



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Κλασική Ηλεκτροδυναμική

Ενότητα 6: Εξίσωση Laplace σε πολικές
συντεταγμένες

Ανδρέας Τερζής
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να θέσει την εξίσωση Laplace σε πολικές συντεταγμένες και να δώσει την αντίστοιχη λύση.

Περιεχόμενα ενότητας

- Εξίσωση Laplace σε πολικές συντεταγμένες
- Λύση της Laplace
- Πρόβλημα: Κύλινδρος απείρου μήκους

Συσχέτιση πολικών και καρτεσιανών συντεταγμένων

- Οι σχέσεις που συνδέουν τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) με τις πολικές (r, φ) είναι

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi \text{ με } \vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y}.$$

$$\text{Επίσης, } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}.$$

- Για το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{e}_r των πολικών συντεταγμένων έχουμε

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \hat{x} \frac{\partial r}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{x} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{y} = \\ &= \frac{x}{r} \hat{x} + \frac{y}{r} \hat{y} = \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y}. \end{aligned}$$

- Ομοίως εξάγουμε το αποτέλεσμα για το \hat{e}_φ . Δηλ.

$$\hat{e}_\varphi = \hat{x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\sin \varphi}{r} \hat{x} + \frac{\cos \varphi}{r} \hat{y}.$$



Λαπλασιανή

- Η λαπλασιανή σε καρτεσιανές είναι

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

- Έχουμε ότι $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$.
- Με βάση την παραπάνω σχέση υπολογίζουμε τον όρο $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Η ίδια διαδικασία ακολουθείται για τον όρο $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$.
- Μετά από πράξεις καταλήγουμε στην λαπλασιανή σε πολικές συντεταγμένες:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$



Μέθοδος χωριζομένων μεταβλητών

- Εφαρμόζουμε την μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών και γράφουμε την λύση ως

$$\Phi(r, \varphi) = R(r)Q(\varphi).$$

- Θέτοντας με μια σταθερά ν^2 το ακτινικό κομμάτι και με $-\nu^2$ το γωνιακό παίρνουμε τις εξισώσεις

$$r \frac{d}{dr} \left[r \frac{\partial R}{\partial r} \right] - \nu^2 R = 0 \text{ και } \frac{\partial^2 Q}{\partial^2 \varphi} + \nu^2 Q = 0.$$



Λύσεις

- Έχουμε δύο περιπτώσεις γενικών λύσεων:

1) για $\nu = 0$, 2) για $\nu \neq 0$.

1. Για $\nu = 0$ οι λύσεις είναι

$$R(r) = a_0 + b_0 \ln r \text{ και } Q(\varphi) = c_0 + d_0 \varphi.$$

2. Για $\nu \neq 0$ οι λύσεις είναι

$$R(r) = A_\nu r^\nu + B_\nu r^{-\nu} \text{ και}$$

$$Q(\varphi) = C_\nu \sin \nu \varphi + D_\nu \cos \nu \varphi.$$

- Οι γωνιακές λύσεις πρέπει να παρουσιάζουν περιοδικότητα δηλαδή το δυναμικό σ' ένα πρόβλημα πρέπει να είναι το ίδιο στις γωνίες φ και $\varphi + 2\pi$.
- Για να ισχύει η συνθήκη $Q(\varphi) = Q(\varphi + 2\pi)$ στη πρώτη περίπτωση θα πρέπει $d_0 = 0$ και άρα $Q(\varphi) = c_0$.



Γενική λύση

- Για να ισχύει η συνθήκη $Q(\varphi) = Q(\varphi + 2\pi)$ στην δεύτερη περίπτωση θα πρέπει
 $C_\nu \sin \nu \varphi + D_\nu \cos \nu \varphi = C_\nu \sin \nu(\varphi + 2\pi) + D_\nu \cos \nu(\varphi + 2\pi),$

δηλ. το ν πρέπει να είναι ακέραιος.

- Άρα γράφουμε την γενική λύση ως

$$\Phi(r, \varphi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{\nu=1}^{\infty} (C_\nu \sin \nu \varphi + D_\nu \cos \nu \varphi)(A_\nu r^\nu + B_\nu r^{-\nu})$$



Πρόβλημα-Κύλινδρος απείρου μήκους

- Θεωρούμε κύλινδρο απείρου μήκους και ακτίνας a . Στην παράπλευρη επιφάνειά του έχουμε δυναμικό $V(\varphi)$. Ψάχνουμε το δυναμικό στο εσωτερικό του κυλίνδρου, δηλ. το $\Phi(r \leq a, \varphi)$.
- Επειδή είναι απείρου μήκους το πρόβλημα ανάγεται σε διδιάστατο.
- Είπαμε ότι η γενική λύση της Laplace είναι

$$\Phi(r, \varphi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{\nu=1}^{\infty} (C_{\nu} \sin \nu \varphi + D_{\nu} \cos \nu \varphi)(A_{\nu} r^{\nu} + B_{\nu} r^{-\nu}).$$

- Εφαρμόζουμε τις συνοριακές συνθήκες. Εντός του κυλίνδρου δεν επιθυμούμε απειρισμό του δυναμικού, δηλ. θα πρέπει

$$b_0 = 0, B_{\nu} = 0, \text{ για } r \rightarrow 0.$$



Ορθογωνιότητα

- Ενσωματώνοντας την σταθερά α_0 στο άθροισμα η λύση για το δυναμικό γίνεται

$$\Phi(r, \varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (E_{\nu} \sin \nu \varphi + F_{\nu} \cos \nu \varphi) r^{\nu}.$$

- Εφαρμόζουμε την συνοριακή συνθήκη $\Phi(r = \alpha, \varphi) = V(\varphi)$.
- Άρα $V(\varphi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (E_{\nu} \sin \nu \varphi + F_{\nu} \cos \nu \varphi) \alpha^{\nu}$.

- Θα κάνουμε χρήση των σχέσεων ορθογωνιότητας

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin m \varphi \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin n \varphi \right) d\varphi = \delta_{mn},$$
$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos m \varphi \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos n \varphi \right) d\varphi = \delta_{mn}$$

- Ακόμη ισχύει η σχέση $\int_0^{2\pi} \sin \nu \varphi \cos m \varphi = 0$.



Εύρεση συντελεστών

- Λαμβάνοντας υπ' όψη τα παραπάνω έχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} V(\varphi) \cos m\varphi d\varphi = \sqrt{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} F_{\nu} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos \nu\varphi \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos m\varphi \alpha^{\nu}.$$

Επομένως

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} V(\varphi) \cos m\varphi d\varphi = F_{\nu} \sqrt{\pi} \alpha^{\nu} \delta_{\nu m} \Rightarrow$$
$$F_m = \frac{1}{\pi \alpha^m} \int_0^{2\pi} V(\varphi) \cos m\varphi d\varphi .$$

- Ομοίως βρίσκουμε και τον συντελεστή E_{ν} .



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, **Ανδρέας Τερζής**. Ανδρέας Τερζής «**Κλασική Ηλεκτροδυναμική. Εξίσωση Laplace σε πολικές συντεταγμένες**». Έκδοση: **1.0**. Πάτρα **2015**. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:
<https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1958/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.