Κλασική Ηλεκτροδυναμική

Ενότητα 2: Θεώρημα Green

Ανδρέας Τερζής
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Σκοπός ενότητας

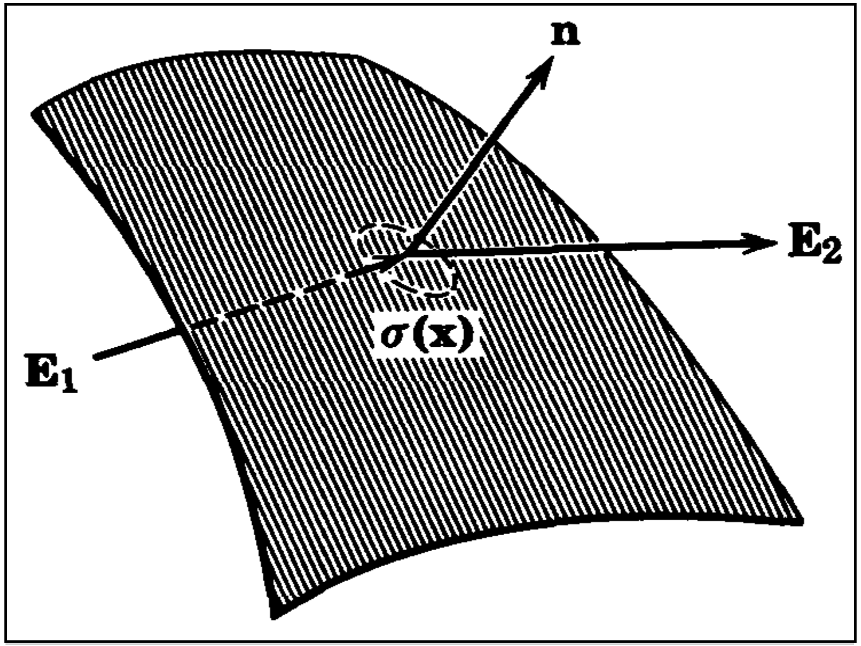
- Σκοπός της ενότητας είναι να παρουσιαστεί το θεώρημα Green, που αποτελεί βασικό εργαλείο για την επίλυση ηλεκτροστατικών προβλημάτων.

Περιεχόμενα ενότητας

- Επιφανειακή κατανομή φορτίου
- Δυναμική ενέργεια φορτίων
- Θεώρημα Green
- Λύση για το δυναμικό με την βοήθεια συναρτήσεων Green
- Είδη συνοριακών συνθηκών

Επιφανειακή πυκνότητα φορτίου

Εικόνα 1



- Ένα από τα πιο καθιερωμένα προβλήματα στην ηλεκτροστατική είναι ο προσδιορισμός του ηλεκτρικού πεδίου παρουσία επιφανειακής κατανομής φορτίου.
- Εφαρμόζοντας τον νόμο Gauss, σε πολύ «μικρά» τμήματα της επιφάνειας (έτσι ώστε το ηλεκτρικό πεδίο να θεωρείται πρακτικά σταθερό), ο νόμος Gauss είναι εμφανές ότι δίνει

$$(\mathbf{E_2} - \mathbf{E_1}) \cdot \boldsymbol{n} = 4\pi\sigma$$

Κάποιες παρατηρήσεις

- Η παραπάνω εξίσωση καθορίζει μόνο την κάθετη συνιστώσα και πάνω στην επιφάνεια.
- Με λίγα λόγια, η **κάθετη** συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου παρουσιάζει ασυνέχεια $4\pi\sigma$.
- Τι συμβαίνει όμως με την εφαπτομενική συνιστώσα;
- Είπαμε ότι $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Άρα $\int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \boldsymbol{n} da = 0$. Από το θεώρημα Stokes συμπεραίνουμε $\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$.
- Μπορούμε να φανταστούμε ένα ορθογώνιο πλαίσιο που τέμνει την επιφάνεια, έτσι ώστε οι δύο «πλαϊνές» πλευρές να είναι τόσο «μικρές» που πρακτικά να μην συνεισφέρουν στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα. Σημασία θα έχουν οι συνιστώσες του πεδίου που διατρέχουν την πάνω και κάτω πλευρά του ορθογωνίου, που είναι και οι συνιστώσες που μας ενδιαφέρουν(οι εφαπτομενικές).
- Άρα αναλύοντας το ολοκλήρωμα θα έχουμε

$$\int_{\alpha}^{b} \boldsymbol{E_1} \cdot d\boldsymbol{l} + \int_{b}^{a} \boldsymbol{E_2} \cdot d\boldsymbol{l} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{E_1} \int_{a}^{b} d\boldsymbol{l} - \boldsymbol{E_2} \int_{a}^{b} d\boldsymbol{l} = 0 \Rightarrow E_{1\varepsilon\varphi.} = \mathrm{E}_{2\varepsilon\varphi.}$$

Φυσική σημασία βαθμωτού δυναμικού

- Άρα η εφαπτομενική συνιστώσα του πεδίου είναι συνεχής.
- Θα δούμε τώρα την φυσική σημασία του βαθμωτού δυναμικού. Το βαθμωτό δυναμικό λαμβάνει φυσική υπόσταση, όταν θεωρούμε το έργο που απαιτείται για να μεταφέρουμε ένα δοκιμαστικό φορτίο από την θέση A στην θέση B παρουσία ηλεκτρικού πεδίου.
- Η δύναμη που δρα στο δοκιμαστικό φορτίο q είναι $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$. Το έργο που απαιτείται για να μεταφερθεί είναι $W = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = -\int_{A}^{B} (q\boldsymbol{E}) \cdot d\boldsymbol{l} = q\int_{A}^{B} \nabla\Phi \cdot d\boldsymbol{l} \Rightarrow$

$$W = q[\Phi(\boldsymbol{x_B}) - \Phi(\boldsymbol{x_A})]$$

- Άρα η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων είναι ουσιαστικά το έργο που απαιτείται για να μετακινήσουμε ένα δοκιμαστικό φορτίο ανάμεσα σε αυτά τα δύο σημεία.

Δυναμική ενέργεια φορτίου(I)

- Η ολική δυναμική ενέργεια φορτίων που οφείλεται στις δυνάμεις που δρουν μεταξύ τους είναι

$$W = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} \frac{q_i q_j}{|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|}$$

ή $W = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{q_i q_j}{|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|}$.

Στην τελευταία σχέση παραλείπονται οι όροι $i = j$ (όροι αυτοενέργειας).

- Για συνεχή κατανομή θα έχουμε
$W = \frac{1}{2} \iint \frac{\rho(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3x d^3x' = \frac{1}{2} \int \rho(\boldsymbol{x})\Phi(\boldsymbol{x}) d^3x$

Δυναμική ενέργεια φορτίου(II)

- Αντικαθιστώντας από την εξίσωση Poisson την πυκνότητα φορτίου καταλήγουμε ότι

$$W = -\frac{1}{8\pi}\int \Phi\nabla^2\Phi d^3x$$

- Με παραγοντική ολοκλήρωση καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$W = \frac{1}{8\pi}\int|\boldsymbol{\nabla}\Phi|^2\, d^3x = \frac{1}{8\pi}\int|\mathbf{E}|^2 d^3x$$

- Μπορούμε να ορίσουμε την ενεργειακή πυκνότητα ως $w = \frac{1}{8\pi}|\mathbf{E}|^2$
- **Παρατήρηση**: Η ενέργεια σύμφωνα με την παραπάνω σχέση είναι πάντα θετική. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την σχέση που περιέχει το διπλό άθροισμα, που υπονοεί ότι η δυναμική ενέργεια μεταξύ δύο αντίθετων φορτίων είναι αρνητική. Η εξήγηση σε αυτό είναι ότι οι δύο σχέσεις δεν είναι ισοδύναμες, καθώς στην δεύτερη περίπτωση εμπεριέχονται και όροι αυτοενέργειας, οι οποίοι έχουν εξαιρεθεί στο διπλό άθροισμα.

Θεώρημα Green-Εισαγωγή

- Ο νόμος Coulomb, όπως είδαμε, περιλαμβάνει ολοκλήρωση σε όλο το σύμπαν.
- Στην ηλεκτροστατική όμως σχεδόν όλα τα προβλήματα περιλαμβάνουν επιφάνειες που χαρακτηρίζονται από συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες.
- Για ν’ αντιμετωπιστούν τα προβλήματα με συνοριακές συνθήκες, ο νόμος Coulomb πρέπει να μετασχηματιστεί. Γι’ αυτόν τον σκοπό, έχουν αναπτυχθεί μαθηματικά εργαλεία, όπως τα θεωρήματα ή ταυτότητες Green.

Θεώρημα Green-Εξαγωγή

- Οι ταυτότητες (ή θεωρήματα) Green προκύπτουν ως απλές εφαρμογές του θεωρήματος της απόκλισης.
- Το θεώρημα της απόκλισης είναι $\iiint \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} d^3x = \oiint \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}\alpha$.
- Έστω $\mathbf{A} = \varphi \boldsymbol{\nabla} \psi$, όπου φ και ψ είναι τυχαία βαθμωτά δυναμικά.
- Θα ισχύουν οι σχέσεις

$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\varphi \boldsymbol{\nabla} \psi) = \varphi \nabla^2 \psi + \boldsymbol{\nabla} \varphi \cdot \boldsymbol{\nabla} \psi$ και

$\varphi \boldsymbol{\nabla} \psi \cdot \boldsymbol{n} = \varphi \dfrac{\partial \psi}{\partial n}$.

Η $\dfrac{\partial}{\partial n}$ είναι η κάθετη παράγωγος στην επιφάνεια S.

Ταυτότητες Green

- Αντικαθιστώντας τις δύο σχέσεις στο θεώρημα της απόκλισης παίρνουμε την **πρώτη ταυτότητα Green**:

$$\iiint (\varphi \nabla^2 \psi + \boldsymbol{\nabla}\varphi \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi) d^3x = \oint\!\!\oint \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} da$$

- Αν γράψουμε την ίδια σχέση αλλάζοντας την θέση των φ και ψ και ύστερα την αφαιρέσουμε από την παραπάνω σχέση, παίρνουμε την **δεύτερη ταυτότητα Green**:

$$\iiint (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) d^3x = \oint\!\!\oint \left[\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right] da$$

Έκφραση για το δυναμικό με την βοήθεια ταυτότητας Green

- Αν επιλέξουμε $\psi = \frac{1}{R} = 1/|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$, $\varphi = \Phi$, το βαθμωτό δυναμικό και κάνοντας χρήση των σχέσεων

$\nabla^2\Phi = -4\pi\rho$, $\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$ (που είναι η εξίσωση Poisson για μοναδιαίο φορτίο)

καταλήγουμε στην σχέση

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \iiint \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{R} d^3\boldsymbol{x}' + \frac{1}{4\pi} \oiint \left[\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{n}'} - \Phi\frac{\partial}{\partial \mathrm{n}'}\left(\frac{1}{R}\right)\right] d\boldsymbol{a}'$$

με την προϋπόθεση ότι το σημείο $\boldsymbol{x}$ βρίσκεται εντός του όγκου ολοκλήρωσης.

Συναρτήσεις Green

- Προηγουμένως επιλέξαμε την συνάρτηση

$\psi = \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}$, που είναι το δυναμικό μοναδιαίου φορτίου και ικανοποιεί την εξίσωση

$$\nabla'^2 \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

Στην πραγματικότητα αυτή η συνάρτηση ανήκει σε μια κατηγορία συναρτήσεων, τις συναρτήσεις Green, που γενικά ικανοποιούν την εξίσωση

$\nabla'^2 \mathrm{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = -4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$, με

$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} + F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$.

Γενική λύση για το δυναμικό

- Θέτουμε λοιπόν $\varphi = \Phi$ και

$\psi = G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} + F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$. Η συνάρτηση $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ είναι τέτοια ώστε να ικανοποιεί την εξίσωση Laplace στον όγκο V, δηλαδή $\nabla'^2 \mathrm{F}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0$.

- Αντικαθιστώντας στην δεύτερη ταυτότητα Green έχουμε:

$$\int \left(\Phi\left(-4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\right) - G\nabla'^2\Phi\right) d^3\boldsymbol{x}' = \oint \left(\Phi \frac{d\mathrm{G}}{dn'} - G\frac{d\Phi}{dn'}\right) d\boldsymbol{a}'$$

- Από την εξίσωση Poisson αντικαθιστούμε $\nabla'^2\Phi = -4\pi\rho(\mathbf{x}')$ και η τελική έκφραση για το δυναμικό είναι:

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \int \rho(\boldsymbol{x}') G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') d^3\boldsymbol{x}' + \frac{1}{4\pi} \oint \left[G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{n}'} - \Phi(\boldsymbol{x}') \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')}{\partial \mathrm{n}'} \right] d\boldsymbol{a}'$$

Λίγες διευκρινίσεις

- Έχουμε μετατρέψει τον νόμο Coulomb που περιέχει ένα ολοκλήρωμα όγκου σε όλο το σύμπαν, σ’ ένα ολοκλήρωμα όγκου πεπερασμένης περιοχής συν έναν όρο που είναι το ολοκλήρωμα που εκφράζει τις συνοριακές συνθήκες της επιφάνειας που περιέχει τον όγκο.

Κατηγορίες συνοριακών συνθηκών

- Για να προσδιορίσουμε την λύση του δυναμικού με την βοήθεια των Green, πρέπει να προσδιορίσουμε την μορφή της Green, η οποία εξαρτάται κάθε φορά από το πρόβλημα.
- Στόχος είναι να προσδιορίσουμε τις συνοριακές μας συνθήκες, να είναι τέτοιες, ώστε η λύση του δυναμικού να είναι μοναδική.
- Ο ορισμός του δυναμικού σε κλειστή επιφάνεια καλείται πρόβλημα Dirichlet, ενώ ο ορισμός του ηλεκτρικού πεδίου (παράγωγος του δυναμικού) παντού στην επιφάνεια, επίσης καθορίζει ένα μοναδικό πρόβλημα. Ο ορισμός της κάθετης παραγώγου καλείται συνοριακή συνθήκη Neumann.

Μορφή της λύσης για συνοριακή συνθήκη Dirichlet

- Η ελευθερία που έχουμε στον ορισμό της G(εξ' αιτίας της $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'))$ υπονοεί ότι μπορούμε να επιλέξουμε την μορφή της, έτσι ώστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα να εξαρτάται μόνο από έναν τύπο συνοριακών συνθηκών.
- Για συνοριακές συνθήκες **Dirichlet** απαιτούμε

$\mathrm{G}_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = 0$, για $\boldsymbol{x}'\, on\, S$.

Τότε το δυναμικό θα είναι

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = $$
$$= \int \rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{G}_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')d^3\boldsymbol{x}' - \frac{1}{4\pi}\oint\left[\Phi(\boldsymbol{x}')\frac{\partial G_D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')}{\partial \mathrm{n}'}\right]d\boldsymbol{a}'$$

Μορφή της λύσης για συνοριακή συνθήκη Neumann

- Για συνοριακές συνθήκες Neumann απαιτούμε

$$\frac{\partial \mathrm{G}_N}{\partial n\prime}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = -\frac{4\pi}{\mathrm{S}}, \text{ για } \boldsymbol{x}' on\ S.$$

Η λύση για το δυναμικό είναι

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \int \rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{G}_N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')d^3x' + \frac{1}{4\pi}\oint\left[G_N\frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{n}'}\right]da' + \langle\Phi\rangle_S, \text{ όπου}$$

ο τελευταίος όρος είναι το μέσο δυναμικό όλης της επιφάνειας.

- **Συμπέρασμα**: Αν μπορούμε να προσδιορίσουμε την Green για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, μπορούμε απ'ευθείας να υπολογίσουμε την λύση για το δυναμικό με τους παραπάνω τύπους. Στα παρακάτω μαθήματα θα δούμε τρόπους εύρεσης της κατάλληλης συνάρτησης Green.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνα 1: David Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons, New York, 1999

Διαθέσιμο ηλεκτρονικά από https://archive.org/details/ClassicalElectrodynamics