Κλασική Ηλεκτροδυναμική

Ενότητα 3: Η συνάρτηση Green σε επίπεδη γεωμετρία και η μέθοδος των ειδώλων σε σφαιρική

Ανδρέας Τερζής

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να παρουσιάσει την μέθοδο των ειδώλων σε σφαιρική και επίπεδη γεωμετρία, μέσω της οποίας προσδιορίζεται η συνάρτηση Green.

Περιεχόμενα ενότητας

- Μέθοδος ειδώλων-Γενικά
- Επίπεδη γεωμετρία
- Σφαιρική γεωμετρία

Γενικά

- Η μέθοδος των ειδώλων βρίσκει εφαρμογή στην επίλυση προβλημάτων ενός ή περισσότερων φορτίων παρουσία συνοριακών επιφανειών.
- Η φιλοσοφία είναι ότι μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την γεωμετρία του προβλήματος και να αντικαταστήσουμε τις συνοριακές συνθήκες με κατάλληλα τοποθετημένα φορτία, που θα βρίσκονται εξωτερικά της περιοχής που θέλουμε να βρούμε το δυναμικό. Η παρουσία των φορτίων θα είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη των συνοριακών επιφανειών.
- Τα φορτία αυτά ονομάζονται **είδωλα** και η αντικατάσταση των συνοριακών συνθηκών με τα είδωλα ονομάζεται **μέθοδος των ειδώλων**.

Μέθοδος των ειδώλων για επίπεδη επιφάνεια

- Θα δώσουμε το πιο απλό παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου των ειδώλων.
- Έχουμε μια επίπεδη επιφάνεια στο επίπεδο xy και σημειακό φορτίο στην θέση $\boldsymbol{x}' = (x', y', z')$. Δίνεται η συνοριακή συνθήκη για το δυναμικό πάνω στην επιφάνεια $\Phi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} = 0) = 0$. Ψάχνουμε το δυναμικό $\Phi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \geq 0)$.
- Θα εφαρμόσουμε την μέθοδο των ειδώλων, δηλαδή θα δημιουργήσουμε την ίδια συνοριακή συνθήκη «αφαιρώντας» την επιφάνεια και τοποθετώντας κατάλληλα ένα είδωλο. Έτσι στο προβλημά μας δεν αλλάζει ουσιαστικά τίποτα.

Εύρεση δυναμικού

- Τοποθετούμε το είδωλο q' σε συμμετρική θέση του φορτίου q, δηλαδή στην θέση $\boldsymbol{x}'' = (\mathrm{x}', \mathrm{y}', -\mathrm{z}')$. Ακόμη το είδωλο είναι τέτοιο

ώστε $q' = -q$. Αμέσως μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι για το δυναμικό που προέρχεται από το φορτίο q και το είδωλό του ισχύει $\Phi(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} = 0) = 0$. Άρα το είδωλό μας είναι καλά τοποθετημένο και έχει το σωστό φορτίο.

- Συνεπώς το δυναμικό σε όλο τον χώρο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι προέρχεται από τα φορτία q και q'. Άρα

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} + \frac{q'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}''|} \Rightarrow$$

$$\Phi(\mathrm{x}) = \frac{q}{\left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right]^{1/2}} - \frac{q}{\left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2\right]^{1/2}}$$

Εφαρμογή της μεθόδου των ειδώλων

- Μέσα από ένα απλό παράδειγμα είδαμε την εφαρμογή της μεθόδου των ειδώλων για το δυναμικό στον χώρο. Τι γίνεται όμως στην περίπτωση όπου έχουμε μια κατανομή φορτίων $\rho(\boldsymbol{x}')$ και όχι ένα σημειακό;
- Σε αυτήν την περίπτωση θα κάνουμε χρήση του θεωρήματος Green. Για να συμβεί αυτό, πρέπει να προσδιοριστεί η κατάλληλη συνάρτηση Green για το πρόβλημά μας. Την μέθοδο των ειδώλων την δείξαμε, γιατί μπορεί σε μια κατηγορία προβλημάτων να εξυπηρετεί ακριβώς αυτόν τον σκοπό: **Να προσδιορίζει την κατάλληλη συνάρτηση Green**. Παρακάτω θα δούμε πώς γίνεται αυτό.

Προσδιορισμός συνάρτησης Green (I)

- Έχουμε πάλι το πρόβλημα μιας επίπεδης επιφάνειας στο επίπεδο xy παρουσία κατανομής φορτίου $\rho(\boldsymbol{x}')$. Η συνοριακή μας συνθήκη είναι $\Phi(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}=0)=\mathrm{V}(\mathrm{x},\mathrm{y})$. Ψάχνουμε το δυναμικό στον χώρο.

Θα κάνουμε χρήση του θεωρήματος Green. Εφ’ όσον δίνεται το δυναμικό πάνω στην επιφάνεια, έχουμε συνοριακές συνθήκες Dirichlet και άρα για την Green ισχύουν τα εξής:$1)G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=0$ για $\boldsymbol{x}'$ on S (όπου S η επιφάνεια) $2)\boldsymbol{\nabla}'^2\mathrm{G}(\mathbf{x},\mathbf{x}')=-4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$.

Προσδιορισμός συνάρτησης Green (II)

- Ξεφεύγουμε για λίγο από το κυρίως πρόβλημά μας και με βάση τα στοιχεία (1) και (2) που έχουμε εντοπίσει προσπαθούμε να προσδιορίσουμε την συνάρτηση Green.
- Η συνάρτηση Green αποτελεί το **δυναμικό** μοναδιαίου φορτίου στην θέση $\boldsymbol{x}' = (x', y', z')$. Άρα ουσιαστικά έχουμε το εξής υποπρόβλημα: Μοναδιαίο φορτίο στην θέση $\boldsymbol{x}' = (x', y', z')$ παρουσία επίπεδης επιφάνειας S, με συνοριακή συνθήκη για το δυναμικό $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = 0$ για $\boldsymbol{x}'$ on S . Ποιο είναι το δυναμικό στον χώρο; Δηλαδή ποια είναι η $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$;
- Μα αυτό το πρόβλημα το έχουμε λύσει με την μέθοδο των ειδώλων για τυχαίο φορτίο q. Στην περίπτωσή μας $q = 1$, άρα

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{1}{\left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2\right]^{1/2}}$$

Εύρεση παραγώγου της Green

- Αφού έχουμε προσδιορίσει την Green θα βρούμε τώρα την παράγωγό της $\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x'})}{\partial \widehat{\boldsymbol{n}}}$, για $\boldsymbol{x}'$ on S.
- Το $\widehat{\boldsymbol{n}}'$ είναι το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια και η φορά του είναι τέτοια ώστε να «εξέρχεται» από την περιοχή στην οποία θέλουμε να προσδιορίσουμε το δυναμικό $\Phi(\mathbf{x})$. Άρα στην περίπτωσή μας $\widehat{\boldsymbol{n}}' = -\widehat{\boldsymbol{z}}'$.

Εύρεση παραγώγου της Green

- Επομένως $\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')}{\partial \hat{\boldsymbol{n}}} = -\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')}{\partial \hat{\boldsymbol{z}}'} =$

$$-\frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{z}}'}\left(\frac{1}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2\right]^{1/2}}\right) =$$

$$-\left(\frac{(z-z')}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{3/2}} + \frac{(z+z')}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2\right]^{3/2}}\right)$$

- Επειδή ψάχνουμε την παράγωγο για $z' = 0$, το τελικό αποτέλεσμα είναι

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')}{\partial \hat{\boldsymbol{z}}'} = \frac{-2z}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2\right]^{3/2}}$$

Τελική λύση για το δυναμικό

- Με βάση το θεώρημα Green το δυναμικό θα είναι

$$\Phi(\boldsymbol{x}) =$$
$$= \int \rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')d^3\boldsymbol{x}' - \frac{1}{4\pi}\oint\left[\mathrm{V}(\mathrm{x}',\mathrm{y}')\frac{-2z}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}}\right]d\boldsymbol{x}'d\boldsymbol{y}'$$

- Η $\mathrm{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ είναι αυτή της διαφάνειας (9).

Σκιαγράφηση ενός ακόμη παραδείγματος-Εκφώνηση

- Θα σκιαγραφήσουμε ένα ακόμη παράδειγμα για την καλύτερη κατανόηση της λογικής.

- Έστω ότι έχουμε μια επίπεδη επιφάνεια και σε απόσταση $z = d$ από αυτήν βρίσκονται δύο φορτία q και –q, που απέχουν μεταξύ τους απόσταση 2w. Το φορτίο q βρίσκεται στην θέση $(x, y, z) = (-w, 0, d)$ ενώ το φορτίο –q στην θέση $(w, 0, d)$. Η συνοριακή συνθήκη για το δυναμικό πάνω στην επιφάνεια είναι $V(x', y') = 0$. Να βρεθεί το δυναμικό στον χώρο με την μέθοδο συναρτήσεων Green.

Επίλυση

- Θα εκφράσουμε την κατανομή φορτίου που δίνεται με την βοήθεια των συναρτήσεων δέλτα. Άρα

$$\rho(\boldsymbol{x}') = q\delta(x' + w)\delta(y')\delta(z' - d) - q\delta(x' - w)\delta(y')\delta(z' - d)$$

- Η συνάρτηση Green για επίπεδη επιφάνεια είναι πλέον γνωστή (οι συνθήκες εύρεσής της είναι οι ίδιες) και προφανώς δεν χρειάζεται να ξαναυπολογιστεί.

- Εφ΄όσον η συνοριακή μας συνθήκη είναι

$V(x', y') = 0$, καταλαβαίνουμε ότι το επιφανειακό ολοκλήρωμα του θεωρήματος Green μηδενίζεται και ο τελικός τύπος για το δυναμικό είναι :

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \int \rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')d^3x'$$

Τελική έκφραση

- Αντικαθιστώντας την συνάρτηση που έχουμε βρει για επίπεδη επιφάνεια στο επίπεδο xy, και εκμεταλλευόμενοι την ιδιότητα της δέλτα, $\int f(x)\delta(x-\alpha)dx = f(a)$, παίρνουμε για το δυναμικό

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{q}{\left[(x+w)^2+y^2+(z-d)^2\right]^{1/2}} - \frac{q}{\left[(x+w)^2+y^2+(z+d)^2\right]^{1/2}} - \frac{q}{\left[(x-w)^2+y^2+(z-d)^2\right]^{1/2}} + \frac{q}{\left[(x-w)^2+y^2+(z+d)^2\right]^{1/2}}$$

Σφαιρική γεωμετρία

- Έστω γειωμένη σφαίρα ακτίνας α, τοποθετημένη στην αρχή των αξόνων. Υπάρχει φορτίο q στην θέση $\boldsymbol{y}$. Ψάχνουμε το δυναμικό στην τυχαία θέση $\boldsymbol{x}$. Η συνοριακή συνθήκη για το πρόβλημά μας είναι $\Phi(\mathrm{x} = \mathrm{\alpha}) = 0$.
- Θα εφαρμόσουμε την μέθοδο των ειδώλων, για να βρούμε το δυναμικό στον χώρο. Με βάση αυτό αργότερα θα είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε την συνάρτηση Green για σφαιρική επιφάνεια, σε αναλογία με την περίπτωση του επιπέδου.

Μέθοδος των ειδώλων

- Τοποθετούμε το είδωλο q’ στην θέση $\boldsymbol{y}'$ στο εσωτερικό της σφαίρας και στην ίδια ευθεία με το q.
- Από τον νόμο Coulomb,το δυναμικό εξ’αιτίας των δύο φορτίων στον χώρο είναι

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} + \frac{q'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}'|} =$$

$$\frac{q}{|x\widehat{\boldsymbol{x}} - y\widehat{\boldsymbol{y}}|} + \frac{q'}{|x\widehat{\boldsymbol{x}} - y'\widehat{\boldsymbol{y}}|}$$

- Εφαρμόζουμε την συνοριακή συνθήκη και έχουμε:

$$\Phi(\mathrm{x}=\alpha) = 0 = \frac{q}{|\alpha\widehat{\boldsymbol{x}} - y\widehat{\boldsymbol{y}}|} + \frac{q'}{|\alpha\widehat{\boldsymbol{x}} - y'\widehat{\boldsymbol{y}}|} \Rightarrow$$

$$\frac{q'}{|\alpha\widehat{\boldsymbol{x}} - y'\widehat{\boldsymbol{y}}|} = -\frac{q}{|\alpha\widehat{\boldsymbol{x}} - y\widehat{\boldsymbol{y}}|}$$

Μέθοδος των ειδώλων-τελικά αποτελέσματα

- Βγάζοντας κατάλληλους κοινούς παράγοντες και στα δύο μέλη συνεχίζουμε και έχουμε:

$$\frac{q'}{y'\left|\frac{a}{y'}\hat{\boldsymbol{x}}-\hat{\boldsymbol{y}}\right|}=-\frac{q}{a\left|\hat{\boldsymbol{x}}-\frac{y}{a}\hat{\boldsymbol{y}}\right|}$$

- Για να ισχύει αυτή η ισότητα θα πρέπει $\frac{q'}{y'}=-\frac{q}{a}$, και $\frac{a}{y'}=\frac{y}{a}$.

Η τελευταία ισότητα φαίνεται αμέσως ότι ισχύει, αν εφαρμόσουμε τον νόμο των συνημιτόνων για τις παραστάσεις στα απόλυτα.

- Λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων που μας προέκυψαν, βρίσκουμε ότι $y'=\frac{a^2}{y}, q'=-\frac{a}{y}q$.
- Άρα το δυναμικό στον χώρο είναι $\Phi(\mathbf{x})=\frac{q}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}-\frac{q}{\left|\frac{y}{a}\boldsymbol{x}-\frac{a}{y}\boldsymbol{y}\right|}$

Μια παρατήρηση

Πολύ κοντά στην σφαιρική επιφάνεια, δηλαδή σε μια απόσταση $y = a - w$ με $w \ll a$ θα έχουμε

$$y' = \frac{a^2}{y} = a^2(a-w)^{-1} = \frac{a^2}{a}\left(1 - \frac{w}{a}\right)^{-1} = a\left(1 + \frac{w}{a}\right)$$
$$= a + w$$

Παρατηρούμε ότι το είδωλο βρίσκεται σε συμμετρική θέση ως προς το φορτίο q. Δηλαδή όταν πλησιάζουμε πολύ κοντά στην επιφάνεια, μπορούμε να την αντιμετωπίσουμε σαν να είναι επίπεδη.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Ανδρέας Τερζής. Ανδρέας Τερζής «Κλασική Ηλεκτροδυναμική. Η συνάρτηση Green σε επίπεδη γεωμετρία και η μέθοδος των ειδώλων σε σφαιρική». Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1958/

Σημείωμα Αδειοδότησης