ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά μαθήματα ΠΠ

Κλασική Ηλεκτροδυναμική

Ενότητα 4: Προβλήματα σφαιρικής γεωμετρίας

Ανδρέας Τερζής

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να θίξει κάποια προβλήματα σφαιρικής γεωμετρίας και να μεταβεί στην συνέχεια στην συνάρτηση Green για την περίπτωση της σφαίρας.

Περιεχόμενα ενότητας

- Γενικός τύπος για την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου
- Πρόβλημα σημειακού φορτίου παρουσία αγώγιμης, απομονωμένης, φορτισμένης σφαίρας-μέθοδος ειδώλων
- Αγώγιμη σφαίρα εντός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου-μέθοδος ειδώλων
- Λύση για σφαιρική επιφάνεια με χρήση θεωρήματος Green

Επιφανειακή πυκνότητα φορτίου

- Ψάχνουμε το φορτίο που επάγεται στην επίπεδη επιφάνεια της προηγούμενης ενότητας παρουσία του φορτίου q.
- Γι’ αυτόν τον σκοπό θεωρούμε κυλινδρική Gaussian επιφάνεια, τοποθετημένη κάθετα στην επιφάνεια του προβλήματος, που οι παράπλευρες πλευρές της τέμνουν την επιφάνεια.
- Έχουμε βρει για την κάθετη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου ότι $(\mathbf{E_2} - \mathbf{E_1}) \cdot \boldsymbol{n} = 4\pi\sigma \Rightarrow$

$$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{n} = 4\pi\sigma \Longrightarrow -\boldsymbol{\nabla}\Phi \cdot \boldsymbol{n} = 4\pi\sigma \Longrightarrow -\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 4\pi\sigma \Longrightarrow$$

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

- Με βάση αυτόν τον τύπο θα υπολογίζουμε την επιφανεικαή πυκνότητα φορτίου σε οποιοδήποτε πρόβλημα.

Σημειακό φορτίο παρουσία αγώγιμης σφαίρας

- Έχουμε μια σφαίρα ολικού φορτίου Q, παρουσία σημειακού φορτίου q.
- Η περίπτωση είναι ακριβώς η ίδια με αυτήν της γειωμένης σφαίρας, αλλά εκτός από το επαγόμενο φορτίο(που μπορεί να αποδειχθεί με βάση τον προηγούμενο τύπο ότι είναι το είδωλο), υπάρχει και το φορτίο $Q-q'$ (αυτό που απομένει) το οποίο κατανέμεται ομοιόμορφα πάνω στην σφαίρα.
- Άρα έχουμε τριών ειδών φορτία: το φορτίο q στην θέση $\boldsymbol{y}$, το αντίστοιχο είδωλο

q′ στην θέση $\boldsymbol{y}'$, και το φορτίο $Q-q'$.

- Το δυναμικό λοιπόν μπορεί να γραφεί ως επαλληλία των δυναμικών που προέρχονται από τα τρία φορτία

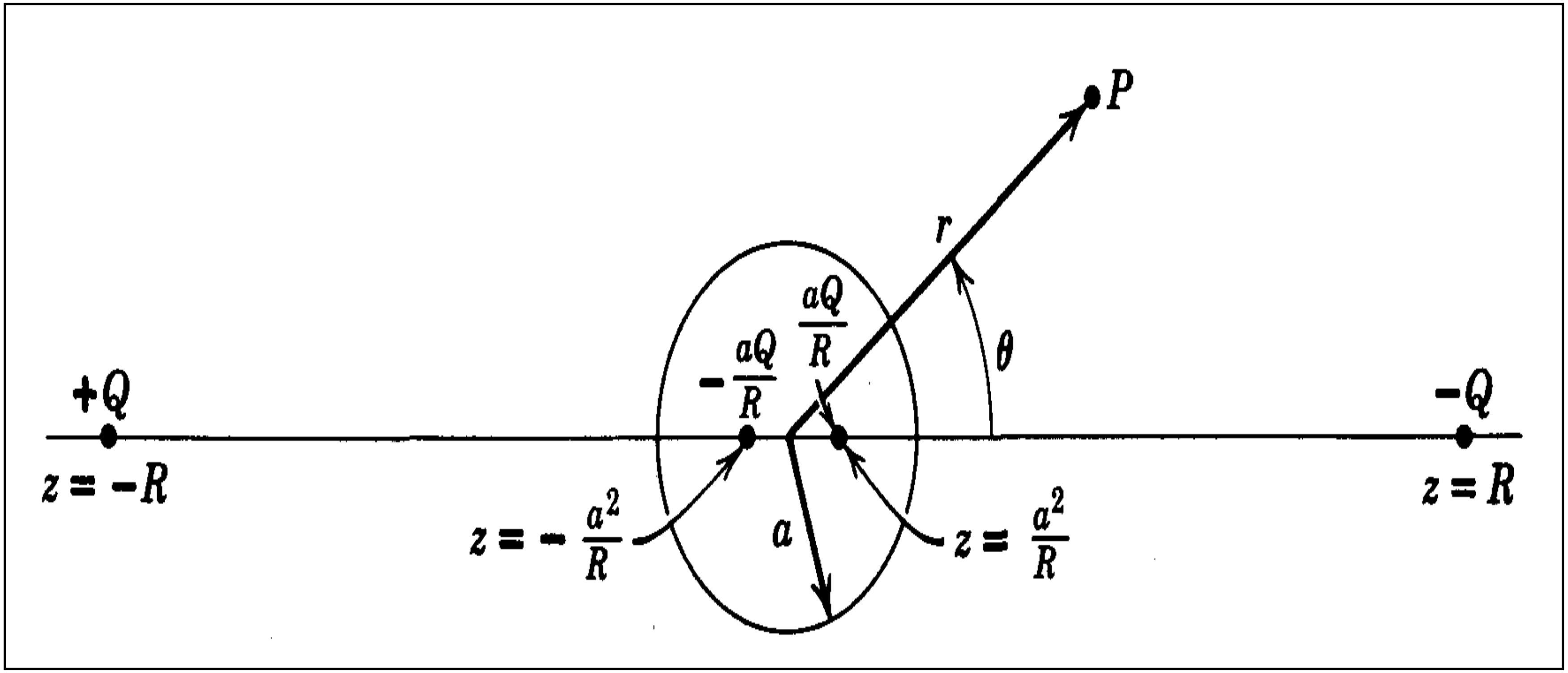
$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} - \frac{q}{\left|\frac{y}{a}\boldsymbol{x} - \frac{a}{y}\boldsymbol{y}\right|} + \frac{Q + \frac{a}{y}q}{|\boldsymbol{x}|}$$

Παρατήρηση: Το δυναμικό που προέρχεται από το φορτίο $Q-q'$ θα είναι το ίδιο, σαν το φορτίο, αντί για την επιφάνεια, να είναι τοποθετημένο στο κέντρο της σφαίρας.

Αγώγιμη σφαίρα εντός ομογενούς πεδίου-Μέθοδος ειδώλων

- Θεωρούμε μια σφαίρα ακτίνας α σε ομογενές πεδίο E_0. Το ομογενές πεδίο μπορεί να θεωρηθεί ότι παράγεται από δύο σημειακά φορτία τοποθετημένα στο άπειρο.
- Έστω ότι προέρχεται από τα φορτία $\pm Q$ που βρίσκονται στις θέσεις $z = \mp R$. Έτσι το πεδίο κοντά στην αρχή των αξόνων είναι περίπου σταθερό, δηλ. $\mathrm{E}_0 \hat{z} \cong \frac{2Q}{R^2} \hat{z}$. Αυτήν την προσέγγιση μπορούμε να την θεωρήσουμε γιατί οι αποστάσεις κοντά στην αρχή των αξόνων είναι σχετικά μικρές σε σχέση με τις $z = \mp R$.
- Αν τοποθετήσουμε λοιπόν την σφαίρα στην αρχή των αξόνων, το δυναμικό στον χώρο θα προέρχεται από τα φορτία $\pm Q$ στις θέσεις $\mp \mathrm{R}$ και τα είδωλά τους $\mp \frac{Qa}{R}$ στις θέσεις $z = \mp \frac{a^2}{R}$.
- Το σημείο που θέλουμε να υπολογίσουμε το δυναμικό είναι το τυχαίο σημείο P, που βρίσκεται σε απόσταση r από την αρχή των αξόνων, Ο. Έστω Α και Β οι θέσεις των $\pm Q$ και Α', Β' οι αντίστοιχες θέσεις των ειδώλων τους.

Αγώγιμη σφαίρα εντός ομογενούς πεδίου-Μέθοδος ειδώλων (Εικόνα 1)



Οι όροι του δυναμικού από τα φορτία $\pm Q$

- Θέλουμε λοιπόν ουσιαστικά να υπολογίσουμε το δυναμικό που προέρχεται από τέσσερα φορτία, τα $\pm Q$, q' (είδωλο του $-Q$) και q'' (είδωλο του Q).

- Για το φορτίο $+Q$ θα έχουμε $\Phi_{+Q} = \frac{+Q}{|\mathbf{AP}|}$. Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο AOP έχουμε:

$$|\mathbf{AP}|^2 = |\mathbf{AO}|^2 + |\mathbf{OP}|^2 - 2|\mathbf{AO}||\mathbf{OP}|\cos(\pi - \theta) =$$

$\mathrm{R}^2 + r^2 + 2Rrcos\theta$, όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει το OP με την ευθεία $z = 0$. Άρα

$$\Phi_{+Q}(r) = \frac{Q}{[\mathrm{R}^2+r^2+2Rrcos\theta]^{1/2}}$$

- Ομοίως για το φορτίο $-Q$ από το τρίγωνο BOP θα έχουμε

$$\Phi_{-Q}(r) = -\frac{Q}{[\mathrm{R}^2+r^2-2Rrcos\theta]^{\frac{1}{2}}}.$$

Υπολογισμός δυναμικού

- Για το q'' από το τρίγωνο Α'ΟΡ θα έχουμε

$$|\mathbf{A'P}|^2 = \frac{\alpha^4}{R^2} + r^2 + 2\frac{a^2}{\mathrm{R}} rcos\theta,$$

$$\Phi_{q''}(\boldsymbol{r}) = \frac{q''}{\left[\frac{\alpha^4}{R^2}+r^2+2\frac{a^2}{\mathrm{R}}rcos\theta\right]^{1/2}}, \text{με } q'' = -Q\frac{a}{R}.$$

- Για το q' από το τρίγωνο Β'ΟΡ έχουμε

$$|\mathbf{PB'}|^2 = \frac{\alpha^4}{R^2} + r^2 - 2\frac{a^2}{\mathrm{R}} rcos\theta,$$

$$\Phi_{q'}(\boldsymbol{r}) = \frac{q'}{\left[\frac{\alpha^4}{R^2}+r^2-2\frac{a^2}{\mathrm{R}}rcos\theta\right]^{1/2}}, \text{με } q' = Q\frac{a}{R}$$

Πράξεις στους δύο πρώτους όρους

- Θα έχουμε

$$\Phi_{+Q}(r) + \Phi_{-Q}(r) = \frac{Q}{[\mathrm{R}^2 + r^2 + 2Rr\cos\theta]^{1/2}} - \frac{Q}{[\mathrm{R}^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{Q}{R}\left[\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{R}\right)\cos\theta\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{R}\right)\cos\theta\right)^{1/2}}\right]$$

- Οι όροι $\left(\frac{r}{R}\right)^2$ φθίνουν πιο γρήγορα από τους όρους $\left(\frac{r}{R}\right)$ καθώς $R \to \infty$ και γι’ αυτόν τον λόγο τους παραλείπουμε.

Τελική έκφραση

- $\Phi_{+Q}(r) + \Phi_{-Q}(r) = \frac{Q}{R}\left[\frac{1}{\left(1+2\left(\frac{r}{R}\right)cos\theta\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(1-2\left(\frac{r}{R}\right)cos\theta\right)^{1/2}}\right]$
- Ισχύει ότι $(1+x)^a \cong 1 + ax,$

$(1-x)^a = 1 - ax, x \to 0$

- Επειδή $\frac{r}{R} \to 0$ μπορούμε να κάνουμε χρήση των παραπάνω σχέσεων και έχουμε

$$\left(1 + 2\left(\frac{r}{R}\right)cos\theta\right)^{-1/2} = 1 - \frac{r}{R}cos\theta,$$

$$\left(1 - 2\left(\frac{r}{R}\right)cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{r}{R}cos\theta$$

- $\Phi_{+Q}(r) + \Phi_{-Q}(r) = -\frac{2Qr}{\mathrm{R}^2}cos\theta.$

Οι υπόλοιποι δύο όροι

- $\Phi_{q''}(r) + \Phi_{q'}(r) =$

$$\frac{-Q\frac{a}{R}}{\left[\frac{\alpha^4}{R^2}+r^2+2\frac{a^2}{\mathrm{R}}r\cos\theta\right]^{1/2}} + \frac{Q\frac{a}{R}}{\left[\frac{\alpha^4}{R^2}+r^2-2\frac{a^2}{\mathrm{R}}r\cos\theta\right]^{1/2}} =$$

$$= Q\frac{a}{rR}\left[1-2\frac{a^2}{\mathrm{Rr}}\cos\theta\right]^{-1/2} - Q\frac{a}{rR}\left[1+2\frac{a^2}{\mathrm{Rr}}\cos\theta\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= Q\frac{a}{rR}\left(1+\frac{a^2}{\mathrm{Rr}}\cos\theta\right) + Q\frac{a}{rR}\left(-1+\frac{a^2}{\mathrm{Rr}}\cos\theta\right)$$

$$= \frac{2Q}{R^2r^2}a^3\cos\theta$$

Τελική έκφραση και παρατηρήσεις

- Επειδή $\mathrm{E}_0 = \frac{2Q}{\mathrm{R}^2}$ ισχύει ότι

$$\Phi(\mathrm{r}) = -\mathrm{E}_0 r cos\theta + \mathrm{E}_0 \frac{\alpha^3}{r^2} cos\theta$$

- Ο πρώτος όρος $-\mathrm{E}_0 r cos\theta$ είναι το δυναμικό που προκαλείται από το πεδίο. Ο δεύτερος όρος είναι διπολικός όπως βλέπουμε. Είναι το δυναμικό που προκαλείται από την επαγόμενη επιφανειακή πυκνότητα φορτίου λόγω του πεδίου. Εμφανίζεται λοιπόν ένα δίπολο στο εσωτερικό της σφαίρας.

Συνάρτηση Green σε σφαίρα

- Με τους ίδιους συλλογισμούς για το επίπεδο μπορούμε να πούμε και για την περίπτωση της σφαίρας ότι η συνάρτηση Green είναι το δυναμικό που προέρχεται από μοναδιαίο φορτίο και το είδωλό του.
- Το δυναμικό αυτό το έχουμε υπολογίσει και άρα

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} - \frac{\frac{a}{x'}}{\left|x\hat{x} - \frac{a^2}{x'}\hat{x}'\right|}$$

- Αναπτύσσουμε τα απόλυτα και έχουμε

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \frac{1}{(x^2+x'^2-2xx'\,cos)^{1/2}} - \frac{a}{(x^2x'^2+a^4-2xx'\,cos\gamma)^{1/2}}$$

- Εδώ γ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων x και x'. Έχουμε $\hat{x}\cdot\hat{x}'= cos\gamma$. Σε σφαιρικές συντεταγμένες ισχύει

$$cos\gamma = sin\theta sin\theta' \cos(\theta-\theta') + cos\theta cos\theta'$$

Η παράγωγος της Green

- Βρήκαμε την συνάρτηση Green για την σφαίρα. Αυτή είναι η συνάρτηση Green είτε έχουμε το εσωτερικό πρόβλημα(δηλ. να ψάχνουμε το δυναμικό εντός της σφαίρας) είτε το εξωτερικό(να ψάχνουμε το δυναμικό έξω από την σφαίρα).
- Έστω ότι έχουμε το εσωτερικό πρόβλημα. Τότε $\hat{n} = \hat{x}'$. (Το κάθετο διάνυσμα θα έχει φορά «προς τα έξω»).
- Μετά από πράξεις βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')}{\partial x'} = \frac{x^2 - a^2}{a(x^2 + a^2 - 2axcos\gamma)^{3/2}}$$

- Αν είχαμε το εξωτερικό πρόβλημα η παραπάνω έκφραση θα ήταν με «μείον», διότι το κάθετο διάνυσμα θα ήταν $\hat{n} = -\hat{x}'$.

Τελική έκφραση για το δυναμικό

- Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Green για το εσωτερικό πρόβλημα της σφαίρας έχουμε

$$\Phi(\mathbf{x}) =$$

$$= \int \rho(\boldsymbol{x}')G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')d^3x' - \frac{1}{4\pi}\oint V(\theta',\varphi')\frac{x^2-a^2}{a(x^2+a^2-2axcos\gamma)^{\frac{3}{2}}}da' =$$

$$\int \rho(\boldsymbol{x}')G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')d^3x' - \frac{1}{4\pi}\oint V(\theta',\varphi')\frac{x^2-a^2}{(x^2+a^2-2axcos\gamma)^{\frac{3}{2}}}asin\theta' d\theta' d\varphi'$$

με $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \frac{1}{(x^2+x'^2-2xx'cos)^{1/2}} - \frac{a}{(x^2x'^2+a^4-2xx'cos\gamma)^{1/2}}$.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ
2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Ανδρέας Τερζής. Ανδρέας Τερζής «Κλασική Ηλεκτροδυναμική. Προβλήματα σφαιρικής γεωμετρίας». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1958/

Σημείωμα Αδειοδότησης

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνα 1: David Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons, New York, 1999

Διαθέσιμο ηλεκτρονικά από https://archive.org/details/ClassicalElectrodynamics