



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Κλασική Ηλεκτροδυναμική

Ενότητα 15: Εφαρμογές στα διηλεκτρικά

Ανδρέας Τερζής
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να ολοκληρώσει την ενότητα των διηλεκτρικών παραθέτοντας κάποιες εφαρμογές.

Περιεχόμενα ενότητας

- Συνέχεια άσκησης προηγούμενης ενότητας
- Σφαιρικό διηλεκτρικό

Συνέχεια άσκησης προηγούμενης ενότητας

- Για το πρόβλημα της προηγούμενης ενότητας, θα εξάγουμε έναν γενικό τύπο που συσχετίζει την πόλωση με την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου (που επάγεται λόγω της πόλωσης).
- Θεωρούμε κύλινδρο Gauss στην επίπεδη επιφάνεια και εφαρμόζουμε τον νόμο Gauss για τα διηλεκτρικά. Θα έχουμε λοιπόν,

$$\oint \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 4\pi q \Rightarrow \oint (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 4\pi q$$

Επειδή $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$, έχουμε

$$[(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} - 4\pi(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}}]S = 4\pi q \Rightarrow$$
$$-(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_p$$



Εφαρμογή

- Σφαίρα ακτίνας a και διηλεκτρικής σταθεράς ϵ_2 βρίσκεται σε διηλεκτρικό υλικό ϵ_1 . Εφαρμόζεται ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = E_0 \hat{z}$. Ψάχνουμε το δυναμικό στον χώρο.
- Θα ισχύει ότι $\Phi(r) = -E_0 r \cos\theta + (\text{δέσμιο φορτίο εξ' αιτίας της πόλωσης της σφαίρας})$.
- Η γενική μορφή της λύσης θα είναι:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_l \left[A_l r^l + B_l \frac{1}{r^{l+1}} \right] P_l(\cos\theta) \text{ (Έχουμε αζιμουθιακή συμμετρία)}.$$

- Για $r < a$, $\Phi_{in}(r, \theta) = \sum_l A_l r^l P_l(\cos\theta)$ και

$$\text{για } r > a, \Phi_{out}(r, \theta) = \sum_l \left[B_l r^l + C_l \frac{1}{r^{l+1}} \right] P_l(\cos\theta)$$



Συμπεριφορά στο ∞

- Όταν $r \rightarrow \infty$, η συνεισφορά από την σφαίρα είναι αμελητέα κι έτσι το δυναμικό είναι

$$\Phi(r \rightarrow \infty) = -E_0 r \cos\theta.$$

- Καθώς λοιπόν $r \rightarrow \infty$, συνεισφέρει μόνο ο όρος $l = 1$.
- Άρα γενικά θα έχουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{out}(r, \theta) = B_1 r + \sum_{l=0}^{\infty} C_l \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta), B_1 = -E_0 \\ \Phi_{in}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \end{array} \right.$$



Συνοριακή συνθήκη 1

- Επειδή $\sigma = 0$, οι συνοριακές συνθήκες θα είναι

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Phi_2, \text{ για } x \text{ on } S \\ \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}, \text{ για } x \text{ on } S \end{cases}$$

- Άρα $\Phi_{in} = \Phi_{out}$ για $r = \alpha$. Πιο συγκεκριμένα:

$$\begin{cases} l = 1, A_1 r \cos\theta = [-E_0 r + C_1 r^{-2}] \cos\theta \text{ για } r = \alpha \Rightarrow A_1 = -E_0 + C_1 \alpha^{-3} \quad (1) \\ l \neq 1, A_l r^l P_l(\cos\theta) = C_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta) \text{ για } r = \alpha \Rightarrow A_l = C_l \alpha^{-(2l+1)} \quad (2) \end{cases}$$



Συνοριακή συνθήκη 2

- Επίσης $\varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_{in}}{\partial r} = \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_{out}}{\partial r}$ για $r = a$. Πιο συγκεκριμένα

$$\left\{ \begin{array}{l} l = 1, \varepsilon_2 A_1 \cos\theta = \varepsilon_1 [-E_0 + (-2)C_1 r^{-3} \cos\theta] \text{ για } r = a \Rightarrow \\ \varepsilon_2 A_1 = \varepsilon_1 [-E_0 - 2C_1 a^{-3}] \quad (3) \\ l \neq 1, \varepsilon_2 l A_l r^{l-1} P_l(\cos\theta) = -\varepsilon_1 (l+1) C_l r^{-(l+2)} P_l(\cos\theta) \text{ για } r = a \Rightarrow \\ l \varepsilon_2 A_l = -\varepsilon_1 (l+1) C_l a^{-(2l+1)} \quad (4) \end{array} \right.$$
- Από την (2) έχουμε $A_l = C_l a^{-(2l+1)} \Rightarrow \varepsilon_2 l A_l = \varepsilon_2 l C_l a^{-(2l+1)}$ και από την (4) έχουμε $\varepsilon_2 l A_l = -\varepsilon_1 (l+1) C_l a^{-(2l+1)} \Rightarrow C_l a^{-(2l+1)} [l\varepsilon_2 + (l+1)\varepsilon_1] = 0$.
- Η παραπάνω ισότητα πρέπει να ισχύει για κάθε $l \neq 1$. Γι' αυτό $C_l = A_l = 0$ για $l \neq 1$.
- Από (1), (3)

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1 = -E_0 + C_1 a^{-3} \\ \varepsilon_2 A_1 = \varepsilon_1 [-E_0 - 2C_1 a^{-3}] \end{array} \right. \Rightarrow \varepsilon_2 A_1 = -E_0 \varepsilon_2 + C_1 a^{-3} \varepsilon_2 \Rightarrow E_0 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = C_1 a^{-3} (\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1)$$



Το δυναμικό-Τελική μορφή

- Άρα συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{cases} C_1 = E_0 a^3 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \\ A_1 = -E_0 + E_0 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \end{cases}$$

Επομένως το δυναμικό γράφεται ως

$$\begin{cases} \Phi_{in}(r, \theta) = \frac{-3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} r \cos\theta E_0 \\ \Phi_{out}(r, \theta) = -E_0 r \cos\theta + \frac{a^3}{r^2} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} E_0 \cos\theta \end{cases}$$



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, **Ανδρέας Τερζής**. Ανδρέας Τερζής «**Κλασική Ηλεκτροδυναμική. Εφαρμογές στα διηλεκτρικά**». Έκδοση: **1.0**. Πάτρα **2015**.

Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/courses/PHY1958/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.