Κλασική Ηλεκτροδυναμική

Ενότητα 5: Εξίσωση Laplace σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Ανδρέας Τερζής

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να παρουσιάσει τον τρόπο χειρισμού της εξίσωσης Laplace για το δυναμικό, μέσω μιας σειράς παραδειγμάτων.

Περιεχόμενα ενότητας

- Τρισδιάστατο πρόβλημα (Ορθογώνιο κουτί)
- Διδιάστατο πρόβλημα

Εξίσωση Laplace-Γενική σκιαγράφηση

- Η εξίσωση Laplace είναι $\nabla^2\Phi = 0$. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0.$$
- Χρησιμοποιούμε την μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών και γράφουμε την λύση ως
$$\Phi(\mathrm{x,y,z}) = \mathrm{X(x)Y(y)Z(z)}.$$
- Αντικαθιστούμε την λύση στην εξίσωση και έχουμε
$$\mathrm{Y(y)Z(z)}\frac{\partial^2\mathrm{X}(x)}{\partial x^2} + \mathrm{X(x)Z(z)}\frac{\partial^2\mathrm{Y}(y)}{\partial y^2} + \mathrm{X(x)Y(y)}\frac{\partial^2\mathrm{Z}(z)}{\partial z^2} = 0.$$
- Διαιρούμε με $\Phi(\mathrm{x,y,z})$ οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται
$$\frac{1}{\mathrm{X(x)}}\frac{\partial^2\mathrm{X}(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2\mathrm{Y}(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2\mathrm{Z}(z)}{\partial z^2} = 0$$

Τελικές εξισώσεις με τις λύσεις

- Θέτουμε κάθε όρο της τελευταίας σχέσης ίσο με μια σταθερά (αυτή είναι η απαίτηση για να ισχύει η τελευταία ισότητα):

$$\frac{1}{\mathrm{X(x)}}\frac{\partial^2 \mathrm{X}(x)}{\partial x^2} = -\alpha^2, \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 \mathrm{Y}(y)}{\partial y^2} = -\beta^2, \frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 \mathrm{Z}(z)}{\partial z^2} = \gamma^2$$

με $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$.

- Οι εξισώσεις προς επίλυση είναι λοιπόν

1. $\mathrm{X}''(\mathrm{x}) + a^2 X(x) = 0$
2. $Y''(y) + \beta^2 \mathrm{Y}(\mathrm{y}) = 0$
3. $Z''(\mathrm{z}) - \gamma^2 \mathrm{Z}(\mathrm{z}) = 0$

- Οι αντίστοιχες λύσεις είναι

1. $X(x) = Asinax + Bcosax$
2. $Y(y) = Csin\beta y + Dcos\beta y$
3. $Z(z) = Esinh\gamma z + Fcosh\gamma z$

Τελική λύση για το δυναμικό

- Η γενική λύση για το δυναμικό είναι

$$\Phi(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = (Asinax + Bcosax)(Csin\beta y + Dcos\beta y)(Esinh\gamma z + Fcosh\gamma z)$$

- Οι συντελεστές προσδιορίζονται ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες.

Πρόβλημα-ορθογώνιο κουτί

- Έστω ένα ορθογώνιο κουτί που οι πλευρές του εκτείνονται από 0 έως a για τον άξονα x, από 0 έως b για τον άξονα y, από 0 έως c για τον άξονα z. Οι πλευρές του είναι γειωμένες εκτός από την πάνω πλευρά (που εκτείνεται στο επίπεδο xy) που έχει δυναμικό $V(x, y)$. Να προσδιοριστεί το δυναμικό στον χώρο.

Επίλυση-Συνοριακές συνθήκες

- Η λύση της Laplace βρήκαμε ότι είναι

$$\Phi(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = (Asinax + Bcosax)(Csin\beta y + Dcos\beta y)(Esinh\gamma z + Fcosh\gamma z)$$

- Για να προσδιορίσουμε τους συντελεστές είπαμε ότι εφαρμόζουμε τις εκάστοτε συνοριακές συνθήκες.

➢ Για $x = 0, \mathrm{X}(\mathrm{x}) = 0 \Longrightarrow Asina0 + Bcos0 = 0 \Rightarrow B = 0.$

➢ Για $y = 0, Y(y) = 0 \Longrightarrow Csin\beta 0 + Dcos\beta 0 = 0 \Rightarrow D = 0.$

➢ Για $z = 0, Z(z) = 0 \Longrightarrow Esinh\gamma 0 + Fcosh\gamma 0 = 0 \Longrightarrow F = 0.$

➢ Για $x = \mathrm{a}, X(\mathrm{a}) = 0 \Longrightarrow Asina\mathrm{a} = 0 \Longrightarrow a_n = \frac{n\pi}{\mathrm{a}}.$

➢ Για $y = b, Y(b) = 0 \Longrightarrow Csin\beta b = 0 \Longrightarrow \beta b = m\pi \Longrightarrow \beta_m = \frac{m\pi}{b}.$

Έχουμε $n, m = 1{,}2{,}3$ και ${\gamma_{n,m}}^2 = \pi^2\left(\frac{n^2}{\mathrm{a}^2} + \frac{m^2}{b^2}\right).$

Συνοριακή συνθήκη $z = c$.

- Η λύση για το δυναμικό γίνεται τώρα

$$\Phi(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = A sin\alpha_n x\; C sin\beta_m y\; E sinh\gamma_{nm} z \Longrightarrow$$

$$\Phi(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = \sum_{n,m} W_{nm} sin\left(\frac{n\pi x}{\mathrm{a}}\right) sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) sinh\gamma_{nm} z$$

- Εφαρμόζοντας την τελευταία συνοριακή συνθήκη έχουμε

➢ Για $z = c$ έχουμε $\Phi(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}=\mathrm{c}) = \mathrm{V}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \Longrightarrow$

$$\sum_{n,m} W_{nm} sin\left(\frac{n\pi x}{\mathrm{a}}\right) sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) sinh\gamma_{nm} c = V(x,y).$$

Ορθογωνιότητα

- Οι συναρτήσεις $\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$, $\cos(\frac{n\pi x}{a})$ είναι ορθοκανονικές.
- Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τις ιδιοσυναρτήσεις του απειρόβαθου πηγαδιού πάχους L βλέπουμε απ' ευθείας ότι για

$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{L}}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, ισχύει η σχέση ορθογωνιότητας

$$\int_0^{\mathrm{L}} \Psi_m{}^*(x)\Psi_n(x)dx = \delta_{nm}$$

- Θα κάνουμε χρήση της παραπάνω σχέσης ορθογωνιότητας, για να προχωρήσουμε.

Εύρεση του συντελεστή W_{nm}.

- Θα έχουμε

$$V(x,y)\left[\sqrt{\frac{2}{\mathrm{a}}}\sin\left(\frac{n'\pi x}{\mathrm{a}}\right)\right]\left[\sqrt{\frac{2}{\mathrm{b}}}\sin\left(\frac{m'\pi y}{b}\right)\right]=$$

$$\sum_{n,m}W_{nm}\sqrt{\frac{\mathrm{a}}{2}}\sqrt{\frac{b}{2}}\left[\sqrt{\frac{2}{\mathrm{a}}}\sin\left(\frac{n'\pi x}{\mathrm{a}}\right)\right]\left[\sqrt{\frac{2}{\mathrm{b}}}\sin\left(\frac{m'\pi y}{b}\right)\right]\left[\sqrt{\frac{2}{\mathrm{a}}}\sin\left(\frac{n\pi x}{\mathrm{a}}\right)\right]\left[\sqrt{\frac{2}{\mathrm{b}}}\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\right]$$

$$(sinh\gamma_{nm}c)\Rightarrow$$

$$V(x,y)\Psi_{n'}(x)\Psi_{m'}(y)=\sqrt{\frac{\mathrm{a}}{2}}\sqrt{\frac{b}{2}}\sum_{n,m}W_{nm}\Psi_{n'}(x)\Psi_{n}(x)\Psi_{m'}(y)\Psi_{m}(x)(sinh\gamma_{nm}c)\Rightarrow$$

$$\int_0^{\mathrm{a}}\int_0^{b}V(x,y)\Psi_{n'}(x)\Psi_{m'}(y)dxdy=\sqrt{\frac{ab}{4}}\sum_{n,m}W_{nm}\delta_{nn'}\delta_{mm'}(sinh\gamma_{nm}c)$$

Τελική έκφραση

- Συνεχίζουμε και έχουμε για $n = n', m = m'$

$$\int_0^{a}\int_0^{b} V(x,y)\Psi_{n'}(x)\Psi_{m'}(y)dxdy = \sqrt{\frac{ab}{4}}W_{n'm'}\sinh(\gamma_{n'm'}c) \Longrightarrow$$

$$W_{nm} = \frac{4}{absinh(\gamma_{nm}c)}\int_0^{a}dx\int_0^{b}dy\, V(x,y)sin(a_n x)sin(\beta_m y)$$

Παρατήρηση: Αν αντί για την «επάνω» επιφάνεια, είχαμε στην «κάτω» επιφάνεια μη μηδενικό δυναμικό ως συνοριακή συνθήκη, τότε

$$\mathrm{Z(z)} = Esinh\gamma_{nm}(z-c)$$

Σκιαγράφηση μεθόδου Fourier (I)

- Το δυναμικό μπορούμε να το υπολογίσουμε και με την κλασική μέθοδο Fourier. Θα θυμίσουμε σύντομα κάποια γενικά στοιχεία της μεθόδου.
- Γενικά μια συνάρτηση $f(x)$ αναπτύσσεται στο διάστημα $(-\mathrm{L}, \mathrm{L})$ ως $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[C_n cosAx + D_n sinBx]$. Η $f(x)$ πρέπει να είναι περιοδική, δηλ. $f(x) = f(x + 2L)$. Άρα θα πρέπει
$$cosAx = \cos A(x + 2L)\,, sinBx = \sin B(x + 2L)\,.$$

Από τις παραπάνω τριγωνομετρικές εξισώσεις έχουμε ότι $\mathrm{A} = \frac{n\pi}{L}$,

$B = \frac{n\pi}{L}$. Επομένως $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n cos\frac{n\pi}{L}x + D_n sin\frac{n\pi}{L}x\right]$. (1)

Σκιαγράφηση μεθόδου Fourier (II)

- Οι συντελεστές δίνονται από τις σχέσεις

$$\mathrm{C}_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos\frac{n\pi x}{L}dx, \mathrm{D}_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

- Να θυμίσουμε ότι η μορφή των συντελεστών C_n (D_n) βρίσκεται αν πολλαπλασιάσουμε με $cos\frac{m\pi x}{L}(sin\frac{m\pi x}{L})$ την (1) και την ολοκληρώσουμε στο διάστημα $(-L, L)$.

- Αν το διάστημά μας δεν είναι πεπερασμένο, δηλ. $L \to \infty$, τότε

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{A}(k)e^{ikx}dk$ με $\mathrm{A}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ikx}dx.$

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{A}(k)e^{ikx}dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\, e^{-ikx'}dx'\right] =$
$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{ik(x-x')}\, dkdx'$

- Για να ισχύει η παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι θα πρέπει

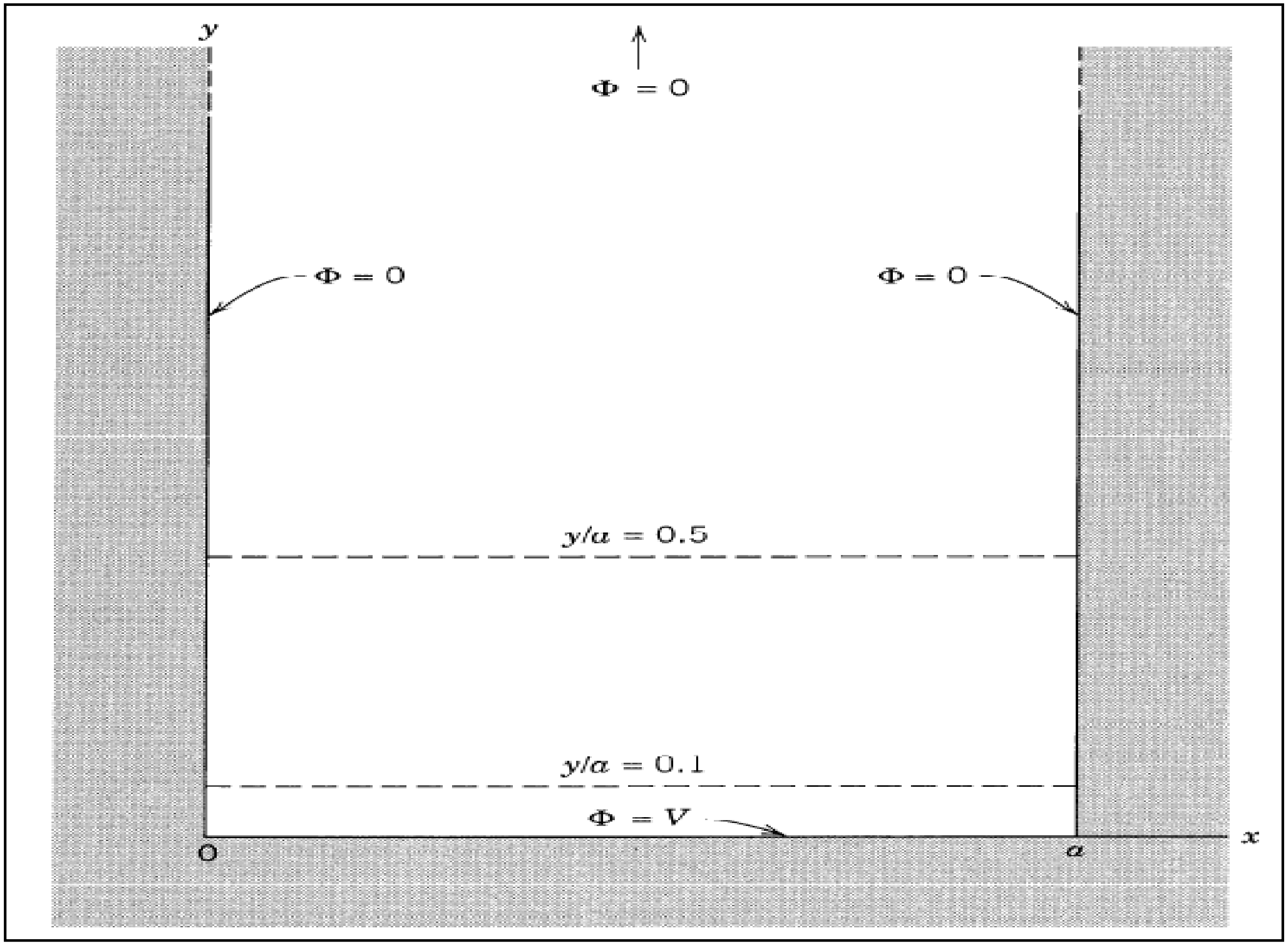
$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')}\, dk.$$

Πρόβλημα δύο διαστάσεων-Συνοριακές συνθήκες

- Με τον όρο «διδιάστατο πρόβλημα» εννοούμε εκείνο το πρόβλημα στο οποίο το δυναμικό μπορεί να υποτεθεί ανεξάρτητο από μια από τις συντεταγμένες, έστω την z.
- Θεωρούμε το διδιάστατο πρόβλημα της παρακάτω εικόνας.
- Οι συνοριακές συνθήκες είναι

1. $\Phi(\mathrm{x}=0,\mathrm{y})=0$
2. $\Phi(\mathrm{x}=\alpha,\mathrm{y})=0$
3. $\Phi(\mathrm{x},\mathrm{y}=0)=\mathrm{V}$, για $0\leq x\leq a$
4. $\Phi(\mathrm{x},\mathrm{y}\to\infty)=0$

Διδιάστατο πρόβλημα (Εικόνα 1)



Εξίσωση Laplace και εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών

- Η εξίσωση Laplace σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι
$$\nabla^2\Phi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0 \Longrightarrow \left(\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial y^2}\right) = 0.$$
- Η γενική λύση είναι της μορφής $\Phi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{X}(\mathrm{x})\mathrm{Y}(\mathrm{y})$ και με την Μ.Χ.Μ. καταλήγουμε στις εξισώσεις
$$\mathrm{X}'' + k^2X = 0,\ \ Y'' - k^2Y = 0.$$
- Η γενική λύση των εξισώσεων είναι
$$\mathrm{X}(\mathrm{x}) = \mathrm{Asinkx} + \mathrm{Bcoskx}, \qquad \mathrm{Y}(\mathrm{y}) = \mathrm{C}e^{ky} + De^{-ky}$$
- Από την πρώτη συνοριακή συνθήκη συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{B} = 0$. Από την τέταρτη συμπεραίνουμε ότι $C = 0$. Από την τρίτη συνοριακή συνθήκη $\mathrm{Asink\alpha} = \mathrm{n\pi} \Longrightarrow k_n = \frac{n\pi}{\alpha}, n = 1,2,3..$
- Άρα η γενική λύση είναι $\Phi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{\frac{-n\pi y}{a}}$.

Ορθογωνιότητα

- Οι συντελεστές A_n υπολογίζονται από την συνθήκη 3. Δηλαδή
- $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a}{2}} A_n \left\{ \int_0^a \left[\sqrt{\frac{2}{a}} sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right] \left[\sqrt{\frac{2}{a}} sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx \right] \right\} = V \int_0^a sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{a}{2}} A_n \delta_{nm} = V \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \Rightarrow A_n = \frac{4V}{n\pi}$, όταν ο n είναι περιττός.

- Άρα η λύση του δυναμικού γράφεται

$$\Phi(\mathrm{x,y}) = \frac{4\mathrm{V}}{\pi} \sum_{n \to odd} \frac{1}{n} sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-n\pi y/a}$$

Επιπλέον πράξεις (I)

- $\sum_{n\to odd}\frac{1}{n}sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)e^{-n\pi y/a} = \sum_{n\to odd}\frac{1}{n}\left\{Im\left[e^{\frac{in\pi x}{a}}\right]\right\}e^{-n\pi y/a} =$

$$Im\left[\sum_{n\to odd}\frac{1}{n}e^{\frac{in\pi}{\alpha}(x+iy)}\right]$$

- Θέτουμε $Z = e^{\frac{i\pi}{\alpha}(x+iy)}$ οπότε

$$\sum_{n\to odd}\frac{1}{n}sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)e^{-n\pi y/a} = \mathrm{Im}\left[\sum_{n\to odd}\frac{1}{n}Z^n\right]$$

Επιπλέον πράξεις (ΙΙ)

- Γνωρίζουμε τα αναπτύγματα Taylor

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ..$ και

$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$. Για να έχουμε μόνο τα περιττά n, αφαιρούμε κατά μέλη και έχουμε:

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)$$

$$\Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \left(x + \frac{x^3}{3} + ..\right)$$

- Άρα $\sum_{n\to odd} \frac{1}{n} Z^n = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$

Επιπλέον πράξεις (III)

- Θέτουμε $w = \frac{1+z}{1-z}$. Ισχύει ότι

$$w = \frac{(1+z)(1-z^*)}{(1-z)(1-z^*)} = \frac{1-|z|^2+2iIm[z]}{|1-z|^2}$$

- Ακόμη γενικά $w = |w|e^{i\varphi} \Longrightarrow lnw = ln|w| + i\varphi \Longrightarrow$ $\mathrm{Im}[\mathrm{lnw}] = \varphi$, με $\varphi = tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$, αν $w = a + i\beta$.

- Άρα $Im\left[\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right] = \frac{1}{2}tan^{-1}\left\{\frac{Im\left[\frac{z+1}{1-z}\right]}{Re\left[\frac{z+1}{1-z}\right]}\right\} = \frac{1}{2}tan^{-1}\left(\frac{2Im[z]}{1-|z|^2}\right)$

με $z = e^{i\pi(x+yi)/a} = e^{-\pi y/a}\left(cos\frac{\pi x}{a} + isin\frac{\pi x}{a}\right)$

- Επομένως $Im[z] = e^{-\pi y/a}sin\frac{\pi x}{a}$ και $1-|z|^2 = 1-e^{-2\pi y/a}$

Τελική έκφραση

- $Im\left[\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right] = \frac{1}{2}tan^{-1}\frac{2e^{-\pi y/a}\sin(\pi x\backslash\alpha)}{e^{-\frac{\pi y}{a}}(e^{\frac{\pi y}{a}}-e^{\frac{-\pi y}{a}})} =$
$\frac{1}{2}tan^{-1}\left[\frac{\sin(\frac{\pi x}{a})}{sinh\left(\frac{\pi y}{a}\right)}\right]$
- Άρα καταλήγουμε ότι $\Phi(x,y) = \frac{4V}{\pi}\frac{1}{2}tan^{-1}\left[\frac{\sin(\frac{\pi x}{a})}{sinh\left(\frac{\pi y}{a}\right)}\right]$.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνα 1: David Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons, New York, 1999

Διαθέσιμο ηλεκτρονικά από https://archive.org/details/ClassicalElectrodynamics