Κλασική Ηλεκτροδυναμική

Ενότητα 6: Εξίσωση Laplace σε πολικές συντεταγμένες

Ανδρέας Τερζής

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να θέσει την εξίσωση Laplace σε πολικές συντεταγμένες και να δώσει την αντίστοιχη λύση.

Περιεχόμενα ενότητας

- Εξίσωση Laplace σε πολικές συντεταγμένες
- Λύση της Laplace
- Πρόβλημα: Κύλινδρος απείρου μήκους

Συσχέτιση πολικών και καρτεσιανών συντεταγμένων

- Οι σχέσεις που συνδέουν τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) με τις πολικές (r, φ) είναι

$x = rcos\varphi, y = rsin\varphi$ με $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$.

Επίσης, $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = tan^{-1}\frac{y}{x}$.

- Για το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{e}_r$ των πολικών συντεταγμένων έχουμε

$$\hat{e}_r = \hat{x}\frac{\partial r}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{x} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{y} =$$

$$\frac{x}{r}\hat{x} + \frac{y}{r}\hat{y} = cos\varphi\hat{x} + sin\varphi\hat{y}.$$

- Ομοίως εξάγουμε το αποτέλεσμα για το $\hat{e}_\varphi$. Δηλ.

$$\hat{e}_\varphi = \hat{x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{sin\varphi}{r}\hat{x} + \frac{cos\varphi}{r}\hat{y}.$$

Λαπλασιανή

- Η λαπλασιανή σε καρτεσιανές είναι

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

- Έχουμε ότι $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\ \frac{\partial}{\partial \varphi} = cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}$.
- Με βάση την παραπάνω σχέση υπολογίζουμε τον όρο $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Η ίδια διαδικασία ακολουθείται για τον όρο $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$.
- Μετά από πράξεις καταλήγουμε στην λαπλασιανή σε πολικές συντεταγμένες:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Μέθοδος χωριζομένων μεταβλητών

- Εφαρμόζουμε την μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών και γράφουμε την λύση ως
$$\Phi(\mathrm{r},\varphi) = \mathrm{R}(\mathrm{r})\mathrm{Q}(\varphi).$$
- Θέτοντας με μια σταθερά ν^2 το ακτινικό κομμάτι και με $-\nu^2$ το γωνιακό παίρνουμε τις εξισώσεις

$$r\frac{d}{dr}\left[r\frac{\partial R}{\partial r}\right] - \nu^2 R = 0 \text{ και } \frac{\partial^2 Q}{\partial^2 \varphi} + \nu^2 Q = 0.$$

Λύσεις

- Έχουμε δύο περιπτώσεις γενικών λύσεων:

1) για $\nu = 0$, 2)για $\nu \neq 0$.

1. Για $\nu = 0$ οι λύσεις είναι

$R(r) = a_0 + b_0 lnr$ και $Q(\varphi) = c_0 + d_o\varphi$.

2. Για $\nu \neq 0$ οι λύσεις είναι

$R(r) = A_\nu r^\nu + \mathrm{B}_\nu r^{-\nu}$ και

$Q(\varphi) = \mathrm{C}_\nu sin\nu\varphi + \mathrm{D}_\nu cos\nu\varphi$.

- Οι γωνιακές λύσεις πρέπει να παρουσιάζουν περιοδικότητα δηλαδή το δυναμικό σ' ένα πρόβλημα πρέπει να είναι το ίδιο στις γωνίες φ και $\varphi + 2\pi$.
- Για να ισχύει η συνθήκη $Q(\varphi) = Q(\varphi + 2\pi)$ στη πρώτη περίπτωση θα πρέπει $d_o = 0$ και άρα $Q(\varphi) = c_0$.

Γενική λύση

- Για να ισχύει η συνθήκη $Q(\varphi) = Q(\varphi + 2\pi)$ στην δεύτερη περίπτωση θα πρέπει

$$\mathrm{C}_\nu sin\nu\varphi + \mathrm{D}_\nu cos\nu\varphi = \mathrm{C}_\nu sin\nu(\varphi + 2\pi) + \mathrm{D}_\nu cos\nu(\varphi + 2\pi),$$

δηλ. το ν πρέπει να είναι ακέραιος.

- Άρα γράφουμε την γενική λύση ως

$$\Phi(\mathrm{r}, \varphi) = a_0 + b_0 lnr + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\mathrm{C}_\nu sin\nu\varphi + \mathrm{D}_\nu cos\nu\varphi)\left(A_\nu r^\nu + \mathrm{B}_\nu r^{-\nu}\right)$$

Πρόβλημα-Κύλινδρος απείρου μήκους

- Θεωρούμε κύλινδρο απείρου μήκους και ακτίνας α. Στην παράπλευρη επιφάνειά του έχουμε δυναμικό $V(\varphi)$. Ψάχνουμε το δυναμικό στο εσωτερικό του κυλίνδρου, δηλ. το $\Phi(\mathrm{r} \leq a, \varphi)$.
- Επειδή είναι απείρου μήκους το πρόβλημα ανάγεται σε διδιάστατο.
- Είπαμε ότι η γενική λύση της Laplace είναι

$$\Phi(\mathrm{r}, \varphi) = a_0 + b_0 lnr + \sum_{\nu=1}^{\infty} (\mathrm{C}_\nu sin\nu\varphi + \mathrm{D}_\nu cos\nu\varphi)(A_\nu r^\nu + \mathrm{B}_\nu r^{-\nu}).$$

- Εφαρμόζουμε τις συνοριακές συνθήκες. Εντός του κυλίνδρου δεν επιθυμούμε απειρισμό του δυναμικού, δηλ. θα πρέπει

$b_0 = 0, B_\nu = 0$, για $r \to 0$.

Ορθογωνιότητα

- Ενσωματώνοντας την σταθερά α_0 στο άθροισμα η λύση για το δυναμικό γίνεται

$$\Phi(\mathrm{r},\varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(\mathrm{E}_{\nu} sin\nu\varphi + F_{\nu} cos\nu\varphi) r^{\nu}.$$

- Εφαρμόζουμε την συνοριακή συνθήκη $\Phi(\mathrm{r}=\alpha,\varphi) = \mathrm{V}(\varphi)$.
- Άρα $\mathrm{V}(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(\mathrm{E}_{\nu} sin\nu\varphi + F_{\nu} cos\nu\varphi)\alpha^{\nu}$.
- Θα κάνουμε χρήση των σχέσεων ορθογωνιότητας

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} sinm\varphi\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} sin\nu\varphi\right) d\varphi = \delta_{m\nu},$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} cosm\varphi\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} cos\nu\varphi\right) d\varphi = \delta_{m\nu}$$

- Ακόμη ισχύει η σχέση $\int_0^{2\pi} sin\nu\varphi cosm\varphi = 0$.

Εύρεση συντελεστών

- Λαμβάνοντας υπ' όψη τα παραπάνω έχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}\mathrm{V}(\varphi)cosm\varphi d\varphi = \sqrt{\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}F_\nu\frac{1}{\sqrt{\pi}}cos\nu\varphi\frac{1}{\sqrt{\pi}}cosm\varphi\alpha^\nu.$$

Επομένως

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}\mathrm{V}(\varphi)cosm\varphi d\varphi = F_\nu\sqrt{\pi}\alpha^\nu\delta_{\nu m} \Longrightarrow$$

$$F_m = \frac{1}{\pi\alpha^m}\int_0^{2\pi}\mathrm{V}(\varphi)cosm\varphi d\varphi\,.$$

- Ομοίως βρίσκουμε και τον συντελεστή E_ν.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης