχή μπορεί να χρησιμεύσει πέρα από την ελάχιστη ενέργεια για παρόμοιες εκτιμήσεις άλλων φυσικών μεταβλητών

που καθορίζονται μονοσήμαντα από την θεμελιώδη κατάσταση του συστήματος και την ενέργεια της.

Γενικά, για τον υπολογισμό (εκτίμηση) της ελάχιστης (θεμελιώδους) ενέργειας ενός **πεπερασμένου** συστήματος (παραδείγματος χάριν, ενός σωματίου χωρικά περιορισμένου) το πρώτο βήμα αποτελεί η διαπίστωση (η υπόθεση) ότι το μέγεθος της αβεβαιότητας Δp της ορμής είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με την ίδια την ορμή p . Η διαπίστωση αυτή, όπως είδαμε στο εδάφιο 9.4.3, στηρίζεται στο γεγονός ότι σε αντίθεση με το μέτρο του διανύσματος της ορμής, η φορά δεν είναι καθορισμένη για δοσμένη ενέργεια E (και δυναμική ενέργεια $V(x)$, σε κάθε σημείο x):

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + V(x) \quad (9.82).$$

Όπως λοιπόν φαίνεται και από την σχέση αυτή, η διεύθυνση του διανύσματος p_x (δεξιά ή αριστερά, θετική ή αρνητική φορά) δεν είναι καθορισμένη και έτσι μπορούμε να θέσουμε προσεγγιστικά¹⁰⁵

$$\Delta p_x \approx p_x \quad (9.83).$$

Μπορούμε επίσης να εκτιμήσουμε προσεγγιστικά την αβεβαιότητα στη θέση Δx (όπως κάναμε παραπάνω για το απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού) με βάση κάποιο χαρακτηριστικό μήκους L , που θα δηλώνει την έκταση ή τον «εντοπισμό» του πεπερασμένου συστήματος, ούτως ώστε: $\Delta x \approx L$ (9.84).

Το τελευταίο βήμα σ' αυτούς τους σ' αυτούς τους υπολογισμούς αποτελεί η διαπίστωση πως για την θεμελιώδη κατάσταση και με δεδομένη την εκτίμηση του «εντοπισμού» Δx , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ισότητα για την εκτίμηση της ελάχιστης ορμής, που υπεισέρχεται στην σχέση (9.83).

Παράδειγμα 9.9

Εκτιμήστε την ενέργεια της θεμελιώδους καταστάσεως ενός σωματίου με μάζα m , το οποίο βρίσκεται μέσα σ' ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού, πλάτους L .

Δώστε μερικές χαρακτηριστικές αριθμητικές εφαρμογές.

Απάντηση

Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε απλή εφαρμογή της (9.51) :

¹⁰⁵ Με μία παρόμοια λογική θα μπορούσαμε να θέσουμε $\Delta p_x \approx 2p_x$, όπως στο εδάφιο 9.4.3. Όμως για εκτιμήσεις τάξης μεγέθους, προφανώς η παρουσία ή όχι του παράγοντα 2 δεν έχει μεγάλη σημασία.

$$E = E_{\text{κιν}} \approx \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m(\Delta x)^2} = \frac{h^2}{8mL^2} \quad (9.85).$$

Η (9.85) μας δίνει το ακριβές αποτέλεσμα της σχέσεως (9.39).

Θα πρέπει να διευκρινίσουμε ότι αυτό είναι συμπτωματικό. Εάν είχαμε χρησιμοποιήσει κάποια από τις εναλλακτικές μορφές των σχέσεων αβεβαιότητας (με h ή $\hbar/2$ αντί για \hbar) ή είχαμε διαφορετική εκτίμηση της αβεβαιότητας της ορμής (π.χ. $\Delta p_x \approx 2p_x$) τότε η εκτίμηση της ενέργειας μπορούσε να διαφέρει ακόμη και κατά ένα παράγοντα π^2 , που είναι περίπου ίσος με 10. Για εκτιμήσεις τάξης μεγέθους, αυτό δεν έχει ιδιαίτερη σημασία. Δεν χρειάζεται λοιπόν να καταφεύγουμε σε «προκρούστειες μεθόδους» ή σε (προσεγγιστικές) μεθόδους τραβηγμένες κυριολεκτικά «από τα μαλλιά» (όπως συνήθως κάνουν μερικοί φοιτητές στα γραπτά τους, όπου ενώ έχουν πολλά ενδιάμεσα λάθη, «καταφέρνουν» στο τέλος να έχουν το «σωστό» τελικό αποτέλεσμα). Θα πρέπει πάντα να θυμόμαστε ότι μπορεί οι ακριβέστερες σχέσεις και μέθοδοι να οδηγήσουν σε λιγότερο ακριβή αποτελέσματα.

Αριθμητικές εφαρμογές.

Για να δούμε κάποιο χαρακτηριστικό αριθμητικό παράδειγμα της (9.85), ας θεωρήσουμε ένα ηλεκτρόνιο το οποίο είναι περιορισμένο μέσα σ' ένα τυπικό ατομικό μήκος, $L \approx 1 \text{ \AA}$. Θέτοντας $m \approx 10^{-27} \text{ gr}$, και $h \approx \hbar \approx 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec}$, έχουμε από την (9.85): $E \approx 10^{-11} \text{ erg} \approx 10 \text{ eV}$. Αυτός ο αριθμός δεν απέχει κατά πολύ από την κινητική ενέργεια του ατόμου του υδρογόνου, όπως είδαμε νωρίτερα.

Αν θεωρήσουμε ένα νετρόνιο ή πρωτόνιο με μάζα $m \approx 10^{-24} \text{ gr}$ μέσα σ' ένα πυρήνα με τυπική διάμετρο της τάξεως των 10^{-12} cm , τότε η αντίστοιχη κινητική ενέργεια γίνεται $E \approx 10^{-6} \text{ erg} \approx 1 \text{ MeV}$.

Αυτή είναι και η σωστή τάξη μεγέθους για την κινητική ενέργεια των νουκλεονίων στη θεμελιώδη κατάσταση ενός τυπικού πυρήνα. Αν, απ' την άλλη μεριά θεωρήσουμε ένα ηλεκτρόνιο περιορισμένο μέσα στο εσωτερικό του πυρήνα ($L \approx 10^{-12} \text{ cm}$), τότε η κινητική ενέργεια που προκύπτει φαίνεται να είναι της τάξεως, $E \approx 1 \text{ keV}$. Μία τέτοια κινητική ενέργεια για ένα σωματίο σαν το ηλεκτρόνιο θα πρέπει αμέσως να «σημάνει κάποιο συναγερμό» για την ορθότητα των εκτιμήσεών μας. Καλό είναι να κάνουμε μία μικρή παρένθεση για να συζητήσουμε αυτό το θέμα. Μεγάλη κινητική ενέργεια και μικρή μάζα σημαίνει πολύ μεγάλες ταχύτητες. Αυτό με την σειρά του σημαίνει πως η

ειδική θεωρία της σχετικότητας θα πρέπει να έχει αποφασιστική σημασία για την περιγραφή του φαινομένου. Μία απλή αντικατάσταση στην μη σχετικιστική σχέση μάζα ταχύτητα = ορμή μπορεί να μας πείσει επειδή δίνει πολύ μεγάλες ταχύτητες σε σύγκριση με την ταχύτητα του φωτός. Έτσι λοιπόν θα πρέπει να αναθεωρήσουμε τη μη σχετικιστική προσέγγιση του θέματος και να χρησιμοποιήσουμε από την αρχή τη σχετικιστική σχέση για την κινητική ενέργεια, $E_{\text{κιν.}}$:

$$(E_{\text{κιν.}} + E_o)^2 = p^2 c^2 + E_o^2 \quad (9.86),$$

$$\text{όπου} \quad E_o = m_o c^2 \quad (9.87),$$

η ενέργεια που αντιστοιχεί στην μάζα ηρεμίας, m_o , του ηλεκτρονίου, η οποία είναι $\sim 0.5 \text{ MeV}$. Θέτοντας, κατά τα γνωστά

$$p \approx \frac{\hbar}{L},$$

παίρνουμε για την ελάχιστη κινητική ενέργεια την τιμή $E_{\text{κιν. ελάχιστη}} \approx 20 \text{ MeV}$.

Συγκρίνοντας αυτήν την ελάχιστη κινητική ενέργεια με την κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων κατά την β -πυρηνική διάσπαση που δεν υπερβαίνουν τις μερικές εκατοντάδες keV, μπορούμε να συμπεράνουμε πως τα ηλεκτρόνια της ακτινοβολίας βήτα δεν μπορούν να αποτελούν σταθερούς δομικούς λίθους του πυρήνα. Αρχικά, κάτι τέτοιο είχε πιστευτεί για κάποιο χρονικό διάστημα μετά την ανακάλυψη της φύσεως των σωματίων βήτα από τον H. Becquerel το 1900.

Βλέπουμε για μία ακόμη φορά, πως ενώ δεν υπάρχουν στη φύση απειρόβαθα δυναμικά, το πρότυπο του απειρόβαθου πηγαδιού δυναμικού μπορεί να προσεγγίσει (και να διευκρινίσει) αρκετά ενδιαφέροντα πραγματικά φυσικά προβλήματα και συστήματα, με το ελάχιστο δυνατό μαθηματικό κόστος. Αυτός άλλωστε είναι και ο στόχος αυτού του εδαφίου και γι' αυτόν τον λόγο επανερχόμαστε, για πολλοστή φορά, στο απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού.

Καιρός είναι τώρα να εξετάσουμε και ένα πιο πολύπλοκο πρόβλημα, στο οποίο η δυναμική ενέργεια να μην είναι σταθερή ή μηδέν. Το πρόβλημα του ατόμου του υδρογόνου είναι το πιο κατάλληλο παράδειγμα για την περίπτωση αυτή.

Παράδειγμα 9.10

Εκτιμήστε την ενέργεια της θεμελιώδους καταστάσεως του ατόμου του υδρογόνου.

Απάντηση

Θεωρώντας τον πυρήνα (πρωτόνιο) ακίνητο στην αρχή των συντεταγμένων (αφού δεν μας ενδιαφέρει η μεταφορική κίνηση του ατόμου σαν σύνολο, αλλά μόνο η σχετική κίνηση του ηλεκτρονίου ως προς τον πυρήνα¹⁰⁶) η ολική ενέργεια του ατόμου δίνεται από την σχέση:

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{ke^2}{r} \quad (9.88),$$

όπου m είναι η μάζα του ηλεκτρονίου και η σταθερά k εξαρτάται από το σύστημα μονάδων. Στο CGS σύστημα η τιμή της σταθεράς k είναι η μονάδα ενώ στο MKSA σύστημα μονάδων είναι ίση προς $1/4\pi\epsilon_0$.

Εύλογο είναι να θέσουμε Σ' αυτή την περίπτωση $\Delta x=r$, οπότε προκύπτει ότι:

$$p \approx \hbar/r \quad (9.89).$$

Η ενέργεια τότε στην(9.88) γράφεται:

$$E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{ke^2}{r} \quad (9.90).$$

Αμέσως βλέπουμε από αυτή τη σχέση ότι αυτό που αναγνωρίζαμε σαν κινητική ενέργεια, παίζει τώρα τον ρόλο ενός απωστικού δυναμικού το οποίο εξαρτάται από την ακτίνα r . Η εξάρτηση μάλιστα από $1/r^2$ (ενώ το ελκτικό δυναμικό εξαρτάται από $1/r$) εξασφαλίζει την επικράτηση του απωστικού όρου στις πολύ μικρές αποστάσεις έτσι ώστε το ηλεκτρόνιο να μην «πέσει» τελικά επάνω στον πυρήνα. Βλέπουμε λοιπόν πως *η αρχή της αβεβαιότητας, η οποία είναι άμεσα συνδεδεμένη με την κυματική φύση του ηλεκτρονίου, είναι υπεύθυνη για το πεπερασμένο και μη-μηδενικό μέγεθος της ακτίνας του ατόμου του υδρογόνου, και κατ' επέκταση και όλων των άλλων ατόμων. Έτσι, μπορούμε να πούμε πως η αντίσταση στον εντοπισμό των υλικών κυμάτων, εξηγεί το μέγεθος, αλλά και την ενέργεια, από την (9.90), των ατόμων.*

Για την εύρεση της ακτίνας ισορροπίας, θα πρέπει κατά τα γνωστά να βρούμε τη θέση όπου η ελκτική και η απωστική δύναμη εξισορροπούν, δηλαδή τη θέση όπου η παράγωγος της ενέργειας $E(r)$ μηδενίζεται:

$$\left. \frac{\partial E(r)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0 \quad (9.91).$$

Από αυτή τη σχέση, παραγωγίζοντας την(9.90), βρίσκουμε:

¹⁰⁶ Μπορούμε προς στιγμήν να θεωρήσουμε ότι ο πυρήνας έχει άπειρη μάζα (ή μάζα του είναι περίπου 2000 φορές μεγαλύτερη από τη μάζα του ηλεκτρονίου) και να βάλουμε στην θέση της ανηγμένης μάζας, την μάζα του ηλεκτρονίου. Δείτε, για παράδειγμα τις σχέσεις 8.26-8.27 και την συζήτηση που τις συνοδεύει, στο κεφάλαιο 8

$$r_o = \frac{\hbar^2}{kme^2} \quad (9.92).$$

Αυτή, ως γνωστόν, είναι και η πραγματική ακτίνα που δίνει το μοντέλο του Bohr και αριθμητική τιμή της είναι ακριβώς ίση με 0.529 \AA ή $0.529 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

Η ενέργεια της θεμελιώδους καταστάσεως E_o , προκύπτει αβίαστα από την (9.90) θέτοντας $r=r_o$. Έτσι, λαμβάνουμε την γνωστή έκφραση

$$E = -k^2 \frac{me^4}{2\hbar^2} \quad (9.93).$$

η οποία έχει, όπως είδαμε νωρίτερα την αριθμητική τιμή των 13.6 eV.

Μετά από αυτό το αποτέλεσμα και την όλη συζήτηση που προηγήθηκε, δεν χρειάζονται παραπέρα σχόλια για την αξία και χρησιμότητα τέτοιων «απλοϊκών» μεθόδων υπολογισμού. Αρκεί βέβαια, πάντα να θυμόμαστε πως το γεγονός ότι βρήκαμε το ακριβές αποτέλεσμα στο παραπάνω παράδειγμα, δεν θα πρέπει να μας οδηγεί σε λάθος υπερεκτιμήσεις.

Ερωτήσεις

9.4 Με το σκεπτικό ότι «κάθε παρατήρηση διαταράσσει το παρατηρούμενο αντικείμενο» ένας φανατικός οπαδός της τηλεπάθειας ισχυρίζεται ότι είναι δυνατόν παρατηρώντας επισταμένα έναν περαστικό ο οποίος του έχει εστραμμένη την πλάτη να τον κάνει να γυρίσει προς το μέρος του (εφόσον δεχθούμε ότι ο περαστικός έχει αρκετή ευαισθησία ώστε να ανιχνεύσει την διαταραχή την οποία του προκαλεί η παρατήρηση). Μπορείτε να αναπτύξετε επιχειρήματα υπέρ ή εναντίον αυτής της πρότασης;

9.5 Αναφερόμενοι στο σχήμα 9.36, στην περίπτωση που έχουμε δέσμη φωτονίων στην ορατή περιοχή του φάσματος και εύρος σχισμής $l = 1 \text{ mm}$, περιγράψετε πως θα είναι η πραγματική σκιά στο πέτασμα. Πως συγκρίνεται με την (γεωμετρική) σκιά του σχήματος;

Ασκήσεις

9.7 Το σήμα ενός τηλεοπτικού σταθμού αποτελείται από διαμορφωμένους κυματοπαλμούς διάρκειας περίπου 10^{-6} sec . Μπορείτε να δικαιολογήσετε γιατί δεν είναι δυνατόν ένας τηλεοπτικός σταθμός να εκπέμπει στην περιοχή (ζώνη) των ραδιοκυμάτων AM. Η ζώνη συχνοτήτων των ραδιοκυμάτων AM εκτείνεται περίπου από $0.5 \times 10^6 \text{ Hz}$ μέχρι $1.5 \times 10^6 \text{ Hz}$.

9.8 Η θέση ενός ηλεκτρονίου μπορεί να μετρηθεί με ακρίβεια 1.0×10^{-9} m. Με πόση ακρίβεια μπορεί να προσδιοριστεί η ταχύτητά του;

9.9 Ένα ηλεκτρόνιο και μια μπάλα ποδοσφαίρου μάζας 150 γραμμαρίων κινούνται (και τα δύο) με ταχύτητα 500 m/sec, μετρημένη με ακρίβεια 0.05%. Υπολογίστε την αβεβαιότητα στη θέση του καθενός από αυτά τα σώματα και σχολιάστε το αποτέλεσμα. Εάν η σταθερά του Planck ήταν ίση με την μονάδα ($\hbar = 1 \text{ J} \cdot \text{sec}$), πως θα άλλαζαν τα αποτελέσματα και τα σχόλια σας;

9.10 Χρησιμοποιείστε την αρχή της αβεβαιότητας για να δείξετε ότι εάν ένα ηλεκτρόνιο βρισκόταν στο εσωτερικό του πυρήνα ενός ατόμου, η ακτίνα του οποίου είναι 10^{-15} m, θα είχε ενέργεια μερικές εκατοντάδες MeV. Πειραματικά έχει παρατηρηθεί εκπομπή ηλεκτρονίων από τον πυρήνα (εκπομπή «ακτίνων» β) με μέγιστες ενέργειες της τάξεως μερικών εκατοντάδων keV. Ποια είναι τα συμπεράσματά σας;

9.11 Βρείτε την χαμηλότερη ενέργεια (σε ηλεκτρονιοβόλτ) ενός φωτονίου το οποίο είναι περιορισμένο μέσα σε ένα μονοδιάστατο «κουτί» μήκους $L=1\text{\AA}$.

9.12 Ένα ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση περιορισμένο μέσα σε ένα μονοδιάστατο «κουτί» μήκους $L=1\text{\AA}$. Για να προσδιορίσουμε την θέση του ηλεκτρονίου μέσα σε μια απόσταση 0.1\AA στο εσωτερικό του κουτιού, χρησιμοποιούμε φωτόνια μήκους κύματος $\lambda=0.1\text{\AA}$.

α) Ποια είναι πριν την μέτρηση η ενέργεια του ηλεκτρονίου; και ποια η αβεβαιότητα στην τιμή αυτή της ενέργειας;

β) Ποια θα είναι μετά την μέτρηση η αβεβαιότητα στην ενέργεια του ηλεκτρονίου;

γ) Σε ποιες ενεργειακές καταστάσεις θα μπορούσε να βρεθεί το ηλεκτρόνιο μετά τη μέτρηση;

9.13 Χρησιμοποιείστε την αρχή της αβεβαιότητας για να εκτιμήσετε την ενέργεια της θεμελιώδους καταστάσεως ενός αρμονικού ταλαντωτή, συχνότητας ω .

9.5 Ερμηνεία και φύση των υλικών κυμάτων: Οι κυματικές ιδιότητες των σωματιδίων και το νόημα της κυματοσυνάρτησης.

9.5.1 Σύνδεση κυματικής και σωματιδιακής εικόνας.

Χρησιμοποιήσαμε επανειλημμένα μέχρι τώρα, σ' αυτό το κεφάλαιο την έννοια των υλικών κυμάτων, των κυματικών χαρακτηριστικών των σωματιδίων, καθώς και την συμπληρωματικότητα της σωματιδιακής και κυματικής εικόνας, έχοντας επιμελώς αποφύγει οποιαδήποτε ουσιαστική αναφορά στην ακριβή φύση και το είδος των υλικών

κυμάτων. Ερωτήματα τα οποία συνδέονται με την ακριβή σχέση των χωρικών ιδιοτήτων του κύματος και της θέσης των σωματιδίων, καθώς επίσης και τη γενική (Φυσική και Μαθηματική) περιγραφή της κυματικής διαταραχής, παραμένουν εν πολλοίς αδιευκρίνιστα. Εντούτοις σε πολλά σημεία έχουμε αναφέρει (απλά και αδιευκρίνιστα) ότι η χωρική κατανομή του «υλικού» κύματος συνδέεται με κάποιο (μάλλον μυστηριώδη) τρόπο με τη θέση του αντίστοιχου σωματιδίου. Για ένα μεγάλο πλήθος σωματίων χρησιμοποιήσαμε κατά καιρούς (π.χ. στην ενότητα 9.3 και στο παράδειγμα 9.8) την αναλογία με τη συζήτηση του κεφαλαίου 5 για τα φωτόνια, για να συνδέσουμε την χωρική κατανομή της έντασης του κύματος με την κατανομή (πυκνότητα) των σωματίων που βρίσκονται σε μια περιοχή του χώρου (π.χ. του πετάσματος). Αυτή την αντιστοιχία, της χωρικής κατανομής της έντασης του κύματος με την πυκνότητα των σωματίων, χρησιμοποιήσαμε για ένα και μοναδικό σωματίο στο παράδειγμα 9.8 (της διέλευσης ενός ηλεκτρονίου από μια λεπτή σχισμή) για να συνδέσουμε *ad hoc* την ένταση του κύματος σε μια περιοχή με την πιθανότητα να βρεθεί το σωματίο στην ίδια περιοχή του χώρου. Θα συζητήσουμε λεπτομερώς παρακάτω αυτή την σύνδεση και αντιστοιχία

Χρησιμοποιήθηκε επίσης πολλές φορές ο όρος «κυματοσυνάρτηση» του σωματιδίου, με την κλασική έννοια. Η έννοια αυτή αντιστοιχεί στην συνάρτηση $\psi(x,t)$ η οποία περιγράφει την χωροχρονική μεταβολή της κυματικής διαταραχής, χωρίς εν προκειμένω να έχει ξεκαθαριστεί η φύση της διαταραχής. Για παράδειγμα, για τα κλασικά ηχητικά κύματα η κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t)$ περιγράφει (σε κάθε θέση και σε κάθε χρονική στιγμή) την μεταβολή της πίεσης ή της πυκνότητας του αέρα (εφόσον θεωρούμε ηχητικά κύματα στην ατμόσφαιρα). Για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα η κυματοσυνάρτηση περιγράφει την χωροχρονική μεταβολή του ηλεκτρικού ή/και του μαγνητικού πεδίου. Τι όμως ακριβώς περιγράφει για τα υλικά κύματα τα οποία «συνοδεύουν» τα σωματίδια;

Πριν προσπαθήσουμε να απαντήσουμε σ' αυτό το ερώτημα ας κάνουμε μια μικρή παρένθεση για να υπενθυμίσουμε «τις ρίζες του κακού».

Όλα ξεκινούν από το γεγονός ότι στον μικρόκοσμο (στις διαστάσεις των ατόμων και μορίων και των συστατικών τους σωματιδίων) τα «πράγματα» (σωμάτια, κύματα) δεν συμπεριφέρονται με τον γνωστό τρόπο που συμπεριφέρονται τα συνηθισμένα σωματίια και κύματα του μακρόκοσμου. Αν θέλουμε να περιγράψουμε και ερμηνεύσουμε την συμπεριφορά του μικρόκοσμου με τις έννοιες και λογικές παραστάσεις του μακρόκοσμου, χωρίς να τις αναθεωρήσουμε δραστικά θα πέσουμε σε λογικές αντιφάσεις. Τα μικροσκοπικά σωματίια δεν συμπεριφέρονται όπως τα μακροσκοπικά σώματα και το ίδιο

συμβαίνει και για τα κύματα. Η αρχή της Συμπληρωματικότητας είναι μια γέφυρα ανάμεσα στις δύο φαινομενικά αντίθετες απόψεις. Σωματίδια και κύματα συμπεριφέρονται παράξενα σε μικροσκοπική κλίμακα. Όμως, για καλή μας τύχη, και τα σωματίδια (π.χ. ηλεκτρόνια) και τα κύματα (π.χ. φωτόνια) συμπεριφέρονται με τον ίδιο ενιαίο (αν και παράξενο) τρόπο. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιούμε, ανάλογα με την περίπτωση, την κατάλληλη εικόνα και αναλογία από την εμπειρία μας, ώστε να οδηγηθούμε σε μια ορθολογιστική ερμηνεία.

Ας επανέλθουμε λοιπόν στο ερώτημα για την κυματική φύση των σωματιδίων.

Το μόνο σωματίο μέχρι στιγμής, για το οποίο είναι γνωστός ο κυματικός του χαρακτήρας είναι το φωτόνιο. Άλλωστε η ιδέα των υλικών κυμάτων ξεκίνησε από την αναλογία των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων και των ιδιοτήτων του φωτονίου. Κατά συνέπεια, είναι εννοιολογικά και παιδαγωγικά προτιμότερο να προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε την σύνδεση κυματικών και σωματιδιακών χαρακτηριστικών για το φωτόνιο πρώτα και ύστερα να επεκταθούμε και στα υπόλοιπα σωματίδια. Όπως είδαμε στο εδάφιο 5.2, τα συνηθισμένα κυματικά φαινόμενα της περίθλασης και συμβολής των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων αφορούν ένα μεγάλο πλήθος φωτονίων. Η ένταση της φωτεινής δέσμης αποτελεί την έννοια-κλειδί για την σύνδεση της κυματικής (ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία) και της σωματιδιακής (ροή φωτονίων) εικόνας για το φως. Στην κυματική εικόνα, η ένταση της ακτινοβολίας $I(x,t)$ μιας μονοχρωματικής δέσμης σε κάθε θέση και κάθε χρονική στιγμή, είναι ανάλογη προς το τετράγωνο της κυματοσυναρτήσεως $\Psi(x,t)$, δηλαδή του τετραγώνου του ηλεκτρικού πεδίου $E(x,t)$:

$$I(x,t) \sim |\Psi(x,t)|^2 \quad (9.94) \quad \text{\textit{Κυματικό ανάλογο της έντασης της ακτινοβολίας}}$$

Η ίδια ποσότητα στην σωματιδιακή εικόνα (του φωτονίου), όπως είδαμε στο υποκεφάλαιο 5.2, δίνεται από τη σχέση: $I(x,t) = N(x,t) \times (h\nu)$ (5.19),

όπου $N(x,t)$ είναι ο αριθμός των φωτονίων που φτάνουν ανά μονάδα χρόνου, την χρονική στιγμή t στη θέση μεταξύ x και $x+dx$, μιας μοναδιαίας επιφανείας κάθετης προς την διεύθυνση της δέσμης. Για μια μονοχρωματική δέσμη δεδομένης συχνότητας, λοιπόν, η ένταση είναι ανάλογη προς τον αριθμό των φωτονίων $N(x,t)$:

$$I(x,t) \sim N(x,t) \quad (9.95) \quad \text{\textit{Σωματιδιακό ανάλογο της έντασης της ακτινοβολίας.}}$$

Μπορούμε λοιπόν, κατ' αναλογία, να δεχθούμε ότι ισχύουν αντίστοιχες σχέσεις και για δέσμες ηλεκτρονίων ή άλλων σωματιδίων.

Συγκρίνοντας την (9.94) με την (9.95) βρίσκουμε :

$$|\psi(x,t)|^2 \sim N(x,t) \quad (9.96) \quad \text{\textit{\underline{Σύνδεση της κυματοσυνάρτησης με το πλήθος των σωματιδίων μιας δέσμης.}}}$$

$$\text{Η } |\psi(x,t)|^2 = C \cdot N(x,t) \quad (9.97),$$

όπου C μια κατάλληλη σταθερά αναλογίας.

Αυτή η σύνδεση δημιουργεί μια σειρά από ερωτήματα, όπως για παράδειγμα:

Τι γίνεται στην περίπτωση κατά την οποία αντί μιας δέσμης όμοιων σωματιδίων έχουμε ένα μόνο σωματίο;

Με άλλα λόγια, αν γνωρίζουμε την συμπεριφορά (την κατανομή στον χώρο) μιας δέσμης πολλών όμοιων σωματιδίων, μπορούμε να πούμε κάτι για την συμπεριφορά ενός από αυτά τα σωματίδια επιλεγμένου στην τύχη; Ή, ακόμα καλύτερα, μπορούμε να πούμε κάτι για την συμπεριφορά ενός άλλου όμοιου σωματιδίου όταν βρεθεί στις ίδιες ακριβώς συνθήκες;

Για παράδειγμα, μπορούμε να επισημάνουμε τις περιοχές του χώρου στις οποίες έχουμε μεγάλη πιθανότητα να βρούμε το σωματίο και τις περιοχές όπου έχουμε πολύ μικρή πιθανότητα να το βρούμε;

Στην ανάλυση του παραδείγματος 9.8 αναγνωρίσαμε τις περιοχές υψηλής έντασης της δέσμης ως τις περιοχές όπου έχουμε μεγάλη πιθανότητα να βρούμε το σωματίο μετά από την διέλευσή του μέσα από την σχισμή. *Πόσο γενική είναι αυτή η παρατήρηση και πως θεμελιώνεται θεωρητικά;*

Για να βρούμε μια ακριβή και λεπτομερή απάντηση (η οποία, όπως διαισθανόμαστε, θα είναι θετική) θα επανεξετάσουμε με περισσότερη λεπτομέρεια και κριτική διάθεση τα κλασικά «κυματικά» πειράματα περίθλασης και συμβολής από μία και δύο σχισμές, αντίστοιχα.

9.5.2 Αναδρομή στο πείραμα της μιας σχισμής

Για την πειραματική απόδειξη της κυματικής φύσεως των ηλεκτρονίων χρησιμοποιήσαμε στο εδάφιο 9.2.4 το πείραμα του σχήματος 9.13, της διελεύσεως μια δέσμης ηλεκτρονίων από μια λεπτή σχισμή και την παρατήρησή της πάνω σε μια φωτογραφική πλάκα ή ένα φθορίζον πέτασμα στο πίσω μέρος της σχισμής. Το αποτέλεσμα που προκύπτει (και το οποίο αποδεικνύει την κυματική υπόσταση της δέσμης των ηλεκτρονίων) είναι η εικόνα περίθλασης του σχήματος 9.14 ή η καμπύλη της έντασης $I(x,t)$ του σχήματος 9.37. Όπως είδαμε νωρίτερα το σχήμα της καμπύλης $I(x,t)$ συμπίπτει με εκείνο της $N(x,t)$. Η ένταση, λοιπόν, της δέσμης μας δίνει ταυτόχρονα την κατανομή των σωματιδίων στις διάφορες

θέσεις x . Έχοντας την κατανομή $N(x,t)$ για ένα πάρα πολύ μεγάλο (πρακτικά άπειρο) πλήθος σωματιδίων, το ερώτημα που γεννάται (γεννήθηκε στο προηγούμενο εδάφιο) είναι: Τι πληροφορία μας δίνει η κατανομή $N(x,t)$ για ένα μεμονωμένο σωματίο που διέρχεται μέσα από κάποια από τις οπές ;

Όπως γνωρίζουμε δεν μπορούμε να προβλέψουμε σε ποια θέση (x) στο πέτασμα θα βρεθεί το σωματίο σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Όμως, μπορούμε να προβλέψουμε την πιθανότητα να βρεθεί το σωματίο σε μια μικρή περιοχή πολύ κοντά από το x . Μπορούμε για παράδειγμα να πούμε ότι το σωματίο έχει πολύ μεγαλύτερη πιθανότητα να βρεθεί σε κάποια θέση πολύ πλησίον στο μέγιστο της καμπύλης $N(x,t)$, ή της $I(x,t)$, παρά σε κάποια άλλη περιοχή. Ομοίως, εκεί που η καμπύλη $N(x,t)$ μηδενίζεται, η πιθανότητα $P(x)$ να βρούμε το σωματίο είναι μηδενική. Γενικά, η πιθανότητα $P(x)$ (για κάποια δοσμένη χρονική στιγμή t) είναι ανάλογη προς την $|\psi(x,t)|^2$ (και προς την $N(x,t)$ προφανώς). Επειδή έχουμε μια συνεχή κατανομή του πλήθους των σωματιδίων $N(x,t)$ και της πιθανότητας με την θέση x (σε αντίθεση με την περίπτωση της ρήψης ενός νομίσματος, όπου έχουμε δύο διακριτές εκδοχές) εισάγουμε την κατανομή της πιθανότητας, $p(x) \equiv \frac{dP(x)}{dx}$ (9.98).

Οπότε, η πιθανότητα $P(x, x+\Delta x)$ να βρεθεί ένα σωματίο σε μια περιοχή του χώρου (του πετάσματος, εν προκειμένω) μεταξύ των θέσεων x και $x+\Delta x$ γράφεται:

$$P(x, x + \Delta x) = p(x)\Delta x = |\psi(x,t)|^2 \Delta x \quad (9.99).$$

Δηλαδή η πιθανότητα $P(x, x+\Delta x)$ είναι ανάλογη προς το τετράγωνο του πλάτους της κυματοσυνάρτησης $|\psi(x,t)|^2$ και προς το εύρος της περιοχής Δx .

Στο όριο $\Delta x \rightarrow 0$, όπου το εύρος της περιοχής γίνεται απειροστά μικρό, μπορούμε να γράψουμε:

$$p(x)dx = |\psi(x,t)|^2 dx \quad (9.100) \quad \text{\textcolor{red}{\underline{Σύνδεση της κυματοσυνάρτησης με την πιθανότητα να βρεθεί το σωματίο στη περιοχή μεταξύ } x \text{ και } x+dx.}}$$

Με άλλα λόγια, για μια δεδομένη χρονική στιγμή t , οι καμπύλες $|\psi(x,t)|^2$, $N(x,t)$, $I(x,t)$ και $p(x)$, εκτός από κάποιο πολλαπλασιαστικό παράγοντα (ή «σταθερά νορμαλισμού») συμπίπτουν.

Μπορούμε λοιπόν, σύμφωνα με την (9.100), να προβλέψουμε την πιθανότητα $p(x)$ να βρεθεί ένα ηλεκτρόνιο (ένα σωματίο) σε κάποια περιοχή μεταξύ x και $x+dx$, εφόσον γνωρίζουμε την κατανομή $|\psi(x,t)|^2 \sim N(x,t)$ στη ίδια περιοχή. Η πρόβλεψη μας είναι ανάλογη με την περίπτωση της πρόβλεψης για την πιθανότητα να έχουμε «κεφάλι» ή «γράμματα» κατά το ρίξιμο ενός νομίσματος. Εάν ρίξουμε το νόμισμα πάρα πολλές (θεωρητικά άπειρες) φορές, θα ανακαλύψουμε ότι τις μισές φορές θα έχουμε «κεφάλι» και τις άλλες μισές «γράμματα». Έτσι (διαιρώντας το πλήθος των δοκιμών που έδωσαν γράμματα με το συνολικό πλήθος των δοκιμών) βλέπουμε πως η πιθανότητα για «γράμματα» είναι 50%, όπως και για «κεφάλι». Με ανάλογο τρόπο, διαιρώντας την καμπύλη $N(x,t)$, με το ολικό πλήθος των σωματιδίων $N_{ολ}$, τα οποία πέρασαν μέσα από την οπή, έχουμε την κατανομή της πιθανότητας $p(x,t)$, για τη θέση ενός σωματιδίου (ηλεκτρονίου) επάνω στο πέτασμα. Κατά συνέπεια, επιλέγοντας $C = \frac{1}{N_{ολ}}$ στην (9.97),

μπορούμε να γράψουμε :

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{N(x,t)}{N_{ολ}} = p(x) \quad (9.101).$$

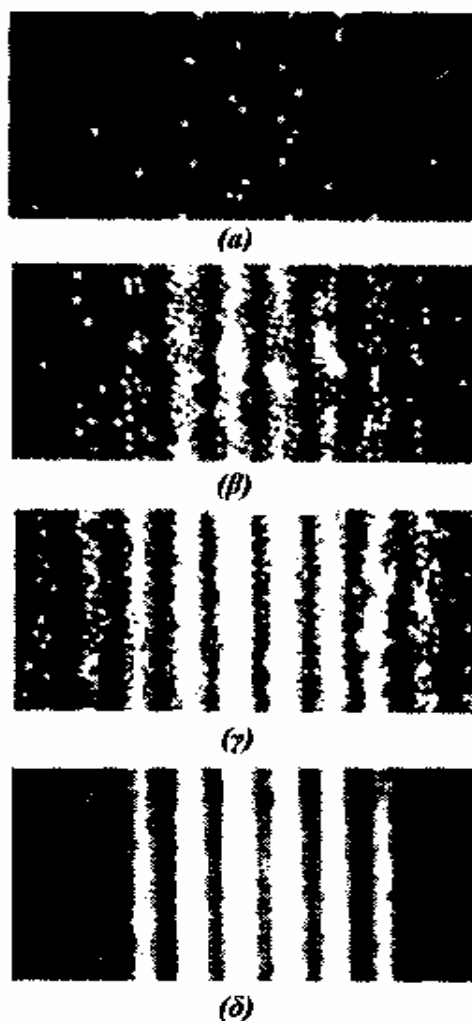
Η κυματική διαταραχή, την οποία περιγράφει η κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t)$ δεν είναι παρά η κατανομή της πιθανότητας $p(x)$.

Δηλαδή, **τα υλικά κύματα είναι «κύματα πιθανότητας».**

Πράγματι, εάν εξασθενήσουμε τελείως την δέσμη των ηλεκτρονίων, ώστε κάθε φορά να διέρχεται ένα μόνο ηλεκτρόνιο από την σχισμή, η θέση του στο πέτασμα δεν θα είναι καθορισμένη, παρά μόνο η πιθανότητα να βρεθεί γύρω από κάποια θέση. Εάν περιμένουμε αρκετό χρονικό διάστημα ώστε να έχουμε ένα μεγάλο πλήθος ηλεκτρονίων επάνω στο πέτασμα, τότε η κατανομή τους θα έχει το σχήμα της καμπύλης της εντάσεως του σχήματος 9.34. Για μεγάλο πλήθος (θεωρητικά άπειρο) σωματιδίων, οι καμπύλες του σχετικού πλήθους των σωματιδίων, σχέση (9.101), και της σχετικής έντασης, σχέση (9.95) συμπίπτουν με την κατανομή της πιθανότητας. Στα ενδιάμεσα χρονικά διαστήματα, καθώς το πλήθος των σωματιδίων διαρκώς αυξάνεται, θα έχουμε εικόνες στο πέτασμα ανάλογες προς εκείνες του σχήματος 5.3 ή του σχήματος 9.38, το οποίο απεικονίζει τις διαδοχικές εικόνες συμβολής ηλεκτρονίων από δύο λεπτές σχισμές. Η αντίστοιχη κατανομή της έντασης στο πέτασμα, η οποία απεικονίζει την $|\psi(x)|^2$ είναι σχεδιασμένη στο σχήμα 9.39.

Σύμφωνα λοιπόν μ' αυτή την ερμηνεία, τα σωματάρια είναι σωματάρια (όπως και τα φωτόνια για το φως) για τα οποία δεν μπορούμε να γνωρίζουμε (όπως άλλωστε απαιτεί και η αρχή της αβεβαιότητας) όλες τις λεπτομέρειες της κίνησης τους. Όμως η κατανομή των σωματιδίων στο χώρο, ή αλλιώς η πιθανότητα να βρεθούν σε συγκεκριμένη περιοχή του χώρου, περιγράφεται από το τετράγωνο μιας κυματοσυνάρτησης, $\psi(x,t)$. Η κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t)$ για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα προσδιορίζεται από την λύση μιας κυματικής εξίσωσης (γενικευμένου τύπου) η οποία είναι γνωστή ως κυματική εξίσωση Schrödinger.

Την μορφή της κυματικής εξίσωσης Schrödinger θα εξετάσουμε στο κεφάλαιο 10. Το σχήμα 9.39 απαντάει ουσιαστικά και στο ερώτημα για το πως θα μπορούσε κανείς να μετρήσει την κατανομή πιθανότητας, έστω και με ιδεατό πείραμα. Η διαδικασία, την οποία περιγράφει το σχήμα 9.39 είναι ανάλογη με την διαδικασία για την μέτρηση της πιθανότητας να έχουμε «κεφάλι» ή «γράμματα» το «στρίψιμο» ενός νομίσματος. Όπως είναι γνωστό, η πιθανότητα να έχουμε «γράμματα» (ή «κεφάλι») είναι 1/2. Μπορούμε να αποδείξουμε πειραματικά αυτό το γεγονός, με μία μόνο μέτρηση; Προφανώς όχι. Θα πρέπει να επαναλάβουμε την μέτρηση πάρα πολλές φορές και μόνο στο όριο του πάρα πολύ μεγάλου (θεωρητικά άπειρου) αριθμού μετρήσεων το αποτέλεσμα θα πλησιάζει το 1/2. Με παρόμοιο λοιπόν τρόπο (όπως περιγράφεται στο σχήμα 9.39) για την μέτρηση της κατανομής πιθανότητας της θέσεως του ηλεκτρονίου στο πέτασμα, θα πρέπει να θεωρήσουμε και να καταγράψουμε ένα πολύ μεγάλο (θεωρητικά άπειρο) πλήθος μετρήσεων της θέσεως του ηλεκτρονίου (πάνω στο πέτασμα).

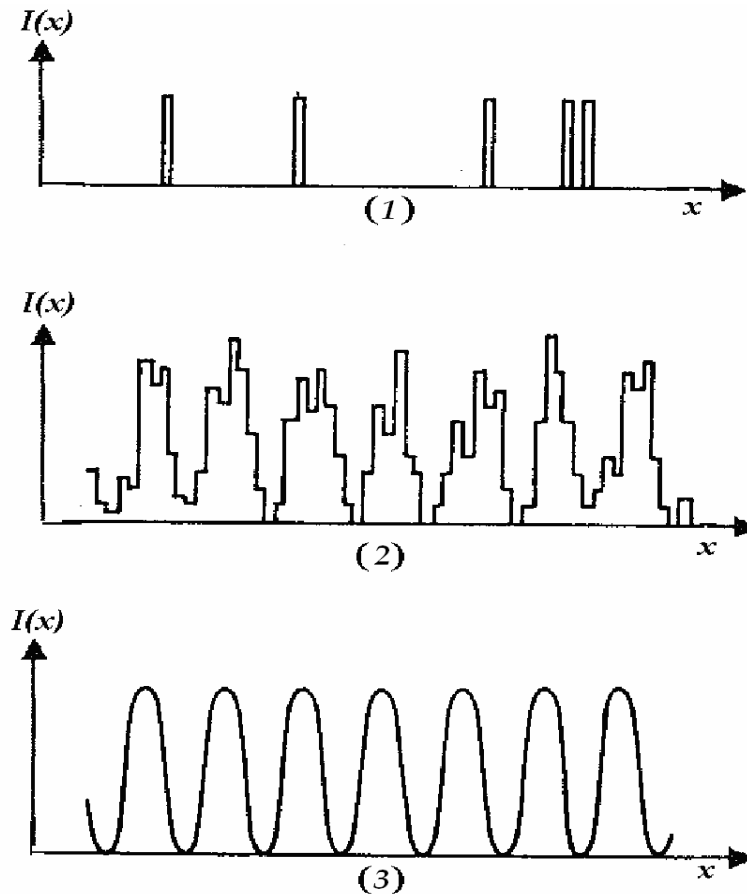
Σχήμα 9.38

Σχήμα 9.38

Η διαδοχική μεταβολή της εικόνας συμβολής ηλεκτρονίων από δύο λεπτές σχισμές, καθώς αυξάνεται ο χρόνος έκθεσης του φιλμ και συμμετέχει όλο και μεγαλύτερος αριθμός ηλεκτρονίων στον σχηματισμό της.

Ο αριθμός των ηλεκτρονίων στην εικόνα (α) είναι περίπου 30 (3×10^1), στην εικόνα (β) είναι 3×10^3 , στην εικόνα (γ) είναι 3×10^4 και στην εικόνα (δ) είναι 3×10^5 .

Βλέπουμε λοιπόν, ότι μόνο με την παρατήρηση ενός πολύ μεγάλου πλήθους ηλεκτρονίων, θ' αρχίσει το ιστόγραμμα της κατανομής τους σε διάφορες θέσεις του πετάσματος να μοιάζει με την καμπύλη του σχήματος 9.39(3), οπότε και η συμπεριφορά τους θα θυμίζει κυματική συμπεριφορά.

**Σχήμα 9.39**

Η διαδοχική μεταβολή της κατανομής της έντασης στο πέτασμα του σχήματος 9.38

Καθώς αυξάνεται ο αριθμός των ηλεκτρονίων τα οποία έχουν διέλθει από την σχισμή (ένα-ένα κάθε φορά) η κατανομή της έντασης αρχίζει να μοιάζει σταδιακά με την προβλεπόμενη κατανομή από την κυματική θεωρία. Οι κατανομές της έντασης στα σχήματα (1) και (2) επάνω, αντιστοιχούν στις εικόνες 9.38(α) και 9.38(β), αντίστοιχα, ενώ το διάγραμμα (3), κάτω, παριστάνει την κατανομή της έντασης μετά από άπειρο θεωρητικά χρόνο (ή μετά την καταγραφή άπειρου πλήθους ηλεκτρονίων) και αντιστοιχεί (σε καλή προσέγγιση) στην εικόνα 9.38(δ) του πετάσματος. Η ίδια εικόνα (3) απεικονίζει την κυματοσυνάρτηση $|\psi(x)|^2$. Σημείωση: Οι οπές θεωρείται ότι έχουν αμελητέο εύρος και έτσι δεν υπάρχουν φαινόμενα περίθλασης.

Η απαίτηση να διέρχονται τα ηλεκτρόνια ένα κάθε φορά από την σχισμή, είναι και η ειδοποιός διαφορά μεταξύ της αρχικής στατιστικής ερμηνείας, την οποία υπαινιχθήκαμε

στο κεφάλαιο 5 για τα φωτόνια, και της τελικής «πιθανοκρατικής» ερμηνείας των υλικών κυμάτων.

Η σύνδεση της κυματοσυνάρτησης με την κατανομή της πιθανότητας προϋποθέτει ορισμένες μαθηματικές ιδιότητες και περιορισμούς, με τις οποίες σταδιακά θα εξοικειωθούμε. Για παράδειγμα, από την (9.100) βλέπουμε ότι η πιθανότητα $P_{[a,b]}$ να βρεθεί ένα σωματίο στην περιοχή του χώρου από $x=a$ μέχρι και $x=b$ θα δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$P_{[a,b]} = \int_a^b p(x)dx = \int_a^b |\psi(x,t)|^2 dx \quad (9.102) \quad \text{\textit{πιθανότητα να βρεθεί το σωματίο στην περιοχή [a,b].}}$$

Από την σχέση αυτή προκύπτει η «συνθήκη νορμαλισμού»:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1 \quad (9.103),$$

αφού η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίο κάπου σε όλο τον χώρο (από $-\infty$ έως $+\infty$) είναι ίση με την μονάδα (δηλαδή είναι βεβαιότητα). Κατά συνέπεια, οι μαθηματικές απαιτήσεις για την συνάρτηση $\psi(x,t)$ θα πρέπει να εξασφαλίζουν την ύπαρξη (και την σύγκλιση) του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 dx$.

Δεν θα επεκταθούμε άλλο σ' αυτό το θέμα εδώ.

9.5.3 Πιθανότητα και Αβεβαιότητα

Έχουμε λοιπόν καταλήξει, όσο περίεργο και να φαίνεται, ότι τα υλικά κύματα, για τα οποία ομιλούσαμε τόσο καιρό χωρίς να γνωρίζουμε την ακριβή τους φύση, είναι κύματα πιθανότητας. Μάλιστα, φαίνεται πως μόνο η πιθανότητα και οι στατιστικές ιδιότητες που εξαρτώνται από αυτήν είναι δυνατόν να προσδιοριστούν για ένα μικροσκοπικό σωματίο όπως το φωτόνιο ή το ηλεκτρόνιο.

Μια τέτοια στατιστική ιδιότητα, είναι η μέση τιμή της θέσης, ενός σωματιδίου η οποία δίνεται από τη σχέση :

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x|\psi(x,t)|^2 dx \quad (9.104).$$

Η μέση τιμή στην (9.104) είναι γνωστή και ως αναμενόμενη τιμή της θέσης του σωματιδίου κατά την (επικείμενη) μέτρηση. Σε αντίθεση με την ακριβή θέση του σωματιδίου, η αναμενόμενη τιμή της θέσης του είναι παρατηρήσιμη ποσότητα, μπορεί δηλαδή να μετρηθεί. Κάτι αντίστοιχο ισχύει και για κάθε φυσική ποσότητα η οποία εξαρτάται από την θέση (είναι συνάρτηση της θέσης) του σωματιδίου. Για παράδειγμα,

αν θεωρήσουμε μια φυσική ποσότητα ϖ , η οποία είναι συνάρτηση της θέσης x και του χρόνου t , $\varpi = \varpi(x,t)$, η αναμενόμενη τιμή της ποσότητας αυτής κατά την μέτρηση ορίζεται από την σχέση:

$$\langle \varpi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi(x,t) |\psi(x,t)|^2 dx \quad (9.105) \quad \text{\textit{αναμενόμενη τιμή της ποσότητας } \varpi(x,t)}.$$

Αυτή η στατιστική ερμηνεία, όχι μόνο βρίσκεται σε πλήρη αρμονία με την αρχή της αβεβαιότητας (αφού υποδηλώνει πως δεν μπορούμε να γνωρίζουμε με ακρίβεια την θέση x , ενός σωματιδίου, αλλά μόνο την πιθανότητα να βρίσκεται σε κάποια συγκεκριμένη περιοχή από x έως $x+dx$), αλλά ταυτόχρονα μας καθοδηγεί στον αυστηρό και μονοσήμαντο καθορισμό των αβεβαιοτήτων (απροσδιοριστιών) Δx και Δp_x , οι οποίες υπεισέρχονται στις σχέσεις αβεβαιότητας (9.66), (9.67). Ως γνωστόν, η αβεβαιότητα μιας μέτρησης από την μέση τιμή καθορίζεται από την **μέση τετραγωνική απόκλιση** :

$$(\Delta x) = \pm \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad (9.106),$$

$$\text{όπου } \langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\psi(x,t)|^2 dx \quad (9.107).$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η γνώση της κυματοσυνάρτησης $\psi(x,t)$ εξασφαλίζει τον προσδιορισμό τόσο της μέσης τιμής της θέσης του σωματιδίου, όσο και την αβεβαιότητα στην τιμή αυτή (δηλαδή την μέση απόκλιση από την μέση τιμή) και όχι μόνο. **Η κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t)$ αυτή καθαυτή, περιέχει, όλες τις δυνατές πληροφορίες, τις οποίες μπορούμε να έχουμε για το συγκεκριμένο σωματίο στην συγκεκριμένη κατάσταση.**

Μάλιστα, με κατάλληλη διαδικασία (π.χ. με μετασχηματισμό Fourier) την οποία θα συναντήσουμε σε επόμενο τόμο, μπορούμε να βρούμε από την συνάρτηση $\psi(x,t)$, την κατανομή της πιθανότητας της ορμής p_x του σωματιδίου, $\varphi(p_x)$, καθώς και τις μέσες τιμές $\langle p_x \rangle$ και $\langle p_x^2 \rangle$. Μ' αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να προσδιορίσουμε με ακρίβεια και την αβεβαιότητα στην ορμή του σωματιδίου:

$$(\Delta p_x) = \pm \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2} \quad (9.108),$$

και να επαληθεύσουμε την «ακριβή σχέση αβεβαιότητας» (9.73).

Θα πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι οι αβεβαιότητες Δx και Δp_x δεν οφείλονται σε κάποιο πειραματικό σφάλμα λόγω ατέλειας των οργάνων, αλλά αποτελούν αναπόσπαστο μέρος της μετρητικής διαδικασίας, μέσα από την οποία προσπαθούμε να πάρουμε την μέγιστη δυνατή πληροφορία για ένα συγκεκριμένο φυσικό σύστημα. Όπως ήδη αναφέραμε, η μέγιστη δυνατή πληροφορία περιέχεται στην κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t)$.

Η σύγχρονη Κβαντική θεωρία περιγράφει τον τρόπο προσδιορισμού της $\psi(x,t)$, καθώς και την διαδικασία εξαγωγής της επιζητούμενης πληροφορίας, εντός των επιτρεπτών ορίων (αρχή αβεβαιότητας) μέσα από ένα αυτοσυνεπή και κομψό μαθηματικό φορμαλισμό, τον οποίο θα εξετάσουμε σε άλλο τόμο. Εντούτοις, δεν είναι, ομολογουμένως, εύκολο να δεχθεί κανείς αβασάνιστα την «πιθανοκρατική» ερμηνεία, που μόλις περιγράψαμε. Για παράδειγμα, εάν επαναλάβουμε το πείραμα (της μιας οπής) με ένα άλλο ηλεκτρόνιο με τις ίδιες ακριβώς συνθήκες, το ηλεκτρόνιο μπορεί να βρεθεί σε άλλη θέση στο πέτασμα (αφού μόνο η πιθανότητα να βρεθεί σε κάποια θέση μπορεί να προσδιορισθεί). Αυτό μοιραία οδηγεί στο συμπέρασμα πως είναι δυνατόν πειράματα, τα οποία γίνονται με τις ίδιες ακριβώς συνθήκες, να μην οδηγούν πάντα στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα (το οποίο αποτέλεσμα, στην προκειμένη περίπτωση, είναι η θέση του ηλεκτρονίου στο πέτασμα). Κατ' αυτόν τον τρόπο, φαίνεται πως μία από τις παλαιότερες θεμελιώδεις επιστημολογικές απαιτήσεις για την (επιστημονική) περιγραφή του φυσικού κόσμου παραβιάζεται.

Βλέπουμε λοιπόν πως η εξοικείωση με την ιδέα της «πιθανοκρατικής περιγραφής» και η αποδοχή της είναι μια σχετικά αργή διανοητική διαδικασία, η οποία θα προκύψει με κατάλληλη «διανοητική γυμναστική», μέσα από μια σειρά παραδειγμάτων και εφαρμογών.

9.5.4 Επιστροφή στο Παράδειγμα του Πειράματος των δύο οπών¹⁰⁷:

Πιθανότητα και Συμβολή.

Το πείραμα των δύο οπών το συναντήσαμε αρκετές φορές και σε διαφορετικές μορφές μέχρι τώρα (στο εδάφιο 9.2.4 και ιδιαίτερα στα σχήματα 9.16 , 9.17 και 9.18, στο προηγούμενο εδάφιο 9.5.3, σχήματα 9.38, 9.39). Σ' αυτό το εδάφιο, θα συνοψίσουμε τα βασικά συμπεράσματα από την μέχρι τώρα συζήτηση και θα επεκτείνουμε τους πειραματισμούς μας κάτω από το νέο πρίσμα των κβαντικών κυμάτων πιθανότητας. Για παράδειγμα, θα πρέπει να αναρωτηθούμε, τι παριστάνει η καμπύλη του σχήματος 9.39(3), η οποία προέρχεται από την συμβολή των δύο κυμάτων από τις οπές 1 και 2; Η απάντηση είναι σχετικά εύκολη (η κατανόηση είναι άλλο πράγμα). Η καμπύλη 9.39(3) παριστάνει την συμβολή P_{12} , δύο πιθανοτήτων P_1 και P_2 . Οι πιθανότητες P_1 και P_2

¹⁰⁷ Για μια όσο λεπτομερή περιγραφή του πειράματος των δύο οπών (ή δύο σχισμών) δείτε τις αντίστοιχες ενότητες στα κεφάλαια 7 και 8 του βιβλίου «Ταλαντώσεις και Κύματα» του Α. Ζδέτση.

περιγράφουν αντίστοιχα την πιθανότητα για ένα ηλεκτρόνιο, το οποίο καταγράφεται στη θέση x του πετάσματος, να έχει διέλθει από την οπή 1 ή την οπή 2.

Τι σημαίνει όμως αυτό;

Απ' τη μια πλευρά γνωρίζουμε ότι κατά την συμβολή: $P_{12} \neq P_1 + P_2$,

ενώ απ' την άλλη πλευρά, η εμπειρία μας με τα σωμάτια (όπως δεχθήκαμε ότι είναι τα ηλεκτρόνια) μας υπαγορεύει ότι $P_{12} = P_1 + P_2$,

αφού όλα τα ηλεκτρόνια τα οποία φθάνουν στην περιοχή της θέσης x έχουν διέλθει είτε από την οπή 1 είτε από την οπή 2.

Τα αποτελέσματα αυτά φαίνονται αντιφατικά και θα πρέπει να τα διερευνήσουμε, επινοώντας συμπληρωματικά πειράματα και διεργασίες.

Πριν επεκταθούμε σε νέες εκδοχές του πειράματος των δύο οπών, θα πρέπει να αναγνωρίσουμε ότι, σε αντίθεση με το ριζισμό του νομίσματος, του οποίου το ακριβές αποτέλεσμα δεν μπορούμε να προβλέψουμε (παρά μόνο την πιθανότητα) λόγω της πολυπλοκότητας και της έλλειψης λεπτομερών στοιχείων (π.χ. την ακριβή αρχική δύναμη και ροπή που εφαρμόζουμε στο νόμισμα με το χέρι μας, ή τις αντίστοιχες ποσότητες κατά την πρόσκρουση του νομίσματος στο δάπεδο), **στην περίπτωση του πειράματος των δύο οπών (και όλων των ανάλογων πειραμάτων) η πιθανοκρατική (στατιστική) περιγραφή εμφανίζεται ως αναγκαία φυσική πραγματικότητα, η οποία δεν οφείλεται σε κάποια ατελή ή ελλιπή πληροφορία για το πείραμα.** Θα πρέπει, δηλαδή, να δεχθούμε το δυσάρεστο συμπέρασμα ότι **η τυχαιότητα στην φυσική περιγραφή είναι θεμελιώδες Φυσικό αξίωμα.**

Εντούτοις, επειδή ο πειρασμός να ξεφύγουμε από αυτή την ερμηνεία είναι πολύ μεγάλος, υπήρξαν στο παρελθόν αντίθετες ερμηνείες, οι οποίες αποδίδουν την παρατηρούμενη τυχαιότητα στην ύπαρξη «κρυμμένων» μεταβλητών ή παραμέτρων. Σύμφωνα με αυτές τις θεωρίες, οι οποίες δεν επαληθεύτηκαν από το πείραμα, η τυχαιότητα οφείλεται σε κάποιες «κρυμμένες» μεταβλητές ή παραμέτρους, τις οποίες αν γνωρίζαμε θα μπορούσαμε, έστω και θεωρητικά, να προβλέψουμε με ακρίβεια το αποτέλεσμα του πειράματος (όπως την ακριβή θέση του ηλεκτρονίου στο πέτασμα). Δηλαδή η αναγκαιότητα της στατιστικής περιγραφής θα ήταν όμοια με εκείνη για την πρόβλεψη του αποτελέσματος κατά το ριζισμό ενός νομίσματος ή κατά την πρόβλεψη του καιρού. Κάτι τέτοιο όμως δεν αληθεύει. Παρά τους «ευσεβείς πόθους» μας για το αντίθετο, η τυχαιότητα και πιθανοκρατική ερμηνεία παραμένουν ως θεμελιώδη χαρακτηριστικά της Φυσικής (Κβαντομηχανικής) περιγραφής του Φυσικού κόσμου. Εάν δεχθούμε αυτό το

θεμελιώδες αξίωμα, ανεξάρτητα από το εάν το καταλαβαίνουμε ή όχι¹⁰⁸, τότε θα πρέπει (τουλάχιστον) να ελέγξουμε την αυτοσυνέπειά του και να προσπαθήσουμε να συνδέσουμε τις διάφορες πτυχές της «πιθανοκρατικής» περιγραφής του μικροκόσμου μεταξύ τους¹⁰⁹.

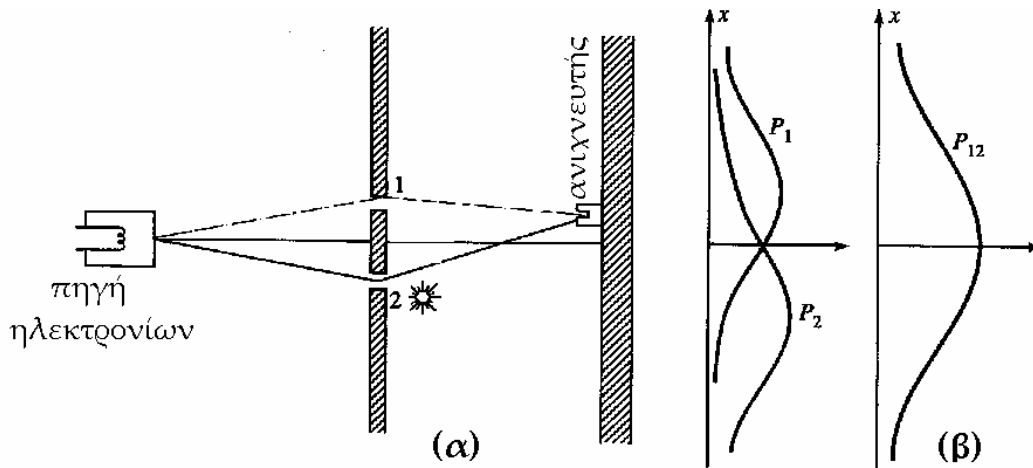
Ας δούμε λοιπόν, ποιες τροποποιήσεις ή παραλλαγές του πειράματος των δύο οπών μπορούμε να επιφέρουμε ώστε να διαλευκάνουμε τις αντιφάσεις και να ελέγξουμε την αυτοσυνέπεια της «πιθανοκρατικής» ερμηνείας μας. Για το σκοπό αυτό, θα επιστρέψουμε στην πειραματική διάταξη του σχήματος 9.16.

Είναι εύκολο να αναγνωρίσουμε ότι η στατιστική φύση του πειράματος συνδέεται με την αδυναμία μας να προσδιορίσουμε από ποιά οπή πέρασε ένα ηλεκτρόνιο, το οποίο καταγράφηκε στην θέση του πετάσματος μεταξύ x και $x+dx$, αφού αν κάτι τέτοιο ήταν δυνατόν, η πιθανότητα P_{12} θα ήταν ίση προς το άθροισμα $P_1 + P_2$ σε όλες τις θέσεις. Για να διερευνήσουμε την ορθότητα και τις επιπτώσεις αυτού του συμπεράσματος, θα εξετάσουμε τι θα συμβεί: α) εάν κλείσουμε και ανοίξουμε εναλλακτικά την μια από τις δύο οπές και β) εάν τοποθετήσουμε κάποιο κατάλληλο μηχανισμό πίσω από την μία οπή, έστω την οπή 2, όπως στο σχήμα 9.40, ο οποίος θα καταγράφει (εκπέμποντας μια λάμψη, π.χ.) τα ηλεκτρόνια τα οποία διέρχονται από αυτή την οπή.

Στην πρώτη περίπτωση (α), εφόσον έχουμε δεχθεί ότι δεν υπάρχει περίθλαση, διότι το εύρος της οπής είναι πολύ μικρότερο από το μήκος κύματος De Broglie του ηλεκτρονίου, οι πιθανότητες P_1 και P_2 με μια μόνο οπή ανοικτή 1 ή 2, αντίστοιχα, θα είναι όπως στο σχήμα 9.40(β). Δηλαδή, θα παρουσιάζουν ένα απλό μέγιστο απέναντι από την κάθε μια οπή και θα «σβήνουν» ομαλά σε μεγάλες αποστάσεις από την οπή (δείτε για παράδειγμα το σχήμα 8.35(γ) στο βιβλίο «Ταλαντώσεις και Κύματα», Α. Ζδέτση).

¹⁰⁸ Το απόφθεγμα-αφορισμός «Κανείς δεν καταλαβαίνει την Κβαντομηχανική», το οποίο αποδίδεται στον διάσημο Φυσικό Richard Feynman, μπορεί να σας κάνει να αισθάνεστε καλύτερα.

¹⁰⁹ Κατά μια φιλοσοφική άποψη, την οποία συμμερίζεται ο συγγραφέας, η λέξη «κατανοώ» κάποιες νέες έννοιες, ουσιαστικά σημαίνει «συνδέω» τις νέες έννοιες με τις «παλιές», τις οποίες θεωρώ ότι έχω κατανοήσει. Αν δεν μπορούμε να κάνουμε κάτι τέτοιο, το αμέσως καλύτερο θα ήταν να συνδέσουμε όλες τις νέες έννοιες μεταξύ τους και να πεισθούμε ότι δεν οδηγούν σε αντιφάσεις. Κάποια τελική σύνδεση όλων (νέων και παλαιών) μπορεί να επιτευχθεί, στην προκειμένη περίπτωση, στο όριο της αρχής της αντιστοιχίας.



Σχήμα 9.40

Τροποποιημένο Πείραμα δύο οπών

Η κατανομή της πιθανότητας των ηλεκτρονίων τα οποία διήλθαν από την οπή 1 (με την οπή 2 κλειστή) είναι P_1 , ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα για τα ηλεκτρόνια τα οποία διήλθαν από την οπή 2 είναι P_2 . Η καμπύλη P_{12} η οποία αντιστοιχεί στο άθροισμα $P_1 + P_2$ είναι η κατανομή η οποία παρατηρείται όταν τοποθετήσουμε κάποια διάταξη (μια φωτεινή πηγή η οποία διεγείρεται όταν διέρχεται ηλεκτρόνιο από την οπή 2) η οποία μας επιτρέπει να διακρίνουμε από ποια οπή πέρασε το ηλεκτρόνιο.

Για συνηθισμένα κλασικά σωματία (όπως οι μπάλες του μπιλιάρδου) η συνολική πιθανότητα P_{12} , με τις δύο οπές ανοικτές, θα είναι το άθροισμα των δύο πιθανοτήτων P_1 και P_2 , όπως φαίνεται στο σχήμα 9.40(β):

$$P_{12} = P_1 + P_2 \quad (9.109) \quad \text{πιθανότητα για κλασικά σωματία με τις δύο οπές ανοικτές.}$$

Όμως για τα ηλεκτρόνια, όπως και για τα υπόλοιπα σωματία του μικροκόσμου, η πιθανότητα P_{12} δίνεται από την καμπύλη του σχήματος 9.39(3), η οποία δεν είναι το άθροισμα των δύο πιθανοτήτων P_1, P_2 του σχήματος 9.40 αλλά αντιστοιχεί στην σχέση:

$$P_{12} = P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1 P_2} \cos \delta_{12} \quad (9.110) \quad \text{πιθανότητα για κβαντικά σωματία με τις δύο οπές ανοικτές.}$$

Η παραπάνω σχέση, προέρχεται από την αντίστοιχη σχέση για την κατανομή της έντασης $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta_2 - \delta_1)$ (σχέση (7.9) στις «Ταλαντώσεις και Κύματα», Α. Ζδέτσης) στο πείραμα των δύο οπών για κλασικά κύματα.

Η γωνία $\delta_{12} = \delta_2 - \delta_1$ στην (9.110) παριστάνει, ως γνωστόν, την διαφορά φάσεως στο σημείο x του πετάσματος, η οποία προέρχεται από την διαφορά δρόμου μεταξύ των

ηλεκτρονίων τα οποία διέρχονται από την οπή 1 και εκείνων τα οποία διέρχονται από την οπή 2.

Για το κλασικό πείραμα των δύο οπών του Young με δύο σύμφωνες (coherent) δέσμες κυμάτων, η αντίστοιχη σχέση 7.9 είναι απολύτως κατανοητή, λόγω κυρίως της αρχής του Huygens. Και τούτο γιατί οι δύο οπές (οι οποίες δρουν ως δευτερογενείς πηγές κυμάτων) μπορούν να θεωρηθούν ότι βρίσκονται επάνω στην ίδια μετωπική επιφάνεια. Κατά συνέπεια, το άνοιγμα ή κλείσιμο της μιας οπής επηρεάζει την συμπεριφορά του κύματος, το οποίο διέρχεται από την άλλη. Για τα ηλεκτρόνια όμως (τα οποία δεχθήκαμε ήδη ότι είναι σωματίδια) μια τέτοια συμβολή πιθανοτήτων δεν είναι κατανοητή, εφόσον η πιθανότητα P_{12} δεν είναι παντού ίση με το άθροισμα $P_1 + P_2$. Εάν θέλουμε να επιμένουμε στην κλασική εικόνα θα πρέπει να δεχθούμε ή ότι κάποια ηλεκτρόνια πέρασαν ταυτόχρονα και από τις δύο οπές ή ότι κατά κάποιο τρόπο τα ηλεκτρόνια «αποφασίζουν» και αλλάζουν την συμπεριφορά τους και δεν διέρχονται, ας πούμε, από την οπή 1, εφόσον η οπή 2 είναι ανοικτή. Οδηγούμαστε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι όλη αυτή η περίεργη συμπεριφορά οφείλεται στην αδυναμία μας να καθορίσουμε από ποια οπή πέρασε πραγματικά κάποιο ηλεκτρόνιο, το οποίο ανιχνεύσαμε σε κάποια θέση του πετάσματος.

Επειδή είναι εύλογο να μην είμαστε ιδιαίτερα ευχαριστημένοι με μια τέτοια παραδοχή, μπορούμε να θέσουμε σε λειτουργία το δεύτερο σχέδιο διερευνήσεως (β), τροποποιώντας το πείραμα με την τοποθέτηση ενός ανιχνευτικού μηχανισμού πίσω από την οπή 2, όπως στο σχήμα 9.40. Τώρα μπορούμε να καθορίσουμε το ποσοστό των ηλεκτρονίων τα οποία πέρασαν από την οπή 2 και, εφόσον γνωρίζουμε το (σταθερό) ολικό πλήθος των ηλεκτρονίων, των ηλεκτρονίων τα οποία πέρασαν από την οπή 1. «Ω του θαύματος» ! Όπως παρατηρούμε στο σχήμα 9.40(β), η συμβολή πιθανοτήτων έχει εκλείψει. Η πιθανότητα P_{12} είναι τώρα ίση με το άθροισμα των πιθανοτήτων $P_1 + P_2$, σε πλήρη συμφωνία με την (9.109) για κλασικά σωματίδια. Από μια (στατιστική) άποψη, κάτι τέτοιο θα ήταν αναμενόμενο. Εφόσον, με το τροποποιημένο πείραμα του σχήματος 9.40, αποκτήσαμε νέες πληροφορίες για το φυσικό σύστημα, επόμενο είναι να αλλάξουν οι «στατιστικές» προβλέψεις μας. Με άλλα λόγια, θα μπορούσαμε να πούμε, ότι σχεδιάσαμε ένα πείραμα για να ανιχνεύσουμε σωματιδιακή συμπεριφορά και την ανιχνεύσαμε. Χωρίς τον «ανιχνευτή ηλεκτρονίων» το πείραμα (συμβολής) ήταν σχεδιασμένο για να ανιχνεύσει κυματική συμπεριφορά και την ανίχνευσε (σχήμα 9.39(3)). Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι η αρχική διγλωσσία για κυματική /

σωματιδιακή συμπεριφορά οφείλεται στις διαφορετικές συνθήκες και πληροφορίες που μπορούμε να πάρουμε κατά το συγκεκριμένο πείραμα. Τα σωματΙΑ είναι πάντα σωματΙΑ. Η πιθανότητα κατανομής τους στον χώρο, η οποία αναδεικνύεται σε κυρίαρχη ιδιότητα λόγω της αδυναμίας μας να καθορίσουμε με πλήρη ακρίβεια (χωρίς αβεβαιότητες) τις ιδιότητες τους, διέπεται από κυματική συμπεριφορά. Η κυματική συμπεριφορά περιγράφεται από μια κατάλληλη κυματική εξίσωση (την οποίαν θα συζητήσουμε παρακάτω στο κεφάλαιο 10)

9.5.5 Συμβολή και Συμφωνία (Coherence)¹¹⁰

Είδαμε νωρίτερα ότι μπορούμε να κατανοήσουμε (ή τουλάχιστον έτσι πιστεύουμε) τα αποτελέσματα του τροποποιημένου πειράματος των δύο οπών, του σχήματος 9.40, με βάση πιθανοκρατικά επιχειρήματα στηριζόμενα στην απόκτηση περισσότερης πληροφορίας. Η εξήγηση από την Κυματική σκοπιά είναι ίσως πιο πειστική.

Θα πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι η σχέση (7.9) για το κλασικό πείραμα συμβολής από δύο οπές, βασίστηκε στην υπόθεση της συμφωνίας (coherence) των δύο κυμάτων. Δηλαδή, στην σταθερότητα της διαφοράς των αρχικών φάσεων $\varphi_2 - \varphi_1$ με την πάροδο του χρόνου. Κατά συνέπεια στην (7.9) υπάρχει ρητά η υπόθεση ότι η διαφορά φάσεων δ_{12} οφείλεται μόνο σε διαφορά δρόμων. Σε αντίθετη περίπτωση, όπου η διαφορά φάσεων $\varphi_2 - \varphi_1$ μεταβάλλεται με τον χρόνο, μιλάμε για ασύμφωνες πηγές και ασύμφωνα κύματα (incoherent waves). Σ' αυτή την περίπτωση δεν παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά μέγιστα και ελάχιστα της έντασης τα οποία παρατηρούμε στα πειράματα συμβολής, αφού ο όρος $\cos\delta_{12}$, ο οποίος περιέχει την γωνία $\delta_{12} = \delta_2 - \delta_1$ μεταβάλλεται με τον χρόνο. Αν λάβουμε υπόψη ότι θα πρέπει να περιμένουμε αρκετά μεγάλο χρόνο (θεωρητικά άπειρο) μέχρι να μπορούμε να «μετρήσουμε» την πιθανότητα P_{12} οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι θα πρέπει να πάρουμε τον μέσο όρο $\langle \cos\delta_{12} \rangle$ μέσα σε χρόνο μια περιόδου, στην (9.110), αν θέλουμε να υπολογίσουμε την σύνθετη πιθανότητα P_{12} :

$$P_{12} = P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1 P_2} \langle \cos\delta_{12} \rangle \quad (9.111)$$

Επειδή οι φάσεις δ_2 και δ_1 είναι τυχαίες, ο μέσος όρος στην (9.111) είναι μηδέν:

$$\langle \cos\delta_{12} \rangle = \langle \cos(\delta_2 - \delta_1) \rangle = 0 \quad (9.112).$$

Κατά συνέπεια, οδηγούμαστε στην (9.109): $P_{12} = P_1 + P_2$.

¹¹⁰ Η συζήτηση εδώ είναι όμοια με εκείνη στο εδάφιο 7.1.3, κεφάλαιο 7, του βιβλίου «Ταλαντώσεις και Κύματα», Α. Ζδέτση.

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε για να δείξουμε αυτή τη σχέση, βρίσκεται σε πλήρη αντιστοιχία με την διαδικασία που ακολουθούμε για να βρούμε την ένταση του συνισταμένου κύματος στην περίπτωση συνθέσεως δύο ασύμφωνων κυμάτων, ενώ η (9.110) αντιστοιχεί στην σύνθεση σύμφωνων κυμάτων (βλέπε «Ταλαντώσεις και Κύματα», Α. Ζδέτσης, υποκεφάλαιο 7.1).

Βλέπουμε ότι για τις πιθανότητες P_{12} ισχύει ότι ισχύει και για τις εντάσεις I_{12} δύο κυμάτων. Δηλαδή, στην περίπτωση ασύμφωνων κυμάτων, για να βρούμε την ένταση του συνισταμένου κύματος πρώτα υψώνουμε στο τετράγωνο το πλάτος του κάθε κύματος και μετά αθροίζουμε τις εντάσεις. Αντίθετα, για τα σύμφωνα κύματα, πρώτα αθροίζουμε (μιγαδικά/διανυσματικά) τα πλάτη και μετά υψώνουμε στο τετράγωνο. Οδηγούμαστε λοιπόν στο συμπέρασμα, ότι η τοποθέτηση της ανιχνευτικής συσκευής πίσω από την μία οπή, για να «βελτιώσει» την μετρητική διαδικασία, καταστρέφει την συμφωνία των δύο κυμάτων (πιθανότητας) και, κατά συνέπεια, την εικόνα συμβολής.

9.5.6 Επανασύνδεση με την αρχή της αβεβαιότητας και την μετρητική διαδικασία.

Είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο ότι η προσπάθεια να πάρουμε περισσότερη πληροφορία μέσω της μετρητικής διαδικασίας και της τροποποίησης του αρχικού πειράματος, οδήγησε στην απώλεια της εικόνας συμβολής (την οποία παλαιότερα είχαμε ταυτίσει με την «κυματική φύση» του ηλεκτρονίου. Βλέπουμε δηλαδή την συμπληρωματικότητα της σωματιδιακής και της κυματικής περιγραφής μέσω της «μετρητικής διαδικασίας». Επειδή οι επιπτώσεις της μετρητικής διαδικασίας άμεσα σχετίζονται με την αρχή της αβεβαιότητας, θα προσπαθήσουμε, κλείνοντας αυτή την ενότητα, να συνδέσουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα με την αρχή της αβεβαιότητας (και έμμεσα με την αρχή της Συμπληρωματικότητας).

Θα πρέπει να τονίσουμε για μια ακόμη φορά ότι η αρχή της συμπληρωματικότητας, όπως άλλωστε διαπιστώσαμε «ιδίους όμμασι», ουσιαστικά συνδέει την σωματιδιακή με την κυματική συμπεριφορά του ηλεκτρονίου μέσω της αρχής της αβεβαιότητας, η οποία με την σειρά της συνδέεται με την μετρητική διαδικασία και την πιθανοκρατική (στατιστική) περιγραφή.

Τι επιπλέον μπορεί να μας προσφέρει η αρχή της αβεβαιότητας στο τροποποιημένο πείραμα των δύο οπών; Μπορεί να εξηγήσει ευθέως την καταστροφή της εικόνας συμβολής στο τροποποιημένο πείραμα των δύο οπών;

Η απάντηση, όπως θα δούμε είναι καταφατική.

Η αρχή της αβεβαιότητας μας λέει ότι προσπαθώντας να περιορίσουμε την αβεβαιότητα Δx στη θέση του ηλεκτρονίου (για να προσδιορίσουμε μέσα από ποια οπή πέρασε, διαταράσσουμε το σύστημα και μοιραία αυξάνουμε την αβεβαιότητα στην εγκάρσια ορμή του Δp_x . Όμως, η εγκάρσια ορμή είναι παράλληλη προς το πέτασμα και συνδέεται με την γωνιακή θέση του ηλεκτρονίου θ , με την σχέση:

$$p_x = p \sin \theta, \quad \text{ή} \quad p_x \cong p \cdot \theta \quad (9.113),$$

για μικρές γωνίες θ , κάτι που αληθεύει στις συνηθισμένες περιπτώσεις.

Κατά συνέπεια η αβεβαιότητα Δp_x θα είναι ανάλογη προς την αβεβαιότητα στη γωνία θ , $\Delta \theta$: $\Delta p_x \cong p \cdot (\Delta \theta)$ (9.114).

Μπορούμε τώρα να δείξουμε (άσκηση 9.14) ότι προσπαθώντας να ελαττώσουμε την αβεβαιότητα στη θέση του ηλεκτρονίου (αμέσως μετά την διέλευσή του από μια οπή), ώστε να προσδιορίσουμε από ποια οπή πέρασε, αυξάνουμε τόσο πολύ την αβεβαιότητα στη γωνία θ , ώστε αυτή (η αβεβαιότητα) να γίνεται συγκρίσιμη ή μεγαλύτερη από τις χαρακτηριστικές γωνίες $\theta_{ελαχ}$ και $\theta_{μεγ}$, οι οποίες αντιστοιχούν στην θέση του πρώτου ελάχιστου και του πρώτου (μετά το κεντρικό) μεγίστου της εικόνας συμβολής, αντίστοιχα:

$$\Delta \theta \geq \theta_{ελαχ} \quad \text{ή} \quad \Delta \theta_{ελαχ} \geq \theta_{ελαχ} \quad (9.115)$$

$$\text{και} \quad \Delta \theta \geq \theta_{μεγ} \quad \text{ή} \quad \Delta \theta_{μεγ} \geq \theta_{μεγ} \quad (9.116).$$

Προφανώς μια τέτοια κατάσταση (όπου η αβεβαιότητα στην γωνιακή θέση των μεγίστων και ελαχίστων είναι μεγαλύτερη από τις ίδιες τις τιμές των χαρακτηριστικών γωνιακών θέσεων) αντιστοιχεί σε απώλεια της εικόνας συμβολής, με τα χαρακτηριστικά (και καθορισμένα) ελάχιστα και μέγιστα.

Η αρχή της αβεβαιότητας, λοιπόν, δικαιολογεί πλήρως τα αποτελέσματα του τροποποιημένου πειράματος των δύο οπών του σχήματος 9.40 και επιβεβαιώνει ξανά την σύνδεση της μετρητικής διαδικασίας με την πιθανοκρατική περιγραφή, την αρχή της αβεβαιότητας, καθώς και με την αρχή της συμπληρωματικότητας.

Ερωτήσεις

9.6 Πόση μπορεί να είναι η ελάχιστη αβεβαιότητα στη θέση του ηλεκτρονίου, την οποία επιφέρει η ανιχνευτική συσκευή στο σχήμα 9.40;

9.7 Ένα ευλογοφανές στατιστικό επιχείρημα για την αλλαγή της πιθανότητας μετά την προσθήκη της ανιχνευτικής συσκευής είναι ότι, αφού έχουμε περισσότερες πληροφορίες, αλλάζουν και οι θεωρητικές προβλέψεις μας για το

συνολικό αποτέλεσμα (συνολική πιθανότητα). Με βάση αυτό το σκεπτικό, τι θα περιμένατε να αλλάξει στο τροποποιημένο πείραμα των δύο οπών, αν κανείς (παρατηρητής) δεν παρακολουθούσε τις ενδείξεις του «ανιχνευτή», ώστε να «ξεχωρίσει» τα ηλεκτρόνια τα οποία πέρασαν από την οπή 2;

Ασκήσεις

9.14 Δείξτε τις σχέσεις (9.115) και (9.116) για το τροποποιημένο πείραμα των δύο οπών του σχήματος 9.40.

Υπόδειξη Απαντήστε πρώτα στην ερώτηση 9.6

Ανακεφαλαίωση.

1) Οι κανόνες Wilson-Sommerfeld μπορούν να διατυπωθούν ως εξής:

Για κάθε φυσικό σύστημα του οποίου οι συντεταγμένες είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου, υπάρχει μία συνθήκη Κβάντωσης για κάθε μία από τις συντεταγμένες αυτές. Οι κανόνες κβάντωσης Wilson-Sommerfeld είναι γενικότεροι από και περιέχουν την συνθήκη κβάντωσης του Planck για τον αρμονικό ταλαντωτή καθώς και την συνθήκη κβάντωσης της στροφορμής του Bohr για το άτομο του υδρογόνου.

2) Το αξίωμα του de Broglie, το οποίο «αποκαθιστά την συμμετρία» μεταξύ της σωματιδιακής και κυματικής υφής στον μικρόκοσμο ορίζει ότι:

Για κάθε σωματίο μάζας m και ταχύτητας v (ορμή $p=mv$) αντιστοιχεί ένα κύμα, ονομαζόμενο «υλικό κύμα» του οποίου το μήκος κύματος λ δίνεται από τη σχέση

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p} \quad (9.23)$$

3) Με βάση το αξίωμα του de Broglie, οι στάσιμες τροχιές του Bohr μπορούν να ερμηνευθούν σαν στάσιμα υλικά κύματα του ηλεκτρονίου, περιφοράς. Από όλες τις δυνατές τροχιές, αυτές που επιτρέπονται είναι αυτές που επιζούν της καταστροφικής συμβολής, επειδή τα υλικά τους κύματα συμβάλουν ενισχυτικά, σύμφωνα με την (9.30).

4) Ομοίως με βάση το αξίωμα του de Broglie, βρίσκουμε ότι υπάρχει μια πλήρης αναλογία μεταξύ των στασίμων υλικών κυμάτων του σωματίου μέσα στο απειρόβαθο

πηγάδι δυναμικού εύρους L και των κανονικών τρόπων ταλάντωσης μια χορδής μήκους L στερεωμένης σταθερά στα δύο άκρα της.

5) Η «κυματική φύση» των ηλεκτρονίων και των άλλων σωματιδίων του μικροκόσμου επιβεβαιώνεται πειραματικά με κατάλληλα πειράματα συμβολής και περίθλασης, αντίστοιχα με τα πειράματα συμβολής και περίθλασης από μια και δύο (και N) οπές και έχει εφαρμογές στην κατασκευή ηλεκτρονικών μικροσκοπίων με μεγάλη διακριτική ικανότητα και μεγέθυνση.

6) Η θέση, x , ενός σωματιδίου έχει πάντα μία αβεβαιότητα, ή απροσδιοριστία, της ίδιας τάξης μεγέθους με την περιοχή εντοπισμού Δx του κύματος.

7) Κάθε προσπάθεια περιορισμού σε μία μικρή περιοχή ενός σωματίου, ή του αντίστοιχου υλικού κύματος, το οποίο φυσιολογικά απλώνεται σ' όλο τον χώρο, βρίσκει τόσο μεγαλύτερη αντίσταση (κοστίζει σε ενέργεια) όσο μικρότερη είναι η περιοχή εντοπισμού.

8) Όταν περιγράφουμε ένα σωματίο με βάση το (σύνθετο) κύμα που το συνοδεύει (ή που του αντιστοιχεί κατά de Broglie) υπάρχει πάντα μια απροσδιοριστία στη θέση του σωματιδίου, η οποία συνδέεται με την αντίστοιχη απροσδιοριστία στην ορμή του.

9) Η αρχή της αβεβαιότητας ορίζει ότι είναι αδύνατον να μετρήσουμε με απόλυτη ακρίβεια ταυτόχρονα την (ακριβή) θέση και ορμή ενός σωματιδίου. Το ίδιο ισχύει για την ενέργεια και την χρονική διάρκεια της καταστάσεως στην οποία βρίσκεται το σωματίο. Η αρχή της αβεβαιότητας εκφράζεται μαθηματικά από τις Σχέσεις Αβεβαιότητας :

$$(\Delta p) \times (\Delta x) \geq h \quad \text{ή} \quad (\Delta p) \times (\Delta x) \geq \hbar \quad \text{και} \quad (\Delta E) \times (\Delta t) \geq h \quad \text{ή} \quad (\Delta E) \times (\Delta t) \geq \hbar .$$

10) Η αρχή της αβεβαιότητας συνδέεται, αφ ενός με την «κυματική φύση» των υλικών σωματιδίων και αφετέρου με την μετρητική διαδικασία (κάθε μέτρηση διαταράσσει το φυσικό σύστημα)

11) Η αρχή της αβεβαιότητας, μέσω της σταθεράς \hbar θέτει ένα κβαντικό όριο στην ακρίβεια του προσδιορισμού της τροχιάς ενός σωματιδίου.

12) Η αρχή της αβεβαιότητας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για γρήγορες και εύκολες εκτιμήσεις τάξης μεγέθους

13) Η κυματική και η σωματιδιακή φύση ενός ηλεκτρονίου συνδέονται μέσω της αρχής της αντιστοιχίας, με παρόμοιο τρόπο, με τον οποίο συνδέεται και η Γεωμετρική Οπτική με την Κυματική Οπτική σύμφωνα με το σχήμα:

$$\text{ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \text{ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ} \quad ,$$

$$\text{ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \text{ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ} \quad ,$$

$$\text{ή ακόμη: ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ} \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \text{ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ} \quad ,$$

αφού για δοσμένη ορμή, το μήκος κύματος του σωματιδίου καθορίζεται από την σταθερά του Planck.

14) Η «κυματική φύση» συνδέεται με την «μετρητική διαδικασία» μέσα από την πιθανότητα $P(x, x+\Delta x)$ να βρεθεί ένα σωματίο σε μια περιοχή του χώρου μεταξύ των θέσεων x και $x+\Delta x$. Εάν $\psi(x, t)$ είναι η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου, η πιθανότητα $P(x, x+\Delta x)$ γράφεται: $P(x, x+\Delta x) = p(x)\Delta x = |\psi(x, t)|^2 \Delta x$ (9.99)

Δηλαδή η πιθανότητα $P(x, x+\Delta x)$ είναι ανάλογη προς το τετράγωνο του πλάτους της κυματοσυνάρτησης $|\psi(x, t)|^2$ και προς το εύρος της περιοχής Δx .

15) Τα υλικά κύματα είναι «κύματα πιθανότητας». Μάλιστα, μόνο η πιθανότητα και οι στατιστικές ιδιότητες που εξαρτώνται από αυτήν είναι δυνατόν να προσδιοριστούν για ένα μικροσκοπικό σωματίο όπως το ηλεκτρόνιο.

Μια τέτοια στατιστική ιδιότητα, είναι η μέση τιμή της θέσης ενός σωματιδίου η οποία δίνεται από τη σχέση :

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x|\psi(x, t)|^2 dx \quad (9.117).$$

Η μέση τιμή στην (9.104) είναι γνωστή και ως αναμενόμενη τιμή της θέσης του σωματιδίου κατά την (επικείμενη) μέτρηση.

16) Αν θεωρήσουμε μια φυσική ποσότητα ϖ , η οποία είναι συνάρτηση της θέσης x και του χρόνου t , $\varpi = \varpi(x, t)$, η αναμενόμενη τιμή της ποσότητας αυτής κατά την μέτρηση ορίζεται από την σχέση:

$$\langle \varpi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi(x, t) |\psi(x, t)|^2 dx \quad (9.118)$$

17) Η κυματοσυνάρτηση $\psi(x, t)$ περιέχει, όλες τις δυνατές πληροφορίες, τις οποίες μπορούμε να έχουμε για ένα συγκεκριμένο σωματίο στην συγκεκριμένη κατάσταση. Η τυχειότητα στην φυσική περιγραφή είναι θεμελιώδες Φυσικό αξίωμα.

18) Σύμφωνα με την Κβαντική ερμηνεία, τα σωματία είναι πάντα σωματία, για τα οποία δεν μπορούμε να γνωρίζουμε (όπως απαιτεί και η αρχή της αβεβαιότητας) όλες τις λεπτομέρειες της κίνησης τους. Όμως, η κατανομή των σωματιδίων στο χώρο, ή αλλιώς η πιθανότητα να βρεθούν σε συγκεκριμένη περιοχή του χώρου, διέπεται από κυματική συμπεριφορά και περιγράφεται από το τετράγωνο μιας κυματοσυνάρτησης, $\psi(x, t)$. Η κατανομή της πιθανότητας ενός σωματιδίου στον χώρο, αναδεικνύεται σε κυρίαρχη ιδιότητα, λόγω της αδυναμίας μας να καθορίσουμε με την μετρητική διαδικασία χωρίς αβεβαιότητες τις ιδιότητες τους.

19) Η κυματοσυνάρτηση $\psi(x, t)$ για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα προσδιορίζεται από την λύση μιας κυματικής εξίσωσης (γενικευμένου τύπου) η οποία είναι γνωστή ως κυματική εξίσωση Schröndiger.

20) Η αρχή της αβεβαιότητας δικαιολογεί πλήρως τα αποτελέσματα του τροποποιημένου πειράματος των δύο οπών του σχήματος 9.40 και επιβεβαιώνει ξανά την σύνδεση της μετρητικής διαδικασίας με την πιθανοκρατική περιγραφή, την αρχή της αβεβαιότητας, καθώς και με την αρχή της συμπληρωματικότητας.

Απαντήσεις σε επιλεγμένες ερωτήσεις

9.2 Τα πρωτόνια έχουν μάζα ηρεμίας περίπου $1 \text{ MeV}/c^2$. Δηλαδή, ενέργεια ηρεμίας $m_0 c^2 \cong 1 \text{ MeV}$. Κατά συνέπεια, σε σύγκριση με την ενέργεια του ενός GeV μπορούμε να την παραλείψουμε στην (9.29) από την οποία βρίσκουμε το μήκος κύματος

$\lambda \cong \frac{12400eV}{1 \times 10^9 eV} 10^{-10} m = 1.24 \times 10^{-15} m$. Επειδή σε πειράματα περίθλασης το μήκος κύματος

πρέπει να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το «εμπόδιο» (ή την διάμετρο «οπή» σε πειράματα μιας οπής), μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι διαστάσεις του πυρήνα είναι της τάξεως των $10^{-15} m$.

9.4 Υπάρχει παρεξήγηση στην λέξη «παρατήρηση». Δεν αναφερόμαστε σε παθητική παρατήρηση (απλά καθόμαστε και παρατηρούμε) αλλά σε ενεργητική παρατήρηση μέσω κάποιου πειράματος. Εάν «βομβαρδίζαμε» τον στόχο με ακτίνες λέιζερ (ή ακόμα πιο αποτελεσματικά με πέτρες) τότε σίγουρα θα επηρεαζόταν ο άνθρωπος-στόχος και θα στρεφόταν (και όχι βέβαια με τις καλύτερες διαθέσεις).

9.5 Μια μέση τιμή του μήκους κύματος του φωτός στην ορατή περιοχή του φάσματος είναι $5000 \text{ \AA} = 5 \times 10^{-7} m$ ενώ το εύρος της σχισμής είναι $10^{-3} m$ βλέπουμε ότι βρισκόμαστε στην περιοχή ισχύος της Γεωμετρική Οπτικής, $\lambda \ll l$, άρα η πραγματική σκιά θα συμπίπτει με την γεωμετρική σκιά.

9.6 Για να μπορούμε να πούμε από ποια οπή πέρασε το ηλεκτρόνιο, θα πρέπει η αβεβαιότητα στη θέση του να είναι μικρότερη από (ή το πολύ ίση με) το ήμισυ της απόστασης των δύο οπών, d . Δηλαδή, $\Delta x \leq \frac{d}{2}$.

9.7 Δεν θα αλλάξει τίποτα στην κατανομή της συνολικής πιθανότητας στο σχήμα 9.40(β), αφού ανεξάρτητα από το τι κάνει ο παρατηρητής, η συσκευή ανιχνεύσεως από μόνη της επιδρά και «καταστρέφει» την εικόνα συμβολής, όπως είδαμε στο εδάφιο 9.5.6.

Κεφάλαιο 10. Εξίσωση Schrödinger.



Εισαγωγή

*Η κβαντική περιγραφή των υλικών σωμάτων και η ερμηνεία της αινιγματικής «κυματικής τους φύσης» εξετάσθηκαν διεξοδικά στο προηγούμενο κεφάλαιο, όπου καθιερώθηκε ο κυρίαρχος ρόλος της κυματοσυνάρτησης, η οποία περιγράφει την «κυματική διαταραχή». Όπως είδαμε, η κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t)$ περιέχει όλες τις δυνατές πληροφορίες για το συγκεκριμένο σωματίο, οι οποίες είναι μόνο στατιστικής φύσεως, εφόσον η τυχαιότητα στην φυσική περιγραφή είναι θεμελιώδες φυσικό αξίωμα. Ο πλήρης προσδιορισμός της κυματοσυναρτήσεως, είναι ισοδύναμος με τον προσδιορισμό της καταστάσεως ενός σωματίου, ή γενικότερα ενός κβαντομηχανικού συστήματος. Στο κεφάλαιο αυτό θα ολοκληρώσουμε την κβαντική περιγραφή των υλικών σωματιδίων με την εισαγωγή της περίφημης κυματικής εξισώσεως του *Schrödinger*, από την οποία προσδιορίζεται η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου (ή, γενικότερα, ενός φυσικού συστήματος, το οποίο αποτελείται από περισσότερα του ενός σωματίδια μέσα σε κάποιο ή κάποια πεδία δυνάμεων).*

*Δεν θα περιοριστούμε στην «ντε φάκτο» αξιωματική παρουσίαση της κυματικής εξισώσεως του *Schrödinger*, αλλά θα προσπαθήσουμε να οδηγηθούμε επαγωγικά σ' αυτή, με ευλογοφανή (μαθηματικά και φυσικά) επιχειρήματα. Για τον σκοπό αυτό, προτού ξεκινήσουμε την αναζήτηση της κυματικής εξισώσεως των «κβαντικών κυμάτων» θα επιχειρήσουμε μια όσο το δυνατόν συνοπτική, αλλά ταυτόχρονα ολοκληρωμένη, εισαγωγή στην έννοια της κλασικής κυματικής εξισώσεως και των κλασικών κυμάτων.*

10.1 Περί Κυματικών εξισώσεων και κυμάτων.

10.1.1 Χαρακτηριστική κυματική εξίσωση.

Όπως είναι γνωστό, κύμα είναι μία διαταραχή η οποία διαδίδεται (σε κάποιο μέσο) με πεπερασμένη ταχύτητα. Η διαταραχή στα συνηθισμένα κύματα μεταφέρει ενέργεια και ορμή χωρίς να μεταφέρει ύλη. Από Μαθηματική σκοπιά, μπορούμε να ορίσουμε ως κύμα μια διαταραχή, η οποία περιγράφεται από μια συνάρτηση $\psi(x,t)$, της θέσης x και του χρόνου t (γνωστή ως *κυματοσυνάρτηση*), η οποία ικανοποιεί μια «*κυματική εξίσωση*».

Η γνωστή¹¹¹ **χαρακτηριστική κυματική εξίσωση**:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = 0} \quad (10.1),$$

είναι «κατασκευασμένη» ώστε να έχει λύσεις της μορφής $F(x \pm vt)$.

Από την κατασκευή της, η κυματική εξίσωση (10.1) περιγράφει κύματα τα οποία μπορούν να διαδίδονται και προς τις δύο διευθύνσεις (αριστερά, δεξιά: \pm) με σταθερή ταχύτητα v , διατηρώντας το σχήμα τους αμετάβλητο.

Η γενική λύση της χαρακτηριστικής κυματικής εξίσωσης έχει τη μορφή:

$$\psi(x,t) = AF(x+vt) + BF(x-vt) \quad (10.2)$$

και περιγράφει την επαλληλία δύο κυμάτων τα οποία διαδίδονται, αντίστοιχα, προς την αρνητική και προς την θετική φορά του άξονα x (προς τα αριστερά και προς τα δεξιά).

Προφανώς, εάν το κύμα διαδίδεται προς μια μόνο κατεύθυνση, ο ένας από τους δύο συντελεστές A ή B στην (10.2) θα είναι μηδέν.

10.1.2 Αρμονικά κύματα.

Κλασικό παράδειγμα συναρτήσεως F στην (10.2), αποτελεί η αρμονική συνάρτηση

$$F = A \sin(k(x-vt)) = A \sin(kx - \omega t) \quad (10.3),$$

η οποία παριστάνει ένα **αρμονικό κύμα**, το οποίο διαδίδεται προς την θετική φορά του άξονα x . Αντικαθιστώντας την λύση (10.3) στην χαρακτηριστική κυματική εξίσωση (10.1) βρίσκουμε¹¹² για την ταχύτητα την γνωστή σχέση:

$$\omega^2 = v^2 k^2 \quad \text{ή} \quad v = \frac{\omega}{k} \quad (10.4).$$

Είναι πολύ συνηθισμένο να γράφουμε τα αρμονικά κύματα στην (10.3), στην εκθετική μορφή:

¹¹¹ Δείτε για παράδειγμα το κεφάλαιο 6 του βιβλίου «Ταλαντώσεις και Κύματα», του συγγραφέα, έκδοση Ε.Α.Π. (2004)

¹¹² Δείτε την άσκηση 10.1

$$\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} \quad (10.5) \quad \text{\textbf{εκθετική μορφή αρμονικού κύματος.}}$$

Στην γενικότερη περίπτωση, μπορεί να υπάρχει στον εκθέτη και μια διαφορά φάσεως, φ , οπότε το αρμονικό κύμα θα έχει την μορφή: $\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t+\varphi)}$ (10.6).

Η εκθετική μορφή βασίζεται στην γνωστή σχέση του de Moivre:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (10.7)$$

και υπονοεί ότι θα χρησιμοποιήσουμε το φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού $e^{i\theta}$, για ημιτονοειδή κύματα. Για συνημιτονοειδή κύματα, της μορφής

$$\psi(x,t) = B \cos(kx - \omega t + \varphi) \quad (10.8),$$

θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το πραγματικό μέρος της (10.6).

Φυσικά, δεν έχει σημασία ποια από τις δύο τριγωνομετρικές συναρτήσεις θα χρησιμοποιήσουμε, αρκεί να είμαστε συνεπείς μέχρι τέλους.

Στην μορφή (10.5) τα αρμονικά κύματα είναι γνωστά και ως επίπεδα κύματα, επειδή στις τρεις διαστάσεις τα αντίστοιχα μέτωπα κύματος είναι επίπεδα. Η χρήση της εκθετικής μορφής είναι ευρύτατα διαδεδομένη επειδή διευκολύνει πάρα πολύ τους μαθηματικούς χειρισμούς, ιδιαίτερα της παραγωγίσης. Βλέπουμε για παράδειγμα ότι:

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = (ik)[\psi(x,t)] \quad (10.9),$$

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = (-i\omega)[\psi(x,t)] \quad (10.10),$$

όταν η $\psi(x,t)$ δίνεται από το επίπεδο κύμα $\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$, της (10.5).

Δηλαδή, οι χωρικές και χρονικές παραγωγίσεις της κυματοσυναρτήσεως $\psi(x,t)$ μετατρέπονται σε απλούς πολλαπλασιασμούς της επί ik και $-i\omega$, αντίστοιχα. Προφανώς κάτι αντίστοιχο συμβαίνει και για παραγωγίσεις υψηλότερης τάξεως. Δηλαδή, πιο γενικά, για τα επίπεδα κύματα βρίσκουμε:

$$\frac{\partial^{(n)} \psi(x,t)}{\partial x^n} = (ik)^n [\psi(x,t)] \quad (10.11),$$

$$\frac{\partial^{(n)} \psi(x,t)}{\partial t^n} = (-i\omega)^n [\psi(x,t)] \quad (10.12).$$

Βλέπουμε τώρα ότι η σχέση (10.4), η οποία στην ισοδύναμη μορφή

$$\omega = vk \quad (10.13),$$

είναι γνωστή και ως σχέση διασποράς, βρίσκεται πολύ πιο εύκολα, με απλή αντικατάσταση της (10.5) στην χαρακτηριστική κυματική εξίσωση (10.1). Με άλλα

λόγια, τα επίπεδα κύματα είναι λύσεις της χαρακτηριστικής κυματικής εξίσωσης, όταν ισχύει η σχέση διασποράς (10.13). Επιπλέον, κάθε γραμμικός συνδυασμός επιπέδων κυμάτων είναι επίσης λύσης της κυματικής εξίσωσης, εφόσον η διαφορική εξίσωση (10.1) είναι «γραμμική»

Εάν, για παράδειγμα, πάρουμε γραμμικό συνδυασμό δύο επιπέδων κυμάτων στην (10.2), με την επιπλέον συνθήκη $B = A$, θα έχουμε τα γνωστά στάσιμα κύματα, της μορφής:

$$\psi(x,t) = 2A \sin kx \cos \omega t \quad (10.14).$$

Τα στάσιμα κύματα προέρχονται από την επαλληλία (τον γραμμικό συνδυασμό) δύο επιπέδων κυμάτων ίσου πλάτους, τα οποία διαδίδονται προς αντίθετες κατευθύνσεις. Η πιο συνηθισμένη περίπτωση συνδυασμού δύο κυμάτων με σχηματισμό στάσιμου κύματος εμφανίζεται όταν το δεύτερο κύμα προέρχεται από ανάκλαση του πρώτου σε κάποια αδιαπέραστη επιφάνεια.

10.1.3 Άλλες κυματικές εξισώσεις: Άλλου είδους κύματα.

Είδαμε στα προηγούμενα εδάφια ότι η χαρακτηριστική διαφορική εξίσωση του κύματος (σε μία διάσταση) περιγράφει κύματα τα οποία διαδίδονται και προς τις δύο διευθύνσεις (αριστερά, δεξιά) με σταθερή ταχύτητα v , διατηρώντας το σχήμα τους αμετάβλητο. Η εξίσωση αυτή δεν είναι ένας νέος νόμος της Φυσικής, αλλά προκύπτει σε κάθε ειδική περίπτωση από άλλους θεμελιώδεις νόμους, όπως οι εξισώσεις κινήσεως. Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις, κατά τις οποίες (αναγνωρίζουμε ότι) έχουμε «κυματικά φαινόμενα» με την γενικότερη σημασία του όρου. Εντούτοις, οι θεμελιώδεις εξισώσεις (εξισώσεις κινήσεως) δεν μας οδηγούν σε διαφορικές εξισώσεις όμοιες με την χαρακτηριστική εξίσωση (10.1). Για παράδειγμα, αν συνδυάσουμε δύο από τις εξισώσεις Maxwell σε μία διάσταση (μία μεταβλητή θέσης x για την περιγραφή της διαταραχής) στον κενό χώρο ($\rho=0$, $\mathbf{J}=0$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \frac{\partial B}{\partial x} &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \end{aligned} \quad (10.15),$$

οδηγούμαστε στην εξίσωση
$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (10.16).$$

Η εξίσωση αυτή για το ηλεκτρικό πεδίο E , έχει την χαρακτηριστική μορφή:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (10.17),$$

όπου $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.998 \times 10^8 \text{ m/sec}$ είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό, ενώ οι

σταθερές ϵ_0 και μ_0 είναι αντίστοιχα η διηλεκτρική σταθερά και η μαγνητική διαπερατότητα του κενού.

Οι αριθμητικές τιμές τους στο σύστημα SI (ή MKSA) είναι αντίστοιχα: $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$

$\text{C}^2/\text{Nt}\cdot\text{m}^2$ ($\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.988 \times 10^9 \text{ Nt}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$) και $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Nt}/\text{A}^2$.

Μια παρόμοια εξίσωση βρίσκουμε και για το μαγνητικό πεδίο B :

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \quad (10.18).$$

Οι εξισώσεις του Maxwell λοιπόν, στον κενό χώρο, μας οδηγούν στον σχηματισμό ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (μέσα στα οποία περιλαμβάνονται και το φως) της μορφής του σχήματος 5.2. Τα κύματα αυτά περιγράφονται από (ικανοποιούν) την συνηθισμένη χαρακτηριστική κυματική εξίσωση.

Όμως, σε αντίθεση με τον κενό χώρο, αν χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις του Maxwell για ένα αγωγίμο υλικό μέσο, με αγωγιμότητα σ , ηλεκτρική σταθερά ϵ και μαγνητική διαπερατότητα μ , οδηγούμαστε στην εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = 0 \quad (10.19),$$

γνωστή και ως **εξίσωση του τηλεγράφου**, η οποία έχει τελείως διαφορετική μορφή από την χαρακτηριστική διαφορική εξίσωση του κύματος. Η εξίσωση αυτή περιγράφει (κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις) κυματική διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μέσα στο συγκεκριμένο μέσο. Θα πρέπει λοιπόν να την αποδεχθούμε ως «γενικευμένη κυματική εξίσωση».

Όμοια, η διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μέσα στο πλάσμα της Ιονόσφαιρας περιγράφεται από την «κυματική εξίσωση»:

$$c^2 \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} - \omega_p^2 \Psi(x,t) - \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (10.20),$$

η οποία δεν έχει την χαρακτηριστική μορφή (10.1).

Η ποσότητα $\omega_p \equiv \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}}$ ονομάζεται **συχνότητα πλάσματος** και προσδιορίζεται από

το πλήθος N των ιόντων ανά μονάδα όγκου και τις φυσικές σταθερές e , m , ϵ_0 (φορτίο, μάζα του ηλεκτρονίου και διηλεκτρική σταθερά του κενού).

Οι «γενικευμένες» κυματικές εξισώσεις δεν αφορούν μόνο τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Για παράδειγμα, τα πολύ γνωστά σε όλους κύματα της θάλασσας (και τα κύματα επιφανείας και τα κύματα βάθους) δεν περιγράφονται από την χαρακτηριστική, αλλά από άλλες πολύπλοκες γενικευμένες κυματικές εξισώσεις.

Αντί για τις πολύπλοκες εξισώσεις των κυμάτων της θάλασσας, μπορούμε να δούμε άλλα παραδείγματα γενικευμένων κυματικών εξισώσεων από την Μηχανική. Εάν θεωρήσουμε μια ομογενή χορδή, σταθερής πυκνότητας ρ_0 , τεντωμένη με μια σταθερή τάση T_0 στην οποία ασκείται μια δύναμη τριβής ανάλογη της ταχύτητας, οι εξισώσεις κινήσεως μας οδηγούν σε μια (γενικευμένη) κυματική εξίσωση της μορφής:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + R \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} \quad (10.21),$$

όπου R μια κατάλληλη «σταθερά τριβής».

Όμοια, για μη ομογενή χορδή με μεταβλητή πυκνότητα $\rho(x)$ και ανομοιογενή τάση $T(x)$, οι εξισώσεις κινήσεως οδηγούν στη «κυματική εξίσωση»:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left[T(x) \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right] \quad (10.22).$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι έχουμε μια μεγάλη ποικιλία γενικευμένων κυματικών εξισώσεων, των οποίων η χαρακτηριστική κυματική εξίσωση αποτελεί ειδική περίπτωση. Για παράδειγμα, όταν η αγωγιμότητα σ είναι μηδέν (μονωτικό υλικό), η κυματική εξίσωση (10.19) ανάγεται σε μια απλή χαρακτηριστική κυματική εξίσωση, εφόσον οι ποσότητες μ και ε είναι σταθερές (πραγματικοί αριθμοί).

Το ίδιο ισχύει και για την (10.21) για $R=0$.

Απ' την άλλη μεριά, όταν οι πραγματικές¹¹³ σταθερές σ και R είναι διάφορες του μηδενός στις «κυματικές εξισώσεις» (10.19) και (10.21), οι λύσεις έχουν την μορφή **αποσβενυμένων κυμάτων**, όπως φαίνεται στο σχήμα 10.1. Τα αποσβενύμενα κύματα έχουν την μαθηματική μορφή¹¹⁴:

$$\psi(x,t) = Ce^{-\lambda x} \sin(\kappa x - \omega t + \varphi) \quad (10.23),$$

ή, σε εκθετική μορφή:
$$\psi(x,t) = Ce^{-\lambda x} e^{i(\kappa x - \omega t + \varphi)} \quad (10.24).$$

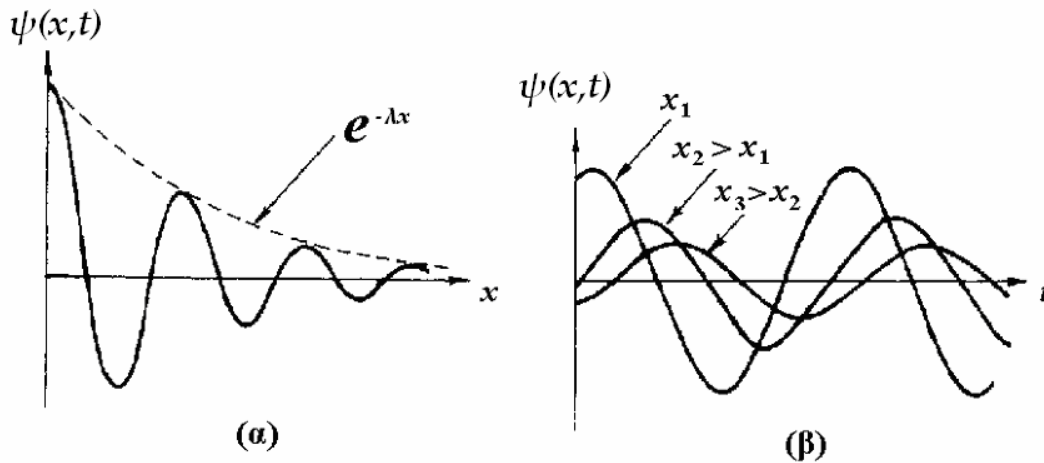
¹¹³ Σε αντιδιαστολή με *μιγαδικές σταθερές*

¹¹⁴ Δείτε την άσκηση 10.2

Οι πραγματικές σταθερές κ και λ μπορούν να θεωρηθούν (δείτε την άσκηση 10.2) σαν το πραγματικό και φανταστικό μέρος, αντίστοιχα, ενός γενικευμένου μιγαδικού κυματαριθμού, $k = \kappa + i\lambda$ (10.25),

ενός γενικευμένου επιπέδου κύματος $\psi(x,t) = Ce^{i(\kappa x - \omega t + \varphi)} = Ce^{i[(\kappa + i\lambda)x - \omega t + \varphi]}$ (10.26).

Όπως βλέπουμε στο σχήμα 10.1, τα αποσβενύμενα κύματα μοιάζουν με επίπεδα κύματα, των οποίων το πλάτος μειώνεται (φθίνει) εκθετικά με την απόσταση.



Σχήμα 10.1

Αποσβενύμενο κύμα: $\psi(x,t) = Ce^{-\lambda x} \sin(\kappa x - \omega t + \varphi)$, (10.23).

Χωρική μεταβολή (α), και χρονική μεταβολή (β) για διάφορες θέσεις x_1, x_2, x_3 ,
όπου: $x_1 < x_2 < x_3$.

Όπως βλέπουμε, το πραγματικό μέρος κ του κυματαριθμού αντιστοιχεί στην κυματική διάδοση με μήκος κύματος $\lambda = 2\pi/\kappa$, ενώ το φανταστικό καθορίζει την εκθετική απόσβεση του πλάτους (η οποία αντιστοιχεί σε απορρόφηση ενέργειας από το μέσο διαδόσεως). Στο όριο όπου το πραγματικό μέρος γίνεται μηδέν, δεν έχουμε ουσιαστικά κυματική διάδοση. Η χωρική μεταβολή της διαταραχής δεν είναι πλέον αρμονική (τριγωνομετρική), αλλά εκθετική. Εντούτοις η χρονική μεταβολή εξακολουθεί να παραμένει αρμονική. Τέτοιου είδους διαταραχές μπορούν να θεωρηθούν γενικευμένου τύπου κύματα, τα οποία είναι γνωστά ως **εκθετικά** ή **φθίνοντα κύματα** (*exponential waves* ή *evanescent waves*). Η μαθηματική μορφή των εκθετικών κυμάτων δίνεται από τη σχέση:

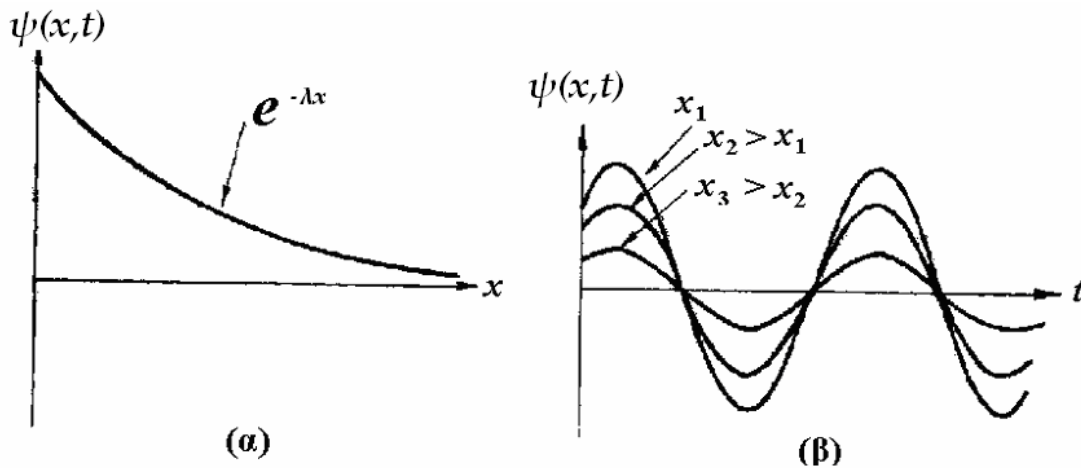
$$\psi(x,t) = Ce^{-\lambda x} e^{-i(\omega t + \varphi)} \quad (10.27),$$

ή, ισοδύναμα σε τριγωνομετρική μορφή:

$$\psi(x,t) = Ce^{-\lambda x} \cos \omega t \quad (10.28),$$

ή $\psi(x,t) = Ce^{-\lambda x} \cos \omega t$

Στο σχήμα 10.2α φαίνεται η χωρική μεταβολή του εκθετικού «κύματος» για t σταθερό (στιγμιότυπο), ενώ στο σχήμα 10.2β βλέπουμε την χρονική μεταβολή του κύματος για τρεις διαδοχικές σταθερές θέσεις x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$). Όπως φαίνεται στο σχήμα, το πλάτος της ταλάντωσης (γιατί ουσιαστικά για ταλάντωση πρόκειται) μειώνεται εκθετικά καθώς απομακρυνόμαστε από την αρχή ($x=0$). Ο συντελεστής λ στον αρνητικό εκθέτη ονομάζεται **συντελεστής απόσβεσης** και έχει διαστάσεις αντιστρόφου μήκους. Το μήκος $\delta \equiv \frac{1}{\lambda}$ ονομάζεται **μήκος απόσβεσης** και παριστάνει την απόσταση, μέσα στην οποία η διαταραχή έχει αποσβεσθεί στο $1/e$ της τιμής της.



Σχήμα 10.2

Εκθετικό κύμα: $\psi(x,t) = Ce^{-\lambda x} \cos \omega t$, (10.28).

Χωρική μεταβολή (α), και χρονική μεταβολή (β) για διάφορες θέσεις x_1, x_2, x_3 , όπου: $x_1 < x_2 < x_3$.

Όπως θα δούμε παρακάτω, η εξίσωση (10.20) για συχνότητες ω μικρότερες από την συχνότητα πλάσματος ω_p έχει ως λύσεις εκθετικά κύματα.

Θα πρέπει, λοιπόν, να αποδεχθούμε τις εξισώσεις (10.1), (10.19), (10.20), (10.21) και (10.22) ως κυματικές εξισώσεις και τα γενικευμένα επίπεδα κύματα (10.26) ως (γενικευμένα) κύματα.

Όμως, μετά από όλη αυτή τη συζήτηση προκύπτουν μερικά ερωτήματα, όπως:

Τι ονομάζουμε (γενικευμένη) κυματική εξίσωση;

Τι το κοινό έχουν όλες αυτές οι εξισώσεις;

Την απάντηση θα δούμε στο επόμενο εδάφιο.

Ερωτήσεις

10.1 Κάτω από ποιες προϋποθέσεις η εξίσωση (10.22) αντιστοιχεί με την συνηθισμένη κυματική εξίσωση;

Ασκήσεις.

10.1 Κάτω από ποιες προϋποθέσεις η χαρακτηριστική κυματική εξίσωση περιγράφει αρμονικά κύματα με (κυκλική) συχνότητα ω και κυματαριθμό k ; Δείξτε ότι με τις ίδιες προϋποθέσεις η χαρακτηριστική κυματική εξίσωση δέχεται λύσεις με συχνότητα $n\omega$ και κυματαριθμό nk , όπου n ακέραιος αριθμός.

10.2 Κάτω από ποιες προϋποθέσεις (εάν μπορούν να υπάρξουν κάποιες) η γενικευμένη κυματική εξίσωση (10.21) περιγράφει αρμονικά κύματα με (κυκλική) συχνότητα ω και κυματαριθμό k ; Τι είδους κύματα περιγράφει στην γενική περίπτωση;

10.1.4 Ορισμός Κυματικής εξίσωσης.

Ας ξεκινήσουμε από το τελευταίο ερώτημα. Τι το κοινό έχουν οι διαφορικές εξισώσεις (10.1), (10.19), (10.20), (10.21) και (10.22);

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι:

1) Όλες αντιστοιχούν και περιγράφουν κυματικά φαινόμενα (κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις).

2) Όλες δέχονται ως λύσεις γενικευμένα επίπεδα κύματα της μορφής (10.26), τα οποία κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, ανάγονται στα συνηθισμένα απλά επίπεδα κύματα (10.5).

3) Όλες είναι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους ως προς τον χώρο και τον χρόνο.

4) Σαν αποτέλεσμα της γραμμικής ιδιότητας όλων αυτών των εξισώσεων, ο

γραμμικός συνδυασμός $\sum_{n=1}^N c_n \psi_n(x,t)$ N τυχαίων λύσεων τους: $\psi_n(x,t)$, $n=1,2,\dots, N$,

είναι και πάλι λύση. Στον γραμμικό συνδυασμό $\sum_{n=1}^N c_n \psi_n(x,t)$, το πλήθος το όρων N

μπορεί να είναι άπειρο, $N \rightarrow \infty$.

5) Αντίστροφα, η γενικότερη λύση όλων αυτών των εξισώσεων, $\Psi(x,t)$, μπορεί να γραφεί ως επαλληλία των $\psi_n(x,t)$. Δηλαδή:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{N \rightarrow \infty} c_n \psi_n(x,t) \quad (10.29).$$

Η (10.29) εκφράζει την αρχή της επαλληλίας, η οποία με απλά λόγια διαπιστώνει ότι η επαλληλία (η υπέρθεση, το άθροισμα) δύο ή περισσότερων κυμάτων είναι πάλι κύμα.

6) μια ειδική κατηγορία λύσεων $\psi_n(x,t)$, για όσες από τις εξισώσεις δέχονται ως λύσεις τα απλά αρμονικά κύματα $\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$, είναι (όπως εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε) τα αρμονικά κύματα:

$$\psi_n(x,t) = Ae^{in(kx-\omega t)}, \quad n=1,2,\dots \quad (10.30).$$

Σ' αυτή την περίπτωση, το ανάπτυγμα της γενικής λύσης στην σειρά (10.29) είναι γνωστό ως ανάπτυγμα σε σειρά Fourier¹¹⁵.

Αν, λοιπόν, θέλουμε ένα γενικό ορισμό της γενικευμένης κυματικής εξίσωσης, μπορούμε να πούμε ότι:

ως γενικευμένη κυματική εξίσωση ορίζεται οποιαδήποτε γραμμική διαφορική εξίσωση, με μερικές παραγώγους ως προς τον χρόνο t και την θέση x , της κυματοσυναρτήσεως $\psi(x,t)$, η οποία δέχεται ως λύσεις τα απλά (10.5), ή «γενικευμένα» επίπεδα κύματα (10.26).

Δεν έχουμε λοιπόν μια (γενικευμένη) κυματική εξίσωση (όπως είχαμε μια χαρακτηριστική εξίσωση) αλλά μια μεγάλη γκάμα από κυματικές εξισώσεις.

Με τον ορισμό που υιοθετήσαμε, όλες οι παραπάνω εξισώσεις (και όχι μόνο) είναι γενικευμένες κυματικές εξισώσεις, οι οποίες δέχονται ως λύσεις γενικευμένα επίπεδα κύματα. Αν (ακόμα καλύτερα) κάποιες από αυτές δέχονται ως λύσεις τα συνηθισμένα επίπεδα κύματα (10.6), τότε μπορούμε να ονομάζουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις, «συνηθισμένες» κυματικές εξισώσεις. *Εν τοιαύτη περιπτώσει,*

¹¹⁵ Όταν η γενική «κυματομορφή» $\Psi(x,t)$ είναι μια μη περιοδική συνάρτηση (όταν έχει την μορφή «κυματοπαλμού») τότε υπάρχει μια απειρία επιπέδων κυμάτων, με συνεχή κατανομή κυματιριθμών μέσα σε κάποιο διάστημα, τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση. Σ' αυτή την περίπτωση, αντί της σειράς Fourier, έχουμε ένα ολοκλήρωμα Fourier (δείτε τις αντίστοιχες ενότητες στα κεφάλαια 5 και 7, του βιβλίου «Ταλαντώσεις και Κύματα», Α. Ζδέτση).

ο μαθηματικός ορισμός ενός (γενικευμένου ή «συνηθισμένου») κύματος είναι μια διαταραχή της οποίας η κυματοσυνάρτηση είναι λύση μιας (γενικευμένης ή «συνηθισμένης») κυματικής εξίσωσης.

Όμως, κατ' αυτόν τον τρόπο, οποιαδήποτε γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους ως προς την θέση και ως προς τον χρόνο, θα είναι κατ' αρχήν «υποψήφια» για κυματική εξίσωση (συνηθισμένη ή γενικευμένη) και οι λύσεις της θα αντιστοιχούν σε (συνηθισμένα ή γενικευμένα) κύματα.

Με ποια διαδικασία, λοιπόν, θα αναγνωρίσουμε μια κυματική εξίσωση;

Ερωτήσεις

10.2 Σε τι μπορεί να διαφέρει μια «συνηθισμένη» κυματική εξίσωση από την χαρακτηριστική κυματική εξίσωση (10.1);

10.1.5 Διαδικασία «πιστοποίησης» μιας Κυματικής εξίσωσης.

Είναι λίγο-πολύ προφανές ότι θα εξετάσουμε οποιοδήποτε άλλο κριτήριο, αφού πρώτα διαπιστώσουμε ότι η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική (δηλαδή η άγνωστη συνάρτηση ή οποιαδήποτε παράγωγός της, δεν εμφανίζεται υψωμένη σε κάποια δύναμη πέραν της πρώτης και δεν υπάρχουν γινόμενα της συναρτήσεως επί κάποια παράγωγο της). Αν η εξίσωση δεν είναι γραμμική, δεν είναι αποδεκτή.

Το επόμενο βήμα, για μια γραμμική διαφορική εξίσωση, είναι να αντικαταστήσουμε την υποψήφια λύση $\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$, και να εξετάσουμε κάτω από ποιες προϋποθέσεις, η εξίσωση ικανοποιείται, όπως κάναμε στην άσκηση 10.1.

Να υπενθυμίσουμε ότι:

1) Τα επίπεδα (αρμονικά) κύματα $\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ είναι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης (10.1) υπό την «προϋπόθεση» ότι ισχύει η «σχέση διασποράς» $\omega = vk$ (10.13).

2) Τα επίπεδα κύματα $\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$, ή τα γενικευμένα επίπεδα κύματα $\psi(x,t) = Ce^{i(kx-\omega t+\varphi)} = Ce^{i[(k+i\lambda)x-\omega t+\varphi]}$, είναι λύσεις των συνηθισμένων ή γενικευμένων κυματικών εξισώσεων, αντίστοιχα, κάτω από ορισμένες «προϋποθέσεις». Οι προϋποθέσεις αυτές εκφράζονται από μια σχέση μεταξύ των ω και k : $f(\omega,k)=0$ ή $\omega=\omega(k)$ (10.31), η οποία ονομάζεται «σχέση διασποράς».

3) Η σχέση διασποράς, η οποία στην γενική περίπτωση δεν συμπίπτει με την (10.13), βρίσκεται με αντικατάσταση της λύσης $\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ στην συνηθισμένη ή γενικευμένη κυματική εξίσωση.

Η διαδικασία αναγνώρισης, λοιπόν, ξεκινάει με αντικατάσταση της «υποψήφιας λύσης» $\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$, στην γραμμική διαφορική εξίσωση, και τελειώνει με την σχέση διασποράς και την διερεύνησή της. Η διερεύνηση της σχέσης διασποράς καθορίζει τα κριτήρια και τα όρια αποδοχής της συγκεκριμένης εξισώσεως, ως συνηθισμένης ή γενικευμένης κυματικής εξισώσεως. Τα λεπτομερή βήματα αυτής της διαδικασίας περιγράφονται στον πίνακα 10.1

Πίνακας 10.1

Αναλυτικά βήματα αναγνώρισης και «πιστοποίησης» Κυματικής Εξισώσεως

1 ^{ον}	Αντικατάσταση στην εξίσωση της λύσης $\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$	(10.30)
2 ^{ον}	Μετατροπή της διαφορικής εξισώσεως σε «Αλγεβρική»	(10.11), (10.12)
3 ^{ον}	Εξαγωγή κοινού παράγοντος, και διαίρεση με $\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$	Δείτε την (10.32) παρακάτω
4 ^{ον}	Εύρεση της σχέσης διασποράς (και της ταχύτητας $v_\phi = \omega/k$)	(10.31)
5 ^{ον}	Διερεύνηση της σχέσης διασποράς ($k^2 > 0$, $k^2 < 0$) (διάκριση μεταξύ συνηθισμένης και γενικευμένης εξισώσεως)	Δείτε για παράδειγμα τις (10.37), (10.38)

Ας δούμε αυτή την διαδικασία σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.

Παράδειγμα 10.1

Να εξεταστεί εάν η γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$c^2 \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} - \omega_p^2 \Psi(x,t) - \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (10.20),$$

είναι κυματική εξίσωση και υπό ποιες προϋποθέσεις

Απάντηση.

Αντικαθιστώντας κατά τα γνωστά στην (10.20), λύσεις της μορφής $\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$

, βρίσκουμε:

$$[-c^2k^2 - \omega_p^2 + \omega^2]Ae^{i(kx - \omega t)} = 0 \quad (10.32),$$

$$\text{ή } \omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2 \quad (10.33),$$

απ' όπου βρίσκουμε την σχέση διασποράς:

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + c^2k^2} \quad (10.34),$$

και την ταχύτητα (του αρμονικού κύματος):

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{\omega_p^2 + c^2k^2}}{k} = \sqrt{\frac{\omega_p^2}{k^2} + c^2} \quad (10.35).$$

Παρατηρούμε ότι:

A) Σε αντίθεση με την χαρακτηριστική κυματική εξίσωση και τη σχέση (10.13), η σχέση διασποράς στην προκειμένη περίπτωση, δεν είναι γραμμική.

B) Η ταχύτητα διαδόσεως των αρμονικών κυμάτων $v = \omega/k$, δεν είναι σταθερή, αλλά εξαρτάται από τον κυματαριθμό k , δηλαδή από το μήκος κύματος λ . Το φαινόμενο αυτό, δηλαδή η εξάρτηση της ταχύτητας διαδόσεως από το μήκος κύματος, ονομάζεται **διασπορά** ή **διασκεδασμός**. Κύματα με σταθερό λόγο ω/k ονομάζονται **κύματα χωρίς διασπορά** (nondispersive waves). Αντίθετα, κύματα για τα οποία ο λόγος ω/k δεν είναι σταθερός αλλά εξαρτάται από τον κυματαριθμό, δηλαδή το μήκος κύματος (και κατά συνέπεια από την συχνότητα) ονομάζονται **κύματα με διασπορά** (dispersive waves). Η περιγραφή αυτού του είδους των κυμάτων συμπληρώνεται πάντα με την αντίστοιχη **σχέση διασποράς**, η οποία περιγράφει την εξάρτηση της (κυκλικής) συχνότητας ω από τον κυματαριθμό k , όπως στην (10.34).

Γ) Ο κυματαριθμός εκφράζεται από την σχέση:

$$k^2 = \frac{1}{c^2}[\omega^2 - \omega_p^2] \quad (10.36).$$

Κατά συνέπεια, για να έχουμε πραγματικό κυματαριθμό θα πρέπει η συχνότητα ω να είναι μεγαλύτερη από την συχνότητα ω_p . Σ' αυτή την περίπτωση, έχουμε συνηθισμένη κυματική εξίσωση, με λύσεις συνηθισμένα αρμονικά κύματα, με πραγματικό κυματαριθμό k :

$$k = \frac{1}{c} \sqrt{[\omega^2 - \omega_p^2]} \quad , \quad \omega > \omega_p \quad (10.37).$$

Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε μια συνηθισμένη κυματική εξίσωση, η οποία περιγράφει πραγματικά κύματα με διασπορά.

Δ) Αντίθετα, για συχνότητες μικρότερες από την ω_0 , η (10.36) δίνει φανταστικό αριθμό: $k=i\lambda$, $\lambda = \frac{1}{c} \sqrt{[\omega_p^2 - \omega^2]}$, $\omega < \omega_p$ (10.38).

Σ' αυτή την περίπτωση, έχουμε μια γενικευμένη κυματική εξίσωση, η οποία δεν αντιστοιχεί σε πραγματική κυματική διάδοση και η οποία περιγράφει εκθετικά ή φθίνοντα κύματα της μορφής

$$\psi(x,t) = C e^{-\lambda x} e^{-i(\omega t + \phi)} \quad (10.27), \text{ με } \lambda = \frac{1}{c} \sqrt{[\omega_p^2 - \omega^2]}.$$

Όπως διαπιστώνουμε λοιπόν, η διαδικασία αναγνώρισης («πιστοποίησης») μιας κυματικής εξισώσεως έχει αφετηρία την κυματική εξίσωση και καταλήγει στην σχέση διασποράς και την διερεύνησή της. Μπορεί όμως, να ακολουθήσουμε και την αντίστροφη πορεία. Δηλαδή από τη σχέση διασποράς να οδηγηθούμε στην κυματική εξίσωση. Μερικές φορές μπορεί να είναι πιο εύκολο να βρούμε την σχέση διασποράς από το να βρούμε απ' ευθείας την κυματική εξίσωση. Να σημειώσουμε ότι για την κυματοσυνάρτηση ενός ελεύθερου σωματιδίου, η σχέση διασποράς συνδέει την ενέργεια με την ορμή του.

10.1.6 Η αντίστροφη πορεία

Όπως είπαμε νωρίτερα, μας ενδιαφέρει η αντίστροφη πορεία, επειδή πολλές φορές είναι πιο εύκολο να μαντέψουμε την σχέση διασποράς (σχέση ενέργειας-ορμής για τα ελεύθερα υλικά σωματίδια) από την αντίστοιχη κυματική εξίσωση.

Θα αρχίσουμε λοιπόν από μια αναζήτηση και διερεύνηση (βήμα 5^{ον} του πίνακα 10.1) κάποιας γενικής σχέσης διασποράς, η οποία έστω ότι είναι της μορφής (βήμα 4^{ον} του πίνακα 10.1): $f(k, \omega) = 0$ (10.39),

την οποίαν θεωρούμε δεδομένη.

Το επόμενο αντίστροφο βήμα (βήμα 3^{ον} του πίνακα 10.1) συνίσταται στον πολλαπλασιασμό της (10.39) επί την κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t)$:

$$f(k, \omega) \psi(x,t) = 0 \quad (10.40) \quad (\text{βήμα 3^{ον} του πίνακα 10.1})$$

Θα πρέπει σ' αυτό το στάδιο να κάνουμε μια μικρή (;) μαθηματική παρένθεση, πριν προχωρήσουμε παρακάτω.

Κατ' αρχήν ας θυμηθούμε ότι και η ευθεία και η αντίστροφη πορεία στην τυποποίηση μιας κυματικής εξισώσεως βασίζονται στις σχέσεις :

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = (ik)[\psi(x,t)] \quad (10.9) \text{ και } \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = (-i\omega)[\psi(x,t)] \quad (10.10),$$

τις οποίες μπορούμε να γράψουμε σε μια πιο αφηρημένη μαθηματική μορφή αντιστοιχίας:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &\Rightarrow ik & k &\Rightarrow \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} &\Rightarrow -i\omega & \omega &\Rightarrow -\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned} \quad \text{ευθείας, ή αντίστροφης μορφής} \quad (10.41).$$

Στις (10.41) έχουμε απομακρύνει και από τα δύο μέλη των σχέσεων (10.9) και (10.10) την κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t)$, κάτι σαν κάποιου τύπου «γενικευμένη απλοποίηση» και σε αντάλλαγμα έχουμε αντικαταστήσει τις παραγώγους $\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}$ και $\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$ με τους

διαφορικούς τελεστές $\frac{\partial}{\partial x}$ και $\frac{\partial}{\partial t}$.

Αυτοί οι διαφορικοί τελεστές από μόνοι τους δεν έχουν κάποιο φυσικό νόημα αν δεν τελέσουν κάποια (μαθηματική) λειτουργία, πάνω σε κάποιο μαθηματικό αντικείμενο. Εν προκειμένω, η «λειτουργία» είναι η λήψη των αντιστοίχων μερικών παραγώγων και το μαθηματικό αντικείμενο είναι η κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t)$. Η δράση των τελεστών αυτών επάνω στην κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t)$ συμβολίζεται σαν μια μαθηματική πράξη πολλαπλασιασμού από αριστερά προς τα δεξιά, του τελεστή (του ... «δράστη») επί την κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t)$, του αντικειμένου της δράσης. Το αποτέλεσμα της δράσης (του πολλαπλασιασμού) των δύο συγκεκριμένων τελεστών είναι οι παράγωγοι $\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}$ και $\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$, αντίστοιχα.

Το ερώτημα είναι, «τι κερδίζει κανείς, κάνοντας μια τέτοια αφαιρετική διαδικασία;».

Όπως σε κάθε αφαιρετική διαδικασία, η απάντηση είναι: «γενικότερη εποπτεία, ενοποίηση χειρισμών¹¹⁶ και διασύνδεση φαινομενικά ασύνδετων εννοιών».

Μπορούμε, για παράδειγμα, να χειριστούμε τους τελεστές σαν ανεξάρτητες οντότητες και (μέσα από κατάλληλους περιορισμούς) να τους θεωρήσουμε σαν μεταβλητές, ορίζοντας πράξεις μεταξύ τους, όπως πολλαπλασιασμό και πρόσθεση.

¹¹⁶Η δράση-πολλαπλασιασμός ενός διαφορικού τελεστή πάνω σε μια (κυματο)συνάρτηση είναι ανάλογη με την δράση-πολλαπλασιασμό ενός πίνακα πάνω σε ένα διάνυσμα του χώρου, το οποίο η δράση του τελεστή μετασχηματίζει (περιστροφή, ανάκλαση). Η ομορφιά αυτής της αφαιρετικής διαδικασίας είναι ότι μπορούμε να χρησιμοποιούμε κοινή γλώσσα και για τις δύο περιπτώσεις.

Μ' αυτό τον τρόπο, οι διαδοχικές παραγωγίσεις (παράγωγοι μεγαλύτερης τάξεως από πρώτη) είναι ισοδύναμες με διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς, δηλαδή ισοδύναμες με

δυνάμεις των «μεταβλητών» $\frac{\partial}{\partial x}$ και $\frac{\partial}{\partial t}$, όπως:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (10.42) \quad . \text{ Δηλαδή : } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} .$$

Επίσης αν θεωρήσουμε δυο σταθερές c_1, c_2 ορίζεται και ο γραμμικός συνδυασμός (διαφορικών) τελεστών :

$$\left[c_1 \frac{\partial}{\partial x} + c_2 \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi(x,t) = c_1 \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} + c_2 \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \quad (10.43).$$

Μπορούμε, ως εκ τούτου να ορίσουμε και ένα πολυώνυμο τελεστών ή μια συνάρτηση τελεστών, της μορφής $f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ (10.44).

Είμαστε πλέον έτοιμοι, να κάνουμε το τελευταίο αντίστροφο βήμα και από την (10.40) να πάρουμε, με τις αντικαταστάσεις (10.41):

κυματική εξίσωση:

$$\left[f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \right] \psi(x,t) = 0 \quad (10.45) \quad \text{με σχέση διασποράς} \quad f(k, \omega) = 0 \quad (10.39).$$

Παράδειγμα 10.2

Βρείτε την κυματική εξίσωση, η οποία αντιστοιχεί στην σχέση διασποράς

$$\omega^2 = \nu^2 k^2 \quad (10.46)$$

Απάντηση

Ξαναγράφουμε την σχέση διασποράς στην μορφή:

$$g(k, \omega) = 0 \quad \text{ή} \quad k^2 - \frac{\omega^2}{\nu^2} = 0 \quad , \quad \text{οπότε σύμφωνα με την (10.45), η ζητούμενη διαφορική}$$

$$\text{εξίσωση θα είναι: } \left[g\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \right] \psi(x,t) = 0 \quad \text{ή} \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \psi(x,t) = 0 \quad (10.47),$$

η οποία είναι η γνωστή μας χαρακτηριστική κυματική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\nu^2} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (10.1).$$

Αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού η σχέση διασποράς (10.46) δεν είναι άλλη από την (10.4), ή την (10.13), η οποία προήλθε από την χαρακτηριστική εξίσωση.

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αναζητήσουμε την άγνωστη κυματική εξίσωση, μέσα από την οποία προσδιορίζεται η κυματοσυνάρτηση η οποία περιγράφει πλήρως την *κατάσταση* ενός κβαντομηχανικού συστήματος.

10.2 Εις Αναζήτηση Κυματικής Εξίσωσης για τα κύματα de Broglie

Την κυματική εξίσωση που αναζητούμε, ανακάλυψε ο E. Schrödinger ακολουθώντας όχι κατ' ανάγκην τα βήματα που θα ακολουθήσουμε εδώ, σύμφωνα με την «συνταγή» του προηγούμενου εδαφίου. Θα πρέπει από την αρχή να υπενθυμίσουμε ότι ο στόχος αυτού του εδαφίου δεν είναι η «απόδειξη» της κυματικής εξίσωσης του Schrödinger επειδή προφανώς δεν μπορεί κανείς να δώσει απόδειξη για κάτι που είναι ΑΞΙΩΜΑ. Αντίθετα θέλουμε να δώσουμε ένα ευλογοφανή τρόπο με τον οποίο θα μπορούσε κάποιος σαν τον Schrödinger να οδηγηθεί στην Ομώνυμη Φημισμένη Κυματική Εξίσωση¹¹⁷.

Θα προσπαθήσουμε να «μαντεύσουμε» λοιπόν, την σχέση διασποράς της υπό αναζήτηση κυματικής εξίσωσης αφού συνοψίσουμε τις απαιτήσεις μας

Ψάχνουμε λοιπόν για :

- 1^{ov}) Μια γραμμική διαφορική εξίσωση,
- 2^{ov}) μερικές παραγώγους ως προς τον χρόνο και τον χώρο,
- 3^{ov}) με σταθερούς συντελεστές ,
- η οποία: 4^{ov}) θα περιέχει την ενέργεια E και την ορμή p
- 5^{ov}) θα επαληθεύει την σχέση διατήρησης της ενέργειας:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (10.48),$$

όπου $V(x)$, η δυναμική ενέργεια.

$$\& \text{ 6^{ov}) θα επαληθεύει τις σχέσεις } \begin{matrix} E = \hbar\omega \\ p = \hbar k \end{matrix} \quad (10.49) ,$$

για την ενέργεια και την ορμή των κυμάτων de Broglie.

¹¹⁷ Θα μπορούσε λοιπόν ο τίτλος αυτού του εδαφίου να είναι «**Συνταγές Επιτυχίας για Κβαντικούς Θεωρητικούς Φυσικούς**». Αλήθεια, Πόσο εύκολα φαίνονται τα πράγματα όταν γνωρίζουμε εκ των προτέρων την απάντηση !...

Οι απαιτήσεις 1-3, απλά ανακεφαλαιώνουν τη συζήτηση που κάναμε μέχρι τώρα για γενικευμένες κυματικές εξισώσεις. Οι απαιτήσεις 4+5 για την διατήρηση της Ενέργειας δηλώνουν την προσήλωσή μας σ' αυτή την γενική αρχή διατήρησης. Μπορεί να είμαστε έτοιμοι να εγκαταλείψουμε πολλές από τις ιδέες και αρχές της κλασικής φυσικής, όμως **νόμους διατήρησης σαν αυτόν της Ενέργειας ούτε μπορούμε ούτε θέλουμε να θυσιάσουμε**. Άλλωστε οι νόμοι διατήρησης, που συνδέονται βαθιά με θεμελιώδεις συμμετρίες της Φύσης, αποτελούν το τελευταίο και ισχυρότερο οχυρό της Σύγχρονης Φυσικής σε οποιοδήποτε επαπειλούμενες αλλαγές και μεταβολές απόψεων. Μπορούμε τώρα να συνδέσουμε τις απαιτήσεις 5 και 6 μαζί και να γράψουμε:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(x) = \hbar\omega \quad \text{ή} \quad \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(x) - \hbar\omega = 0 \quad (10.50).$$

Παρατηρούμε τώρα ότι έχουμε φτάσει να έχουμε βρει τη σχέση διασποράς της ζητούμενης κυματικής εξίσωσης. Έχουμε σχεδόν τελειώσει!

Με βάση την (10.45) και τις αντιστοιχίες (10.41) βρίσκουμε (άσκηση (10.3):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} \quad (10.51)$$

Εξίσωση Schrödinger

Την εξίσωση αυτή ανακάλυψε και θεμελίωσε ο E. Schrödinger το 1926. Η φημισμένη αυτή εξίσωση ικανοποιεί όλες τις προσδοκίες και τις απαιτήσεις που είχαμε θέσει αναζητώντας την Κβαντομηχανική Κυματική Εξίσωση. Θα πρέπει όμως να υπενθυμίσουμε ξανά ότι τα βήματα που ακολουθήσαμε για να οδηγηθούμε στην (10.51) δεν συνιστούν κατά κανένα τρόπο απόδειξη, αλλά είναι απλώς ευλογοφανή επιχειρήματα. **Η ισχύς της εξίσωσης Schrödinger θεμελιώνεται αξιωματικά και πιστοποιείται πειραματικά.**

Η εξίσωση αυτή, όπως την παρουσιάσαμε, μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει την διατήρηση της ενέργειας. Όμως, υπό μια σημαντική προϋπόθεση, την οποία σκοπίμως δεν τονίσαμε όσο θα έπρεπε, μέχρι τώρα. Η σχέση (10.50) για την ενέργεια δεν

περιλαμβάνει την θεωρία της Σχετικότητας¹¹⁸. Κατά συνέπεια, δεν θα πρέπει να περιμένουμε να ισχύει η εξίσωση του Schrödinger για σωμάτια τα οποία κινούνται με πάρα πολύ μεγάλες ταχύτητες (οι οποίες μπορεί να πλησιάζουν την ταχύτητα του φωτός στο κενό). Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε (βλέπε άσκηση 10.4) πως αν είχαμε χρησιμοποιήσει την σχετικιστική σχέση ενέργειας ορμής για ελεύθερα σωμάτια, θα είχαμε οδηγηθεί σε μια κυματική εξίσωση της μορφής:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = -c^2 \hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + m^2 c^4 \Psi(x,t) \quad (10.52).$$

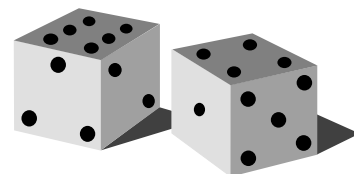
Η εξίσωση (10.52) είναι γνωστή ως εξίσωση Klein-Gordon, στην οποία δεν θα εμβαθύνουμε παραπέρα. Απλά, θα περιορισθούμε στην εξίσωση του Schrödinger και δεν θα ασχοληθούμε άλλο με σχετικιστικές κυματικές εξισώσεις. Η σχετικιστική Κβαντομηχανική είναι ένα ξεχωριστό κομμάτι της θεωρητικής Φυσικής, το οποίο δεν θα μας απασχολήσει επί του παρόντος. Εντούτοις, μερικές από τις συνέπειες (όπως το ηλεκτρονικό spin) και τις διορθώσεις, τις οποίες επιβάλλει η σχετικιστική κβαντομηχανική σε θέματα που θα μας ενδιαφέρουν αργότερα (όπως τα ατομικά φάσματα) θα ενσωματωθούν αυτούσια, εκ των υστέρων (όπου και όταν χρειάζεται).

Ασκήσεις.

10.3 Δείξτε (αναλυτικά) ότι η σχέση διασποράς (10.50) μας οδηγεί στην κυματική εξίσωση (10.51).

10.4 Δείξτε ότι η σχετικιστική κυματική εξίσωση (10.52) μπορεί να προκύψει με την διαδικασία που περιγράψαμε για την εξίσωση Schrödinger, από την σχετικιστική σχέση ενέργεια ορμής $E = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}$ (10.53).

10.3 Διερεύνηση της κυματικής εξίσωσης Schrödinger



¹¹⁸ Η σχέση ενέργειας και ορμής που χρησιμοποιήσαμε δεν είναι σχετικιστική.

10.3.1 Γενικές παρατηρήσεις (ο δεκάλογος)

$$\text{Η εξίσωση } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} \quad (10.51),$$

την οποία θεμελίωσε αξιωματικά ο E. Schrödinger, αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο της σύγχρονης **Κβαντικομηχανικής**. Μάλιστα, μετά την πρωτοποριακή δουλειά του Schrödinger η κβαντική θεωρία ονομαζόταν «**Κυματομηχανική**».

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η εξίσωση του Schrödinger (10.51):

1) Είναι μια (γραμμική) γενικευμένη κυματική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς ως προς τον χρόνο και την θέση

2) Σε αντίθεση με την χαρακτηριστική κυματική εξίσωση, εμφανίζεται χρονική παράγωγος πρώτης τάξεως (αντί δευτέρας), καθώς και όρος μηδενικής τάξεως (ή ίδια η συνάρτηση).

3) Στο δεξιό μέλος της εξισώσεως εμφανίζεται η φανταστική μονάδα ενώ το αριστερό μέλος αυτής της είναι πραγματικός αριθμός, εφόσον η κυματοσυνάρτηση θεωρείται πραγματικός αριθμός. Κάτι τέτοιο όμως, δεν είναι δυνατόν. Κατά συνέπεια, είμαστε αναγκασμένοι να δεχθούμε ότι

η κυματοσυνάρτηση $\Psi(x,t)$ θα πρέπει να είναι μιγαδικός αριθμός.

4) Η διαπίστωση ότι η κυματοσυνάρτηση είναι μιγαδική, δεν είναι σοβαρό πρόβλημα. Διότι, από φυσικής πλευράς, η ποσότητα που έχει νόημα (επειδή συνδέεται με την πιθανότητα θέσης) δεν είναι η κυματοσυνάρτηση αυτή καθαυτή, αλλά το τετράγωνο του μέτρου της. Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 9, η πιθανότητα $P_{[a,b]}$ να βρεθεί ένα σωματίο στην περιοχή του χώρου από $x=a$ μέχρι και $x=b$ θα δίνεται από το

$$\text{ολοκλήρωμα: } P_{[a,b]} = \int_a^b p(x) dx = \int_a^b |\psi(x,t)|^2 dx \quad (\text{σχέση 9.102}),$$

στην οποία σκοπίμως είχαμε σημειώσει το μέτρο του τετραγώνου της ψ χωρίς περαιτέρω διευκρινήσεις. Φυσικά, εάν επρόκειτο για πραγματικό αριθμό, θα έπρεπε να ταυτίσουμε το μέτρο με την απόλυτη τιμή, κάτι που δεν θα είχε ιδιαίτερο νόημα για το τετράγωνο της απόλυτης τιμής (αφού θα ήταν ίδιο με το τετράγωνο του αριθμού). Το ίδιο ισχύει και για την αναμενόμενη τιμή κατά την μέτρηση μιας φυσικής ποσότητας ϖ , η οποία είναι συνάρτηση της θέσης x και του χρόνου t , $\varpi = \varpi(x,t)$.

Η αναμενόμενη τιμή της ϖ ορίζεται από την σχέση:

$$\langle \varpi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varpi(x,t) |\psi(x,t)|^2 dx \quad (\text{σχέση 9.110}).$$

$$\text{Ορίζουμε λοιπόν } |\Psi(x,t)|^2 \equiv \Psi(x,t) \times \Psi^*(x,t) \quad (10.54),$$

προς ... αποκατάσταση της (φυσικής και μαθηματικής) τάξεως.

5) Για ένα ελεύθερο σωματίο, $V(x) = 0$, παρατηρούμε ότι (άσκηση 10.5) τα επίπεδα κύματα de Broglie:

$$\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} = Ae^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} \quad (10.55),$$

είναι λύσεις της εξίσωσης του Schrödinger με καθορισμένη ενέργεια και ορμή, σχέσεις (10.49).

6) Το γεγονός ότι τα επίπεδα κύματα (10.55), τα οποία είναι λύσεις της εξίσωσης του Schrödinger, αντιστοιχούν σε ελεύθερα σωματία με καλώς καθορισμένη ορμή (δηλαδή, $\Delta p=0$) δεν αποτελεί ουσιαστική παραβίαση της αρχής της αβεβαιότητας, διότι η αντίστοιχη αβεβαιότητα στην θέση είναι άπειρη ($\Delta x = \infty$). Δηλαδή, η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίο οπουδήποτε στον χώρο είναι ίδια (και απειροστά μικρή) για οποιαδήποτε περιοχή του χώρου (βλέπε άσκηση 10.5).

7) Σε αντίθεση με τα συνηθισμένα επίπεδα κύματα, για τα οποία η μιγαδική μορφή $e^{i(kx-\omega t)}$, ήταν ένα απλό μαθηματικό τρυκ για να διευκολύνει τις πράξεις, τα επίπεδα κύματα (10.55), είναι στην πραγματικότητα μιγαδικά¹¹⁹ (όπως όλες οι λύσεις της εξίσωσης Schrödinger).

8) Όπως και με όλες τις κυματικές εξισώσεις, η χρονική και η χωρική μεταβολή στην γενική περίπτωση δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, αλλά συνδέονται συνήθως με γραμμικούς συνδυασμούς της μορφής $\xi = x \pm vt$.

Για παράδειγμα τα επίπεδα κύματα (10.55) μπορούν να γραφούν ισοδύναμα ως:

$$\psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} = Ae^{ik(x-vt)} \quad (10.56). \quad \text{\textit{τρέχοντα κύματα}}$$

9) Τα στάσιμα κύματα όμως, αποτελούν εξαίρεση αυτού του κανόνα.

Τα κλασικά στάσιμα κύματα, τα οποία είδαμε αρκετές φορές μέχρι τώρα, έχουν την τυπική μορφή: $\psi(x,t) = A \sin kx \cos \omega t$ (10.57) στάσιμα κύματα,

$$\text{ή } \Psi(x,t) = A \sin kx e^{-i\omega t} \quad (10.58) \quad \text{\textit{εκθετική μορφή στάσιμων κύματων.}}$$

Η δεύτερη μορφή είναι πιο χρήσιμη στην Κβαντομηχανική.

Στα στάσιμα κύματα η χωρική και χρονική μεταβολή είναι ανεξάρτητες και «ξεχωρισμένες». Ως γνωστόν, τα στάσιμα κύματα προέρχονται από την σύνθεση ενός αρχικού κύματος και του κύματος το οποίο προέρχεται από ανάκλαση σε κάποια

¹¹⁹ Δείτε την άσκηση 10.5

αδιαπέραστη «περατωτική» επιφάνεια. Ως εκ τούτου, στάσιμα κύματα εμφανίζονται σ' ένα κλειστό πεπερασμένο μέσο του οποίου οι περατωτικές επιφάνειες δρουν ως αδιαπέραστα εμπόδια στον δρόμο κυμάτων. Τα στάσιμα κύματα είναι, λοιπόν, εντοπισμένα και περιορισμένα σε μια πεπερασμένη περιοχή του χώρου (οσοδήποτε εκτεταμένη, αλλά πεπερασμένη, όχι άπειρη). Στην «Κυματομηχανική», τα αντίστοιχα σωμάτια, τα οποία είναι περιορισμένα σε μια πεπερασμένη περιοχή του χώρου, περιγράφονται από κυματοσυναρτήσεις, οι οποίες αντιστοιχούν σε στάσιμα κύματα (με «χωριζόμενη» χωρική και χρονική μεταβολή). Λέμε τότε, ότι τα σωμάτια βρίσκονται σε δέσμιες ή **Στάσιμες καταστάσεις**. Στις στάσιμες καταστάσεις, η πιθανότητα να βρεθεί ένα σωματίο στο άπειρο είναι, εξ ορισμού, μηδενική.

10) Η εξίσωση του Schrödinger, λοιπόν, μπορεί να χωρισθεί σε ένα χωρικό και ένα χρονικό μέρος, όταν έχουμε στάσιμες καταστάσεις και όχι μόνο. Όπως είδαμε¹²⁰ στο κεφάλαιο 9, οι στάσιμες καταστάσεις αντιστοιχούν σε καταστάσεις σταθερής ενέργειας. Μπορούμε να δείξουμε ότι ο χωρισμός των μεταβλητών είναι δυνατός όταν έχουμε **καταστάσεις σταθερής ενέργειας**. Την περίπτωση αυτή θα διερευνήσουμε στο επόμενο εδάφιο.

10.3.2 Χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger

Σύμφωνα με την σχέση (10.48), η οποία εκφράζει την διατήρηση της ενέργειας, «καταστάσεις σταθερής ενέργειας» έχουμε όταν το δυναμικό (η δυναμική ενέργεια) $V(x)$ εξαρτάται μόνο από την θέση και δεν μεταβάλλεται χρονικά. Στην (10.48), όπως και στην εξίσωση (10.51) έχουμε «προτρέξει» και έχουμε εξ' αρχής δηλώσει το δυναμικό σαν συνάρτηση μόνο της θέσης. Στην γενικότερη περίπτωση, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση ενός ηλεκτρονίου κάτω από την επίδραση ενός εξωτερικού εναλλασσομένου (χρονικά μεταβαλλόμενου) ηλεκτρικού πεδίου, η δυναμική ενέργεια V μπορεί να εξαρτάται και από τον χρόνο, t . Σε τέτοιες περιπτώσεις δεν έχουμε καταστάσεις σταθερής ενέργειας και ο χωρισμός του χωρικού και χρονικού μέρους δεν είναι δυνατός.

Θα υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε δυναμική ενέργεια η οποία δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο. Κάτω από αυτή την προϋπόθεση θα ακολουθήσουμε την γνωστή και συνηθισμένη τακτική επίλυσης διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, την μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών. Η μέθοδος προσπαθεί να ανάγει (να χωρίσει) την διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους σε δύο ανεξάρτητες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες στη συνέχεια μπορούν να επιλυθούν χωριστά.

Αναζητούμε λοιπόν λύσεις της μορφής:

¹²⁰ Στο παράδειγμα του σώματος μέσα σε ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού.

$$\Psi(x,t) = \psi(x) \times \phi(t) \quad (10.59). \quad \text{\textbf{Χωρισμός των μεταβλητών}}$$

Αντικαθιστώντας αυτή την λύση στην (10.51) βρίσκουμε (άσκηση 10.6) :

$$\frac{1}{\psi(x)} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) \right] = i\hbar \frac{1}{\phi(t)} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (10.60).$$

Παρατηρούμε τώρα ότι το αριστερό μέλος της εξίσωσης (10.60) δεν εξαρτάται από τον χρόνο t (είναι συνάρτηση μόνο του x) ενώ το δεξιό μέλος της εξίσωσης είναι συνάρτηση μόνο του t και δεν εξαρτάται από το x . Ο μόνος τρόπος να ισχύει κάτι τέτοιο είναι το κάθε μέλος της εξίσωσης χωριστά να ισούται με μια (και την ίδια) σταθερά C , γνωστή από τη θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων ως **σταθερά χωρισμού** (separation constant).

$$\text{Έχουμε λοιπόν :} \quad i\hbar \frac{1}{\phi(t)} \frac{d\phi(t)}{dt} = C \quad (10.61)$$

$$\text{και} \quad \frac{1}{\psi(x)} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) \right] = C \quad (10.62).$$

Η λύση της πρώτης εξίσωσης, η οποία γράφεται $\frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{iC}{\hbar}\phi(t)$ και δηλώνει μια

συνάρτηση (του χρόνου t) της οποίας η παράγωγος ισούται με μια σταθερά πολλαπλασιασμένη επί την συνάρτηση αυτή, είναι λίγο-πολύ προφανής.

Όπως είναι εύκολο να αποδείξουμε με απλή αντικατάσταση η λύση είναι:

$$\phi(t) = Ae^{-\frac{iC}{\hbar}t} \quad (10.63)$$

$$\text{Συγκρίνοντας τώρα με τη σχέση} \quad \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -i\omega\Psi(x,t) = -\frac{iE}{\hbar}\Psi(x,t) \quad (10.64),$$

όπου E είναι η ενέργεια του σωματίου, βλέπουμε ότι **η σταθερά χωρισμού θα πρέπει να ισούται με την σταθερή ενέργεια E : $C = E$.**

Είναι εύκολο να φτάσουμε σ' αυτή την διαπίστωση, διότι η (10.64), με βάση την οποία οδηγηθήκαμε στην εξίσωση Schrödinger, στην προκειμένη περίπτωση γράφεται

$$\psi(x) \frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{iE}{\hbar}\phi(t)\psi(x).$$

Κατά συνέπεια θα έχουμε:

$$\phi(t) = Ae^{-\frac{iE}{\hbar}t} \quad \text{\textbf{(10.65) χρονική λύση της εξίσωσης Schrödinger.}}$$

Ενώ, η «χωρική» εξίσωση (10.62), η οποία προέκυψε από τον χωρισμό των μεταβλητών γράφεται :



$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (10.66)$$

Χρονοανεξάρτητη Εξίσωση Schrödinger

Η διαφορική εξίσωση (10.66) είναι γνωστή ως η ανεξάρτητη από τον χρόνο (ή χρονοανεξάρτητη) εξίσωση Schrödinger ή και απλά **εξίσωση Schrödinger**.

Η συνολική λύση $\Psi(x, t)$ για καταστάσεις σταθερής ενέργειας γράφεται:

$$\Psi(x, t) = A\psi(x)e^{-\frac{iE}{\hbar}t} \quad (10.67) \quad \text{\textbf{Χωροχρονική λύση για καταστάσεις με σταθερή}}$$

ενέργεια.

Η χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger (10.66) εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας

$$\frac{P^2}{2m} + V(x) = E \text{ και περιγράφει καταστάσεις με σταθερή ενέργεια } E.$$

Για τέτοιες καταστάσεις η πιθανότητα θέσης, η πιθανότητα δηλαδή να βρούμε το σωματίο μεταξύ των θέσεων x και $x+dx$, δεν εξαρτάται από τον χρόνο, διότι (άσκηση 10.7) :

$$|\Psi(x, t)|^2 = |\psi(x)|^2 \quad (10.68).$$

Για «στάσιμες» καταστάσεις, το γεγονός ότι η πυκνότητα πιθανότητας $|\Psi(x, t)|^2$ δεν μεταβάλλεται χρονικά είναι απόλυτα κατανοητό. Ισχύει όμως, γενικότερα για καταστάσεις σταθερής ενέργειας.

Ασκήσεις.

10.5 Δείξτε ότι για ένα ελεύθερο σωματίο μια λύση της εξίσωσης του Schrödinger

$$\text{δίνεται από τη σχέση (10.55): } \psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} = Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$$

10.6 Εκτελέστε (αναλυτικά) τα ενδιάμεσα βήματα που οδηγούν στην σχέση (10.60)

10.7 Δείξτε την σχέση (10.68)

10.8 α) Γράψτε την (χρονοανεξάρτητη) εξίσωση του Schrödinger για έναν αρμονικό ταλαντωτή μάζας m , στην άκρη ενός ελατηρίου με σταθερά D . β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\psi(x) = Ce^{-ax^2}$ αποτελεί μια λύση της. γ) Βρείτε την σταθερά a και την ενέργεια E .

10.4 Διερεύνηση της χρονοανεξάρτητης εξίσωσης Schrödinger.

10.4.1 Γενικές παρατηρήσεις και ιδιότητες

1) Όπως βλέπουμε από την (10.67), σε αντίθεση με την $\Psi(x,t)$ η $\psi(x)$ μπορεί να είναι μια πραγματική συνάρτηση, επειδή η $\phi(t)$ να είναι σ' αυτή την περίπτωση (π.χ. δέσμιες καταστάσεις) μια καθαρά φανταστική ποσότητα.

2) Η εξίσωση (10.66) είναι μια συνηθισμένη (χωρίς μερικές παραγώγους) διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως. Άρα η γενική της λύση θα περιέχει δύο σταθερές ολοκληρώσεως, οι οποίες θα πρέπει να προσδιοριστούν από τις οριακές συνθήκες. Οι οριακές συνθήκες εκφράζουν με μαθηματικό τρόπο τις φυσικές απαιτήσεις του προβλήματος.

3) Όπως και για την $\Psi(x,t)$, οι μαθηματικές συνθήκες για την κυματοσυνάρτηση $\psi(x)$ πρέπει να εκφράζουν πέρα από τις συνθήκες για την ύπαρξη και τον προσδιορισμό των λύσεων της δευτεροβάθμιας διαφορικής εξίσωσης (10.66) και τις φυσικές απαιτήσεις που απορρέουν από την ερμηνεία της $|\psi(x)|^2 dx$ ως πιθανότητας θέσης (υποκεφάλαιο 9.5).

4) Μια τέτοια απαίτηση είναι το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx$ να υπάρχει και να είναι πεπερασμένο, ώστε να μπορεί να επιβληθεί η «συνθήκη κανονικοποίησης»:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1 \quad (10.69).$$

5) Για τον σκοπό αυτό η $\psi(x)$ πρέπει να είναι :

α) είναι μονοσήμαντα καθορισμένη (να μην υπάρχουν πολλαπλές τιμές της ψ για την ίδια τιμή του x).

β) είναι πεπερασμένη (να μην απειρίζεται) παντού, εκτός ίσως σε ένα μεμονωμένο σημείο (μπορεί δηλαδή να είναι μια συνάρτηση δ του Dirac), αφού

σ' αυτή την περίπτωση το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο).

γ) συνεχής παντού, και

δ) έχει συνεχή πρώτη παράγωγο παντού, εκτός ίσως σε ιδιόμορφα σημεία, στα οποία η δυναμική ενέργεια μπορεί να έχει άπειρη ασυνέχεια (βλέπε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού, παρακάτω).

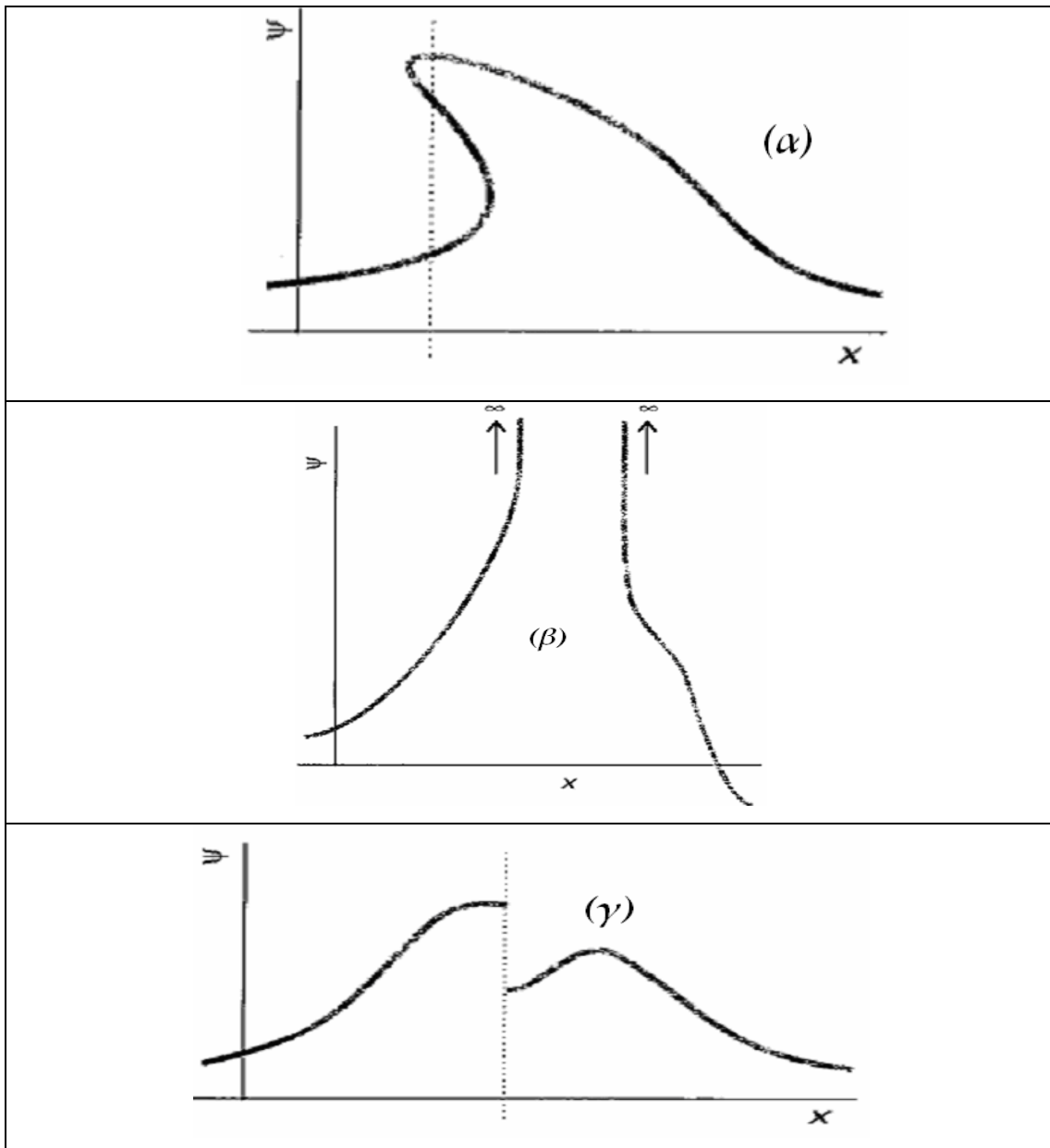
Στο σχήμα 10.3 φαίνεται αντί για το πώς πρέπει να είναι, το «πώς δεν πρέπει να είναι» η κυματοσυνάρτηση $\psi(x)$. **Δεν αρκεί λοιπόν η λύση να ικανοποιεί την διαφορική**

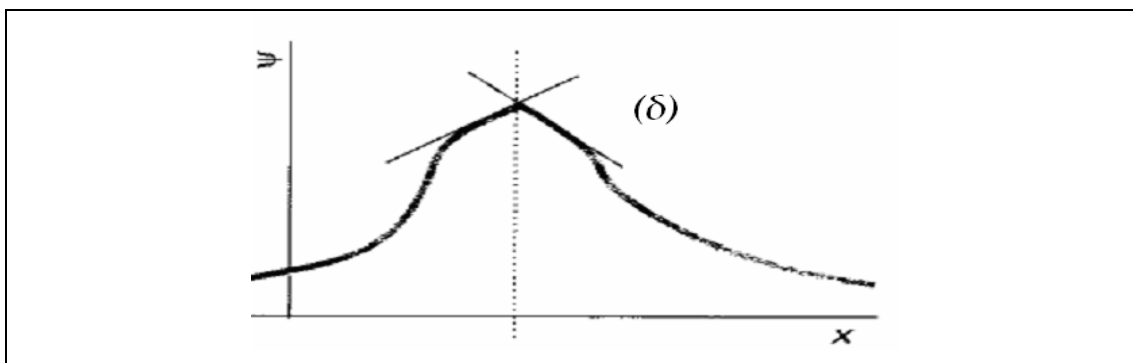
εξίσωση όταν την αντικαταστήσουμε. Πρέπει να ικανοποιεί και τις οριακές συνθήκες.

6) Η (10.66) δεν είναι απλά μια «συνηθισμένη» διαφορική εξίσωση, διότι στις συνηθισμένες διαφορικές εξισώσεις, ο μόνος άγνωστος μας είναι η συνάρτηση $\psi(x)$ και οι παράγωγοί της. Όλες οι άλλες ποσότητες είναι γνωστές.

Στην περίπτωση μας όμως, άγνωστη είναι και η σταθερή ενέργεια E .

Πέρα από την σταθερά του Planck και την μάζα του σωματιδίου, η μόνη άλλη δεδομένη ποσότητα είναι η δυναμική ενέργεια $V(x)$. Έχουμε λοιπόν μια αοριστία στο πρόβλημα της επίλυσης της εξίσωσης του Schrödinger. Τι κάνουμε γι αυτό;



**Σχήμα 10.3**

Μη αποδεκτές κυματοσυναρτήσεις, σύμφωνα με τις απαιτήσεις (τα κριτήρια) 5 (α-δ).

Η (α) δεν είναι μονότιμη, η (β) απειρίζεται, η (γ) δεν είναι συνεχής και η (δ) δεν έχει συνεχή πρώτη παράγωγο.

7) Το πρόβλημα της επίλυσης της εξίσωσης του Schrödinger, είναι παρόμοιο με το πρόβλημα της ευρέσεως των κανονικών τρόπων ταλάντωσης ενός συστήματος συζευγμένων ταλαντωτών.

Και εκεί, ψάχνουμε να βρούμε ταυτόχρονα και τις «κανονικές μετατοπίσεις» και τις «κανονικές συχνότητες». Όπως γνωρίζουμε¹²¹, σε τέτοιες περιπτώσεις οδηγούμαστε τελικά σ' ένα πρόβλημα ιδιοτιμών ενός τελεστή (σε μορφή πίνακα), από την επίλυση του οποίου βρίσκουμε όλες τις κανονικές συχνότητες και όλες τις αντίστοιχες μετατοπίσεις, οι οποίες είναι συμβατές με τις απαιτήσεις και την συμμετρία του συστήματος των ταλαντωτών.

8) Αν το σύστημα των συζευγμένων ταλαντωτών αποτελεί ένα εκτεταμένο συνεχές μέσο, όπως για παράδειγμα μια ελαστική χορδή στερεωμένη σταθερά στα άκρα της, τότε η αναλογία με το πρόβλημα της επίλυσης της εξίσωσης του Schrödinger, είναι ακόμη μεγαλύτερη. Τότε το πρόβλημα ανάγεται¹²² στην εύρεση όλων των **ιδιοτιμών** και **ιδιοσυναρτήσεων** ενός διαφορικού τελεστή.

Για παράδειγμα, οι συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης της συνεχούς χορδής δίνονται από τη σχέση:

$$v_n = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} n, n = 1, 2, \dots, \text{ ή } \omega_n = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \frac{\pi}{L} n, n = 1, 2, \dots \quad (10.70),$$

¹²¹ Δείτε για παράδειγμα το κεφάλαιο 4 στο βιβλίο «Ταλαντώσεις και Κύματα» του Α. Ζδέτση, εκδόσεις Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου (ΕΑΠ) 2004.

¹²² Δείτε αντίστοιχα το κεφάλαιο 5 του βιβλίου «Ταλαντώσεις και Κύματα» του Α. Ζδέτση, εκδόσεις Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου (ΕΑΠ) 2004.

για τις αντίστοιχες κυκλικές συχνότητες.

Οι αντίστοιχες («κανονικές») απομακρύνσεις y_n δίνονται από τις σχέσεις:

$$y_n(x, t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega_n t) \quad n, = 1, 2, \dots \quad (10.71),$$

από τις οποίες οι τρεις πρώτες φαίνονται στο σχήμα 10.4. Το αντίστοιχο «χωρικό» μέρος (χωρική κυματοσυνάρτηση) δίνεται από τη σχέση:

$$\chi_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n, = 1, 2, \dots \quad (10.72),$$

$$\text{όπου } y_n(x, t) = \chi_n(x) \times \varphi_n(t) \text{ και } \varphi_n(t) = \cos(\omega_n t) \quad n, = 1, 2, \dots \quad (10.73).$$

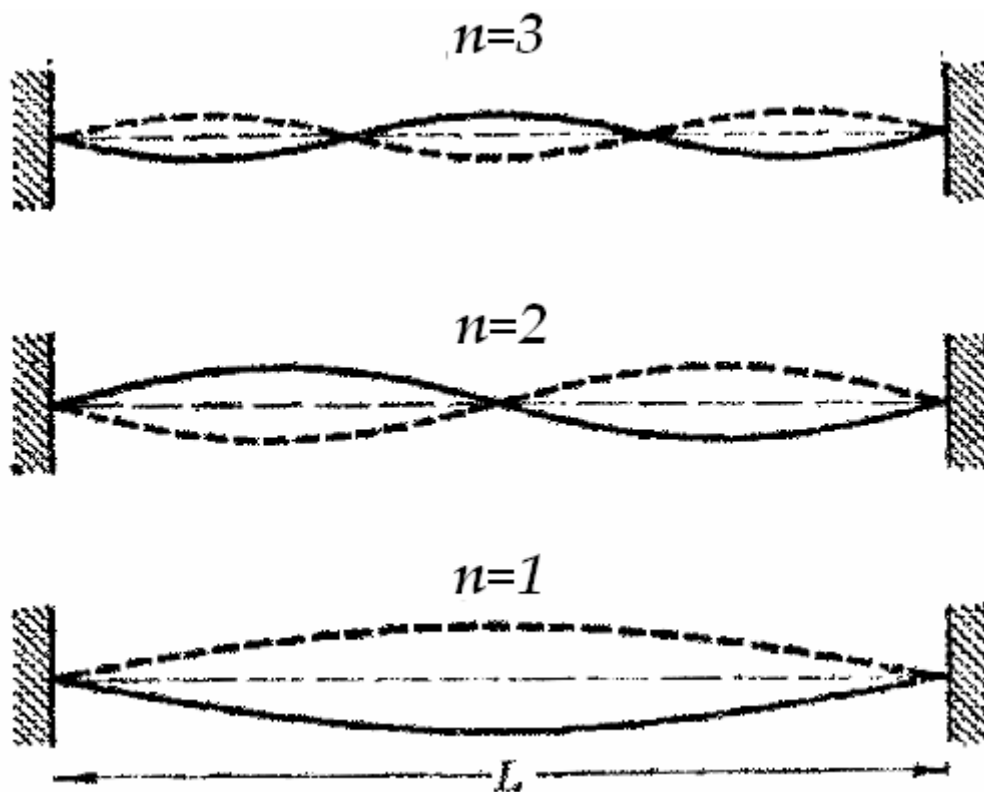
Οι παραπάνω σχέσεις προήλθαν από την **εφαρμογή των οριακών συνθηκών** στις επιζητούμενες λύσεις της αντίστοιχης διαφορικής εξίσωσης. Οι εφαρμογή των οριακών συνθηκών είναι αποφασιστικής σημασίας, ιδιαίτερα για προβλήματα ιδιοτιμών.

9) Η ομοιότητα με τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης ενός εκτεταμένου συνεχούς μέσου είναι προφανής, αφού για κάποιον ακίνητο παρατηρητή εντός του μέσου, οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης ερμηνεύονται ως (είναι) στάσιμα κύματα. Βλέπουμε λοιπόν πως η εξίσωση του Schrödinger (10.66), η οποία μπορεί να γραφεί στη

$$\text{μορφή: } \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x) \quad (10.74),$$

είναι μια διαφορική εξίσωση ιδιοτιμών ενός διαφορικού τελεστή

$$\hat{H} \equiv \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \quad (10.75) .$$



Σχήμα 10.4

*Οι τρεις πρώτοι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης μια χορδής με στερεωμένα άκρα
(σύμφωνα με τις (10.70), (10.71))*

Δηλαδή η εξίσωση Schrödinger μπορεί να γραφεί:

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x) \quad (10.76) \text{ **Εξίσωση Schrödinger σε μορφή ιδιοτιμών του τελεστή } \hat{H} \text{.}**$$

10) Στη γενική θεώρηση των λύσεων της εξίσωσης του Schrödinger διακρίνουμε δύο χαρακτηριστικές και ριζικά διαφορετικές κατηγορίες κυματοσυναρτήσεων, οι οποίες αντιστοιχούν σε δυο τελείως διαφορετικού είδους φυσικά προβλήματα. Στην πρώτη κατηγορία υπάγονται κυματοσυναρτήσεις, οι οποίες αντιστοιχούν σε δέσμιες ή στάσιμες καταστάσεις. Οι κυματοσυναρτήσεις αυτές, περιγράφουν σωματία τα οποία περιορίζονται σε μια πεπερασμένη περιοχή του χώρου (μικρή ή μεγάλη) από κάποιες εξωτερικές δυνάμεις, οι οποίες απορρέουν από κάποιο δυναμικό και συνδέονται με κάποια δυναμική ενέργεια $V(x)$. Η κίνηση σ' αυτή την περίπτωση είναι «περατωτική». Επειδή σ' αυτή την περίπτωση, η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίο στο άπειρο είναι μηδενική, γι αυτές τις κυματοσυναρτήσεις θα ισχύει η συνθήκη:

$$\psi(x)_{x \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0 \quad (10.77) \text{ **Ιδιότητα δέσμιας κατάστασης.**}$$

Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν κυματοσυναρτήσεις της μορφής (10.55) όμοιες με εκείνες που αντιστοιχούν σε οδεύοντα αρμονικά κύματα τα οποία είναι «απλωμένα» σε ολόκληρο το χώρο. Οι κυματοσυναρτήσεις αυτές περιγράφουν σωμάτια (όπως τα ελεύθερα σωμάτια) τα οποία δεν είναι περιορισμένα σε μια πεπερασμένη περιοχή του χώρου. Η πιθανότητα να βρεθούν αυτά τα σωμάτια στο άπειρο δεν είναι μηδενική και κατά συνέπεια δεν ισχύει σ' αυτές τις περιπτώσεις η συνθήκη (10.77). Σ' αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε μόνο με δέσμιες ή στάσιμες καταστάσεις.

10.4.2 Επίλυση της εξίσωση του Schrödinger

Όπως είδαμε νωρίτερα, η εξίσωση του Schrödinger, ως εξίσωση ιδιοτιμών, δεν θα έχει μια μόνο λύση, αλλά πολλές (άπειρες), οι οποίες όμως επιλέγονται με συστηματικό τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες. **Οι οριακές συνθήκες είναι αποφασιστικής σημασίας**, για τέτοιου είδους προβλήματα, όπως φαίνεται παρακάτω στο παράδειγμα 10.3.

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε την εξίσωση του Schrödinger στη γενική μορφή:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi_n(x) = E_n \psi_n(x) \quad n = 1, 2, \dots \quad (10.78).$$

Ο αριθμός n , ο οποίος καθορίζει μια συγκεκριμένη τιμή της ενέργειας και της κυματοσυνάρτησης, ονομάζεται **κβαντικός αριθμός**.

Η συγκεκριμένη κυματοσυνάρτηση $\psi_n(x)$, προσδιορισμένη από τον συγκεκριμένο κβαντικό αριθμό, ορίζει την κβαντομηχανική **κατάσταση του συστήματος**

Οι λύσεις καθορίζονται μονοσήμαντα από τις αναγκαίες οριακές συνθήκες¹²³.

Παράδειγμα 10.3

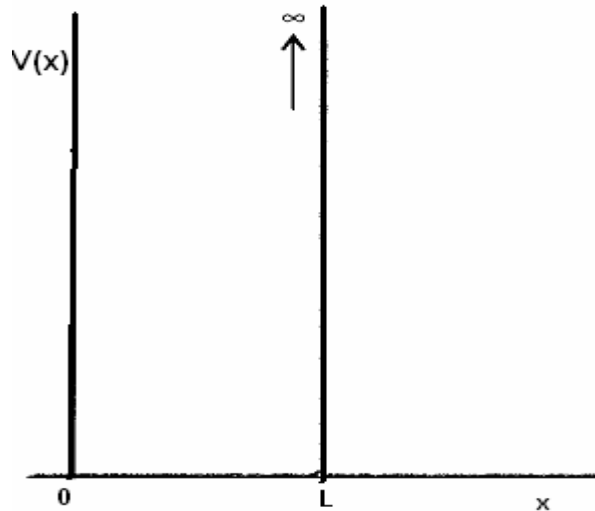
Να γραφεί και επιλυθεί η εξίσωση του Schrödinger για ένα σωμάτιο μάζας m σε ένα απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού, της μορφής $V(x) = 0$, όταν $0 \leq x \leq L$ και $V(x) = \infty$ σε όλες τις άλλες περιπτώσεις (δηλαδή $x < 0$ ή $x > L$).

Απάντηση

¹²³ Θα πρέπει να θυμηθούμε ότι οι «κβαντισμένες» λύσεις (10.70), (10.72) για την χορδή, προήλθαν από τις οριακές συνθήκες

Το απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού, το οποίο φαίνεται στο κάτωθι σχήμα 10.5, έχει την

$$\text{αλγεβρική μορφή } V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq L \\ \infty & x < 0, x > L \end{cases} \quad (10.79).$$



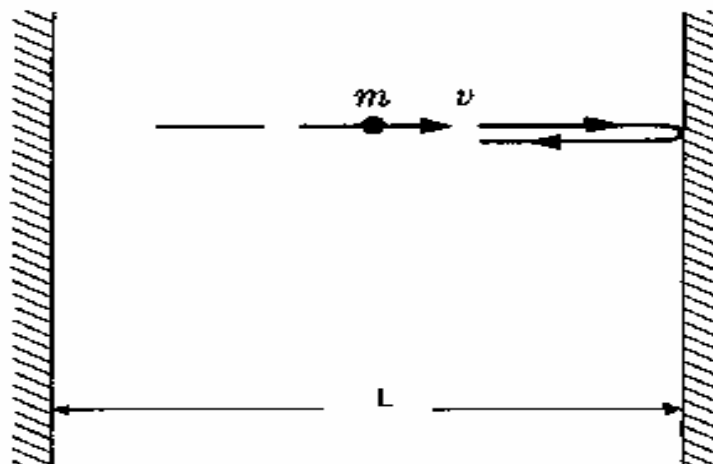
Σχήμα 10.5

Το απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού, που δίνεται αναλυτικά στην σχέση (10.79)

Όπως είναι φανερό, ένα σωματίο το οποίο υπόκειται στην επίδραση του παραπάνω δυναμικού είναι πάντοτε δέσιμο. Κατά την κλασσική μηχανική, το σωματίο κινείται μέσα στην περιοχή $0 < x < L$ και ανακλάται κάθε φορά που χτυπάει στα τοιχώματα του πηγαδιού, δηλαδή στα σημεία $x=0, L$, όπως φαίνεται στο σχήμα 10.6. Όπως είδαμε και πριν, η ορμή του σωματιδίου αντιστρέφεται με κάθε ανάκλαση, αλλά η ολική του

ενέργεια παραμένει σταθερή και ίση με $E = \frac{p^2}{2m}$, αφού η δυναμική ενέργεια είναι μηδέν

σ' αυτή την περιοχή.



Σχήμα 10.6

Η κλασική κίνηση ενός σωματίου μάζας m και ταχύτητας v μέσα στο απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού του σχήματος 10.5.

Μέσα στο πηγάδι δυναμικού η εξίσωση του Schrödinger έχει την μορφή:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x), \quad \text{ή} \quad \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0 \quad (10.80).$$

Θέτοντας $k^2 \equiv \frac{2mE}{\hbar^2}$, ή $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ (10.81),

Η εξίσωση παίρνει τη μορφή $\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0$ (10.82),

η οποία είναι η κλασική μορφή εξισώσεως «ταλάντωσης» αλλά στον χώρο x και όχι τον χρόνο t . Η λύση μέσα στο πηγάδι θα είναι λοιπόν:

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \quad (10.83) \quad \text{\textit{κυματοσυνάρτηση μέσα στο «πηγάδι»}}.$$

Έξω όμως, από το πηγάδι η λύση θα είναι παντού μηδέν, αφού εκεί το δυναμικό απειρίζεται και η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίο είναι μηδενική. Κατά συνέπεια, στα όρια των δύο περιοχών (μέσα, έξω από το πηγάδι) $x=0$ και $x=L$, η κυματοσυνάρτηση (10.83) θα πρέπει να μηδενίζεται για λόγους συνεχείας. Απαιτούμε λοιπόν:

$$\psi(0) = 0, \text{ απ' όπου έπεται } B=0 \quad (10.84)$$

$$\text{και } \psi(L) = 0, \text{ απ' όπου έπεται } \sin(kL) = 0 \quad (10.85) \quad \text{\underline{\underline{οριακές συνθήκες}}}.$$

Η συνθήκη (10.85) οδηγεί στην σχέση:

$$kL = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.86),$$

απ' όπου βλέπουμε ότι οι δυνατές τιμές τις οποίες παίρνει η σταθερά k είναι:

$$k_n = \frac{\pi}{L} n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.87) \quad \text{\underline{\underline{Συνθήκη κβάντωσης}}}.$$

Η συνθήκη (10.87) είναι ισοδύναμη, λόγω της (10.81) με την συνθήκη κβάντωσης

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \cdot n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.88) \quad \text{\underline{\underline{Συνθήκη κβάντωσης της}}}$$

ενέργειας. Οι αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις δίνονται από την σχέση:

$$\psi_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10.89) \quad \text{\underline{\underline{Ιδιοσυναρτήσεις}}}$$

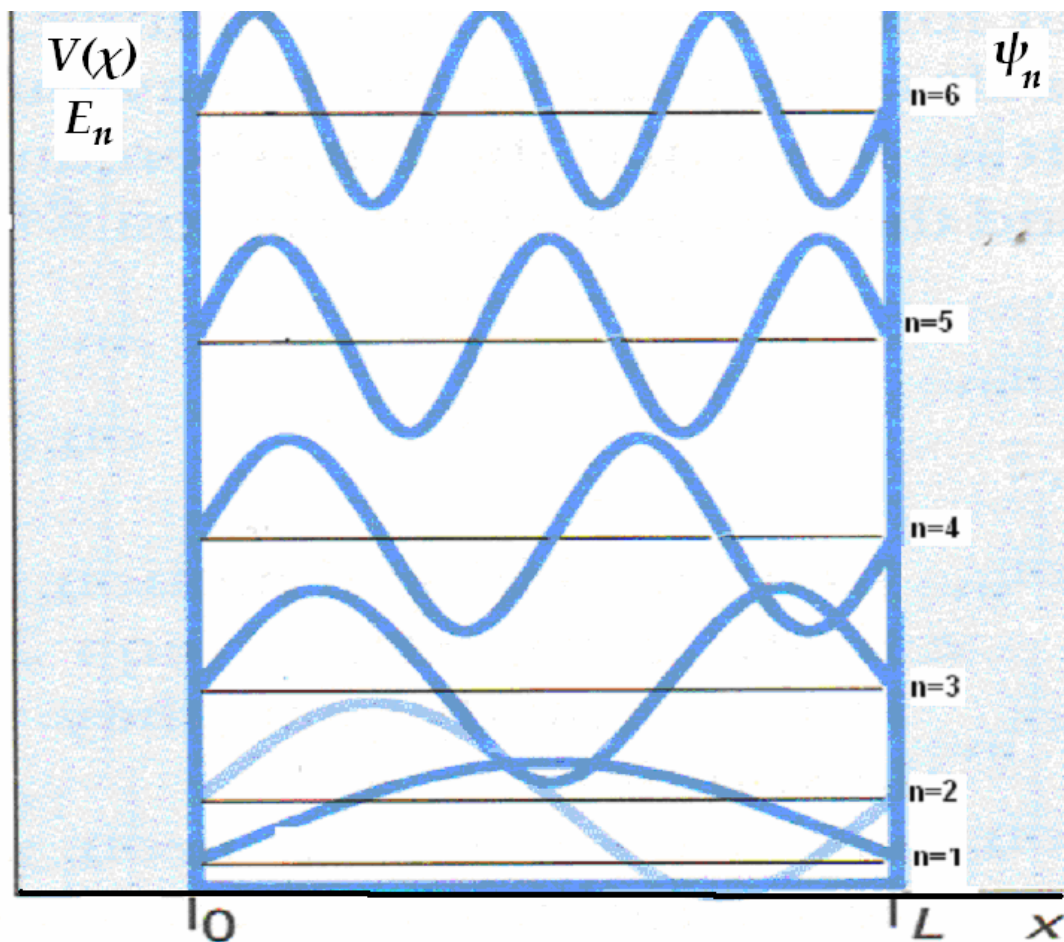
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_n(x) = E_n \psi_n(x) \quad \text{\underline{\underline{Εξίσωση ιδιοτιμών}}}, \quad (10.78).$$

Βλέπουμε δηλαδή, ότι το πρόβλημα είναι τελείως ανάλογο με το πρόβλημα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης μιας χορδής, όπως φαίνεται και από την ομοιότητα του σχήματος 10.4 με το σχήμα 10.7, το οποίο απεικονίζει με συμπαγή τρόπο τις έξι πρώτες λύσεις (ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις) .

Υπό κανονικές συνθήκες (εάν δεν υπάρχει κάτι που να το «διαταράσσει») το σωματίο βρίσκεται στην χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση, $n=1$, η οποία ονομάζεται και θεμελιώδης ή βασική κατάσταση.

Περισσότερα, όμως για αυτό θέμα, με περισσότερα παραδείγματα σε μονοδιάστατα προβλήματα και επέκταση σε 2 και τρεις διαστάσεις θα δούμε σε επόμενο τόμο.

Δραστηριότητα 10.1 Επιβεβαιώστε ότι οι κυματοσυναρτήσεις του σχήματος 10.7 ικανοποιούν όλες τις αναγκαίες απαιτήσεις (περιορισμούς) Ποιες είναι αυτές;



Σχήμα 10.7

Οι έξι πρώτες ιδιοτιμές (ενέργειες) και ιδιοσυναρτήσεις σε συμπαγή μορφή, ενός σώματος μέσα σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού

Με κοινό άξονα x , έχουμε σχεδιάσει το δυναμικό $V(x)$ και τις ενέργειες E_n , θεωρώντας τον άξονα y ως άξονα ενέργειας. Ο ίδιος άξονας, θεωρούμε ότι περιγράφει και τις ιδιοσυναρτήσεις (κυματοσυναρτήσεις), για τις οποίες όμως, χρησιμοποιούμε ως άξονα x την αντίστοιχη ενεργειακή στάθμη.

Απαντήσεις στις Ερωτήσεις

10.1 Όταν ρ και T είναι σταθερές ($\rho(x)=\rho_0$ και $T(x)=T_0$), όπως είναι εύκολο να επαληθεύσουμε.

10.2 Μια «συνηθισμένη» κυματική εξίσωση μπορεί να δέχεται ως λύσεις απλά (όχι γενικευμένα) επίπεδα κύματα, με πραγματικό κυματαριθμό, υπό τέτοιες προϋποθέσεις (σχέσεις διασποράς) ώστε η ταχύτητα ω/k να προκύψει μη σταθερή (διασπορά), σε αντίθεση με την χαρακτηριστική κυματική εξίσωση. Επίσης, μια ομάδα συνηθισμένων κυμάτων μπορεί να αλλάζει σχήμα καθώς διαδίδεται, ενώ το σχήμα μιας ομάδας χαρακτηριστικών κυμάτων παραμένει (εξ ορισμού) αμετάβλητο.