



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Κλασική Ηλεκτροδυναμική

Ενότητα 19: Η συνάρτηση Green για την κυματική
εξίσωση και θεώρημα Poynting

Ανδρέας Τερζής
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να παρουσιάσει την μεθοδολογία της συνάρτησης Green για την κυματική εξίσωση και το θεώρημα Poynting.

Περιεχόμενα ενότητας

- Μεθοδολογία συνάρτησης Green
- Θεώρημα Poynting

Μεθοδολογία συνάρτησης Green για την κυματική εξίσωση (I)

- Έχουμε μια εξίσωση της μορφής

$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -(\text{όρος πηγής})$ και θέλουμε να προσδιορίσουμε την συνάρτηση Green γι' αυτό το πρόβλημα. Το Φ μπορεί να είναι είτε το βαθμωτό δυναμικό, είτε μια καρτεσιανή συνιστώσα του διανυσματικού.

- Το αντίστοιχο πρόβλημα της συνάρτησης Green είναι

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t')$$

όπου τώρα η πηγή είναι ένα «γεγονός» που συμβαίνει την $t = t'$ στην θέση $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$.

- Για να λύσουμε αυτήν την εξίσωση, πραγματοποιούμε αρχικά έναν μετασχηματισμό Fourier στον χρόνο:

$$G(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', t') e^{-i\omega t} d\omega$$



Μεθοδολογία συνάρτησης Green για την κυματική εξίσωση (II)

- Έτσι η μετασχηματισμένη εξίσωση γίνεται

$$\begin{aligned} & \left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', t') \\ &= -4\pi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') e^{i\omega t} dt = \\ & -\frac{4\pi}{\sqrt{2\pi}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{i\omega t'}. \end{aligned}$$

- Έστω $G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', t') = g(\mathbf{x}, \mathbf{x}') e^{i\omega t'} / \sqrt{2\pi}$ και η $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ τότε ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\nabla^2 + k^2)g = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \text{ με } k = \frac{\omega}{c}.$$



Μεθοδολογία συνάρτησης Green για την κυματική εξίσωση (III)

- Χωρίς συνοριακές επιφάνειες, η g πρέπει να είναι συνάρτηση μόνο του $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$.
- Σε σφαιρικές συντεταγμένες μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (Rg) + k^2 g = -4\pi\delta(\mathbf{R})$$

- Για $R \neq 0$, το δεξί μέλος είναι μηδέν και άρα

$$Rg = Ae^{ikR} + Be^{-ikR} \Rightarrow$$
$$g = \frac{1}{R} (Ae^{ikR} + Be^{-ikR})$$



Λύση μετασχηματισμένης Green

- Κοντά στην πηγή ο όρος της συνάρτησης δέλτα συνεισφέρει και έχουμε

$$\nabla^2 g \cong -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

- Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι $g = \frac{1}{R}$.
- Το αποτέλεσμα αυτό για $R \rightarrow 0$, είναι σε συμφωνία με την $g = \frac{1}{R}(Ae^{ikR} + Be^{-ikR})$, αν $A + B = 1$.
- Άρα έχουμε

$$G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{x}', t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} [Ae^{ikR} + (1 - A)e^{-ikR}] e^{i\omega t'}$$

- Προφανώς μπορούμε να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα αν το αντικαταστήσουμε στην διαφορική εξίσωση $\frac{1}{R} \frac{d^2}{dR^2} (Rg) + k^2 g = -4\pi\delta(\mathbf{R})$.



Λύση Green

- Πραγματοποιούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό και έχουμε

$$\begin{aligned} G(x, t; x', t') &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} [Ae^{ikR} + (1-A)e^{-ikR}] e^{i\omega t'} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A \exp \left[i\omega \left(\frac{R}{c} + t' - t \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + B \exp \left[i\omega \left(-\frac{R}{c} + t' - t \right) \right] \right\} d\omega = \\ &\quad \frac{A}{R} \delta \left[t' - \left(t - \frac{R}{c} \right) \right] + \frac{B}{R} \delta \left[t' - \left(t + \frac{R}{c} \right) \right] \end{aligned}$$



Θεώρημα Poynting

- Έχουμε ως αφετηρία την εξίσωση Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

- Πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά τα δύο μέλη με το πεδίο \mathbf{E} και ολοκληρώνουμε στον όγκο V :

$$\int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3 \mathbf{x} = \int \frac{c}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E} d^3 \mathbf{x} - \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d^3 \mathbf{x}$$

- Στην συνέχεια, κάνουμε χρήση της ταυτότητας

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

- Επομένως

$$\int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3 \mathbf{x} = - \int \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d^3 \mathbf{x} + \frac{c}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) d^3 \mathbf{x} - \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d^3 \mathbf{x}$$



Θεώρημα Poynting-Συνέχεια

- Κάνουμε χρήση του νόμου Faraday, $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$:
- $$\int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3 \mathbf{x} = - \int \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d^3 \mathbf{x} - \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d^3 \mathbf{x} - \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d^3 \mathbf{x} =$$
$$- \int \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d^3 \mathbf{x} - \int \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d^3 \mathbf{x}$$
- Αν το υλικό είναι γραμμικό και με αμελητέες απώλειες, τότε

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \text{ και άρα } \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}). \text{ Ομοίως } \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}).$$



Θεώρημα Poynting-Τελική έκφραση

- Επομένως η παραπάνω έκφραση γίνεται

$$\int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3x = - \int \nabla \cdot \left[\frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right] d^3x - \frac{1}{8\pi} \int \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) d^3x$$

- Στο σημείο αυτό, ορίζουμε το διάνυσμα Poynting $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$. Εκφράζει ροή πυκνότητας ενέργειας.
- Η ποσότητα $\frac{1}{8\pi} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = u$ είναι η ολική πυκνότητα ενέργειας όταν συνυπάρχουν φορτία και ρεύματα.

- Με βάση τα παραπάνω παίρνουμε την έκφραση

$$-\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}$$

- Η παραπάνω εξίσωση είναι το λεγόμενο θεώρημα Poynting και εκφράζει την αρχή διατήρησης ενέργειας για γραμμικά με αμελητέες απώλειες υλικά.



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, **Ανδρέας Τερζής**. Ανδρέας Τερζής «**Κλασική Ηλεκτροδυναμική. Η συνάρτηση Green για την κυματική εξίσωση και θεώρημα Poynting**». Έκδοση: **1.0**. Πάτρα **2015**. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1958/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.