Κλασική Ηλεκτροδυναμική

Ενότητα 19: Η συνάρτηση Green για την κυματική εξίσωση και θεώρημα Poynting

Ανδρέας Τερζής

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να παρουσιάσει την μεθοδολογία της συνάρτησης Green για την κυματική εξίσωση και το θεώρημα Poynting.

Περιεχόμενα ενότητας

- Μεθοδολογία συνάρτησης Green
- Θεώρημα Poynting

Μεθοδολογία συνάρτησης Green για την κυματική εξίσωση (I)

- Έχουμε μια εξίσωση της μορφής

$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -$(όρος πηγής) και θέλουμε να προσδιορίσουμε την συνάρτηση Green γι' αυτό το πρόβλημα. Το Φ μπορεί να είναι είτε το βαθμωτό δυναμικό, είτε μια καρτεσιανή συνιστώσα του διανυσματικού.

- Το αντίστοιχο πρόβλημα της συνάρτησης Green είναι

$$\nabla^2 \mathrm{G}(\mathbf{x}, \mathrm{t}; \mathbf{x}', \mathrm{t}') - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -4\pi\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\delta(t - t')$$

όπου τώρα η πηγή είναι ένα «γεγονός» που συμβαίνει την $t = t'$ στην θέση $x = x'$.

- Για να λύσουμε αυτήν την εξίσωση, πραγματοποιούμε αρχικά έναν μετασχηματισμό Fourier στον χρόνο:

$$\mathrm{G}(\mathbf{x}, \mathrm{t}; \mathbf{x}', \mathrm{t}') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{x}', t')e^{-i\omega t}d\omega$$

Μεθοδολογία συνάρτησης Green για την κυματική εξίσωση (ΙΙ)

- Έτσι η μετασχηματισμένη εξίσωση γίνεται

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) G(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{x}', t') = -4\pi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')\delta(t - t')e^{i\omega t} dt = -\frac{4\pi}{\sqrt{2\pi}} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')e^{i\omega t'}.$$

- Έστω $G(\boldsymbol{x}, \omega; \boldsymbol{x}', t') = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')e^{i\omega t'}/\sqrt{2\pi}$ και η $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ τότε ικανοποιεί την εξίσωση

$(\nabla^2 + k^2)g = -4\pi\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')$ με $k = \frac{\omega}{c}$.

Μεθοδολογία συνάρτησης Green για την κυματική εξίσωση (III)

- Χωρίς συνοριακές επιφάνειες, η g πρέπει να είναι συνάρτηση μόνο του $R = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$.
- Σε σφαιρικές συντεταγμένες μπορούμε να γράψουμε
$$\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d^2}{dR^2}(Rg) + k^2 g = -4\pi\delta(\boldsymbol{R})$$
- Για $R \neq 0$, το δεξί μέλος είναι μηδέν και άρα
$$Rg = Ae^{ikR} + Be^{-ikR} \Rightarrow$$
$$g = \frac{1}{R}\left(Ae^{ikR} + Be^{-ikR}\right)$$

Λύση μετασχηματισμένης Green

- Κοντά στην πηγή ο όρος της συνάρτησης δέλτα συνεισφέρει και έχουμε
$$\nabla^2 g \cong -4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}').$$
- Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι $g=\frac{1}{R}$.
- Το αποτέλεσμα αυτό για $R\to 0$, είναι σε συμφωνία με την $g=\frac{1}{R}\left(Ae^{ikR}+Be^{-ikR}\right)$, αν $\mathrm{A}+\mathrm{B}=1$.
- Άρα έχουμε
$$G(\boldsymbol{x},\omega;\boldsymbol{x}',t')=\frac{1}{\sqrt{2\pi}R}\left[Ae^{ikR}+(1-A)e^{-ikR}\right]e^{i\omega t'}$$
- Προφανώς μπορούμε να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα αν το αντικαταστήσουμε στην διαφορική εξίσωση $\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d^2}{dR^2}(Rg)+k^2 g=-4\pi\delta(\boldsymbol{R})$.

Λύση Green

- Πραγματοποιούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό και έχουμε

$$G(x,t;x',t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}R}\left[Ae^{ikR} + (1-A)e^{-ikR}\right]e^{i\omega t'}e^{i\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi R}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{Aexp\left[i\omega\left(\frac{R}{c}+t'-t\right)\right]\right.$$

$$\left.+ Bexp\left[i\omega\left(-\frac{R}{c}+t'-t\right)\right]\right\}d\omega =$$

$$\frac{\mathrm{A}}{R}\delta\left[t'-(t-\frac{R}{c})\right] + \frac{B}{R}\delta\left[t'-(t+\frac{R}{c})\right]$$

Θεώρημα Poynting

- Έχουμε ως αφετηρία την εξίσωση Maxwell

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

- Πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά τα δύο μέλη με το πεδίο $\mathbf{E}$ και ολοκληρώνουμε στον όγκο V:

$$\int \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}\, d^3\boldsymbol{x} = \int \frac{c}{4\pi}(\nabla \times \boldsymbol{H}) \cdot \mathbf{E} d^3\boldsymbol{x} - \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} d^3\boldsymbol{x}$$

- Στην συνέχεια, κάνουμε χρήση της ταυτότητας

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

- Επομένως

$$\int \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}\, d^3\boldsymbol{x} = -\int \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})\, d^3\boldsymbol{x} + \frac{c}{4\pi}\int \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) d^3\boldsymbol{x} - \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} d^3\boldsymbol{x}$$

Θεώρημα Poynting-Συνέχεια

- Κάνουμε χρήση του νόμου Faraday, $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$:
- $\int \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}\, d^3\boldsymbol{x} = -\int \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})\, d^3\boldsymbol{x} - \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} d^3\boldsymbol{x} - \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} d^3\boldsymbol{x} =$

$$-\int \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})\, d^3\boldsymbol{x} - \int \frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) d^3\boldsymbol{x}$$

- Αν το υλικό είναι γραμμικό και με αμελητέες απώλειες, τότε

$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ και άρα $\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B})$. Ομοίως $\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{D})$.

Θεώρημα Poynting-Τελική έκφραση

- Επομένως η παραπάνω έκφραση γίνεται

$$\int \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}\, d^3\boldsymbol{x} = -\int \nabla\left[\frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\right] d^3\boldsymbol{x} - \frac{1}{8\pi}\int\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})d^3\boldsymbol{x}$$

- Στο σημείο αυτό, ορίζουμε το διάνυσμα Poynting $\boldsymbol{S}=\frac{c}{4\pi}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$. Εκφράζει ροή πυκνότητας ενέργειας.
- Η ποσότητα $\frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})=u$ είναι η ολική πυκνότητα ενέργειας

όταν συνυπάρχουν φορτία και ρεύματα.

- Με βάση τα παραπάνω παίρνουμε την έκφραση

$$-\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\partial u}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{S}$$

- Η παραπάνω εξίσωση είναι το λεγόμενο θεώρημα Poynting και εκφράζει την αρχή διατήρησης ενέργειας για γραμμικά με αμελητέες απώλειες υλικά.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης