Κλασική Ηλεκτροδυναμική

Ενότητα 14: Ολοκλήρωση πολυπολικής ανάπτυξης και διηλεκτρικά

Ανδρέας Τερζής
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να ολοκληρώσει την πολυπολική ανάπτυξη εφαρμόζοντάς την για την δυναμική ενέργεια και παραθέτοντας την έννοια του διπόλου. Ακόμη, γίνεται η εισαγωγή στα διηλεκτρικά, ακολουθούμενη από εφαρμογή.

Περιεχόμενα ενότητας

- Πεδίο διπόλου
- Πολυπολική ανάπτυξη δυναμικής ενέργειας
- Διηλεκτρικά
- Εφαρμογή στα διηλεκτρικά

Πεδίο διπόλου-Εισαγωγικά

- Θα υπολογίσουμε την συνεισφορά του διπολικού όρου στο ηλεκτρικό πεδίο. Θα πάρουμε την γενική περίπτωση όπου το δίπολο δεν βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, αλλά στην θέση $\boldsymbol{x_0}$.
- Είπαμε στην προηγούμενη ενότητα ότι

$\Phi_{dipole} = \frac{1}{r^2} p_i \hat{r}_i$, με $p_i = \int \rho(\boldsymbol{x'})\, x'_i d^3 x'$.

- Τώρα που το δίπολο είναι στην θέση $\boldsymbol{x_0}$ θα έχουμε $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}$ και $\Phi_{dipole}(\boldsymbol{x}) = p_i \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0})_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}|^3}$.

Πεδίο διπόλου-Υπολογισμός

- Θα έχουμε λοιπόν ότι

$$\mathbf{E}_{dipole}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{\nabla}\Phi_{dipole}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi_{dipole}(\boldsymbol{x}) =$$

$$\frac{3p_i(x_i - x_{0i})\left(x_j - x_{0j}\right)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}|^5} - \frac{p_i\delta_{ij}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}|^3}$$

(Εννοείται ότι έχουμε διπλό άθροισμα με δείκτες τα i, j. Τα i, j είναι οι συντεταγμένες x, y, z).

- Αναλύοντας τα αθροίσματα, γίνεται προφανές ότι μπορούμε να γράψουμε το πεδίο διπόλου στην μορφή

$$\mathbf{E}_{dipole}(\boldsymbol{x}) = \frac{[3\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})](\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}|^5} - \frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}|^3} = \frac{3\hat{n}(\boldsymbol{p}\cdot\hat{n}) - \boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}|^3}$$

Πολυπολική ανάπτυξη δυναμικής ενέργειας

- Η ενέργεια αλληλεπίδρασης μιας εντοπισμένης κατανομής φορτίου και ενός εξωτερικού βαθμωτού δυναμικού, όπως έχουμε αναφέρει, εκφράζεται ως

$$W = \int \rho(\boldsymbol{x})\Phi(\mathbf{x})d^3x$$

- Αναπτύσσουμε το δυναμικό ως

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \Phi(0) + \frac{\partial\Phi(0)}{\partial x_i}x_i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi(0)}{\partial x_i \partial x_j}x_i x_j + \cdots$$

- Επειδή $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi \Rightarrow \mathrm{E}_i = -\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}$, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \Phi(0) - \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{E}(0) - \frac{1}{2}\frac{\partial E_j(0)}{\partial x_i}x_i x_j + \cdots$$

Τελικό αποτέλεσμα

- Αντικαθιστώντας την έκφραση για το δυναμικό στον τύπο της δυναμικής ενέργειας παίρνουμε

$$W = \int \rho(\boldsymbol{x})\Phi(0)\, d^3x - \int \rho(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{x} d^3x \cdot \boldsymbol{E}(0)$$

$$- \frac{1}{6}\int \rho(\boldsymbol{x}) 3x_i x_j d^3x \frac{\partial E_j(0)}{\partial x_i} =$$

$$q\Phi(0) - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{E}(\mathbf{0}) - \frac{1}{6} Q_{ij} \frac{\partial E_j(0)}{\partial x_i} + \cdots$$

Αλληλεπίδραση διπόλου-διπόλου

- Έχουμε δίπολο εντός ηλεκτρικού πεδίου. Επομένως για την ενέργεια αλληλεπίδρασης έχουμε

$W = -\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{E}(0)$**.**

- Το ηλεκτρικό πεδίο προκαλείται από δεύτερο δίπολο, οπότε $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{3\hat{n}(\boldsymbol{p}\cdot\hat{n})-\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}|^3}$.

- Έστω ότι το πεδίο παράγεται από δίπολο $\boldsymbol{p}_1$ στην θέση $\boldsymbol{x}_1$**.** Έστω ότι έχουμε ένα δεύτερο δίπολο στην θέση $\boldsymbol{x}_2$.

- Τότε θα έχουμε $\mathbf{E}(\boldsymbol{x}_2) = \frac{3\hat{n}(\boldsymbol{p_1}\cdot\hat{n})-\boldsymbol{p}_1}{|\boldsymbol{x_1}-\boldsymbol{x_2}|^3}$ και η ενέργεια θα είναι

$$W = -p_2 \frac{3\hat{n}(\boldsymbol{p_1} \cdot \hat{n}) - \boldsymbol{p}_1}{|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}|^3} = \frac{\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p_2} - 3\hat{n}(\boldsymbol{p_1} \cdot \hat{n})(\boldsymbol{p_2} \cdot \hat{n})}{|\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}|^3}$$

Σημείωση: Η ποσότητα Q_{ij} είναι τανυστής δεύτερης τάξης. Στην βιβλιογραφία μπορούμε να δούμε ότι ορίζεται και ως $Q_{ij}= \int(3x'_i\, x'_j - x'^2\delta_{ij})\rho(x')d^3x'$. Αυτό σημαίνει ότι έχει ουσιαστικά πραγματοποιηθεί ένας μετασχηματισμός στον τανυστή που ορίσαμε αρχικά, έτσι ώστε $Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0$. Γενικά ισχύει ότι $Q_{ij} = Q_{ji}$. Με τον μετασχηματισμό αυτό επικεντρωνόμαστε στις 6 ανεξάρτητες συνιστώσες.

Θεωρία διηλεκτρικών-Εισαγωγή

- Θέλουμε να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο όταν υπάρχουν υλικά στην περιοχή ενδιαφέροντος.
- Έστω ότι η κατανομή φορτίου στην ύλη επάγει μόνο διπολικούς όρους υπό την επίδραση εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου.
- Αυτό μπορούμε να το θεωρήσουμε για τον εξής λόγο: Έστω ότι το υλικό αποτελείται από πολύ μικρές περιοχές που τους αντιστοιχεί μια κατανομή φορτίου. Θα βρίσκουμε λοιπόν το δυναμικό που αντιστοιχεί σε αυτές τις στοιχειώδεις κατανομές και μετά θα ολοκληρώνουμε στον χώρο. Γνωρίζουμε ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε το πολυπολικό ανάπτυγμα του δυναμικού, ενώ για σημεία που είναι «μακρυά» από την περιοχή της κατανομής φορτίου, αρκούν οι πρώτοι όροι του αναπτύγματος για να προσεγγίστεί το δυναμικό. Στην περίπτωσή μας λοιπόν, οι περιοχές του υλικού είναι τόσο στοιχειώδεις που μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οποιοδήποτε σημείο έξω από αυτές θεωρείται μακρυνό. Άρα το ανάπτυγμα του δυναμικού μέχρι και τον διπολικό όρο δίνει μια πολύ καλή προσέγγιση.

Το δυναμικό

- Το δυναμικό σύμφωνα με αυτά που είπαμε, σε μια πολύ μικρή περιοχή όγκου $\Delta\mathrm{V}$ θα είναι:

$\Delta\Phi(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}\prime|}\Delta\mathrm{V}' + \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}\prime|^3}\Delta\mathrm{V}'$, όπου $\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{p}_i = \frac{\boldsymbol{P}}{\Delta\mathrm{V}}$ είναι η διπολική ροπή ανά μονάδα όγκου.

- Άρα $\Phi(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \int \frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}\prime|} d^3x' + \int \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}\prime|^3} d^3x'$

- Ο πρώτος όρος είναι η συνεισφορά από το ελεύθερο φορτίο και ο δεύτερος από το δέσμιο φορτίο στην ύλη.

Το δυναμικό-Τελική μορφή

- Θυμίζουμε ότι $\boldsymbol{\nabla}'\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)=\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}$. Άρα

$$\Phi(\mathbf{x})=\int\frac{\rho(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x'+\int\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{\nabla}'\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)d^3x'$$

- Εφαρμόζουμε στον δεύτερο όρο παραγοντική ολοκλήρωση και έχουμε

$\int\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{\nabla}'\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right)d^3x'=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}-\int\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\boldsymbol{\nabla}'\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')d^3x'$. Ο πρώτος όρος δίνει μηδενική συνεισφορά (διότι ή ολοκλήρωση γίνεται σε όλο τον χώρο, από $-\infty$ έως $+\infty$).

- Άρα καταλήγουμε ότι $\Phi(\mathbf{x})=\int\frac{\rho(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{\nabla}'\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}d^3x'$.

Η έννοια της ηλεκτρικής μετατόπισης

- Έχουμε ότι $\Phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\tilde{\rho}(\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} d^3x'$ με

$\tilde{\rho}(\boldsymbol{x}') = \rho(\boldsymbol{x}') - \boldsymbol{\nabla}' \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}')$ να είναι το ολικό φορτίο στην ύλη.

- Σύμφωνα με τον νόμο Gauss θα ισχύει

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 4\pi\tilde{\rho}(\boldsymbol{x}) = 4\pi(\rho(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P}) \Rightarrow$$
$$\boldsymbol{\nabla} \cdot [\boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}] = 4\pi\rho(\boldsymbol{x})$$

- Ορίζουμε την ηλεκτρική μετατόπιση $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}$ και άρα $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho(\mathbf{x})$.
- Για ισότροπο και γραμμικό διηλεκτρικό, $\boldsymbol{P} = \chi\mathbf{E}$, όπου χ είναι η ηλεκτρική επιδεκτικότητα του υλικού.
- Άρα $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\chi\mathbf{E} = (1 + 4\pi\chi)\mathbf{E} = \varepsilon\mathbf{E}$, με $\varepsilon = (1 + 4\pi\chi)$ να είναι η διηλεκτρική σταθερά.

Συνοριακές συνθήκες

- Θα εκφράσουμε τις συνοριακές συνθήκες στα διηλεκτρικά, οι οποίες εξάγονται με παρόμοιο τρόπο με αυτόν στα μέταλλα. Έχουμε λοιπόν τις περιοχές 1 και 2, που χαρακτηρίζονται από διηλεκτρικές σταθερές $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.
- Οι συνοριακές συνθήκες είναι

$$(\boldsymbol{D_1} - \boldsymbol{D_2}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{21} = \sigma,$$
$$(\mathbf{E_2} - \mathbf{E_1}) \times \hat{\boldsymbol{n}}_{21} = 0,$$

όπου σ η επιφανειακή πυκνότητα ελεύθερου φορτίου(στην διαχωριστική επιφάνεια).Στην περίπτωση που $\sigma = 0$, οι συνοριακές συνθήκες γίνονται

$\Phi_1 = \Phi_2, \varepsilon_1 \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial n}$ για $x \; on \; S$.

Εφαρμογή

- Έστω δύο διηλεκτρικά $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που διαχωρίζονται από την $z = 0$. Στο διηλεκτρικό 1 έχουμε ένα σημειακό φορτίο στην θέση $(x = y = 0, z = d)$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το δυναμικό.
- Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των ειδώλων. Τοποθετούμε λοιπόν ένα είδωλο στην θέση $(x = \mathrm{y} = 0, \mathrm{z} = -\mathrm{d})$.

Το δυναμικό

- Περιοχή 1: Το δυναμικό στην περιοχή 1 θα προέρχεται από το σημειακό μας φορτίο και το είδωλό του, δηλ. $\Phi_1 = \frac{1}{\varepsilon_1}\left[\frac{q}{(\rho^2+(z-d)^2)^{1/2}} + \frac{q'}{(\rho^2+(z+d)^2)^{1/2}}\right]$ (με $\rho^2 = x^2 + y^2$).
- Περιοχή 2: Θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα της περιοχής 2 ξεχωριστά. Στην περιοχή 2 δεν υπάρχουν φορτία. Για να βρούμε το δυναμικό της τοποθετούμε ένα είδωλο q'' στην θέση $z = d$. Έτσι το δυναμικό θα είναι $\Phi_2 = \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{q''}{(\rho^2+(z-d)^2)^{1/2}}$.

Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών

- Για να προσδιορίσουμε τα φορτία q', q'' θα εφαρμόσουμε τις συνοριακές συνθήκες.

1. $\Phi_1(z=0)=\Phi_2(z=0) \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{q+q'}{\sqrt{\rho^2+d^2}}=\frac{1}{\varepsilon_2}\frac{q''}{\sqrt{\rho^2+d^2}} \Rightarrow$

$$\frac{q+q'}{\varepsilon_1}=\frac{q''}{\varepsilon_2}$$

2. $\varepsilon_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}=\varepsilon_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}$ για $x\ on\ S$. Άρα

$$\varepsilon_1\frac{\partial\Phi_1(z=0)}{\partial z}=\varepsilon_2\frac{\partial\Phi_2(z=0)}{\partial z} \Rightarrow$$

$\frac{-(z-d)q}{\left(\rho^2+(z-d)^2\right)^{3/2}}+\frac{-(z+d)q'}{\left(\rho^2+(z+d)^2\right)^{3/2}}=\frac{-(z-d)q''}{\left(\rho^2+(z-d)^2\right)^{3/2}}$ για $z=0$.

Επομένως $q+q'=q''$.

Τελική μορφή δυναμικού

- Καταλήξαμε λοιπόν στις σχέσεις $\frac{q+q'}{\varepsilon_1} = \frac{q''}{\varepsilon_2}$ και $q + q' = q''$. Άρα $q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} q, q' = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} q$.
- Επομένως το δυναμικό θα γράφεται ως

$$\Phi(\rho, z) = \begin{cases} \frac{q}{\varepsilon_1}\left[\frac{1}{\left(\rho^2 + (z-d)^2\right)^{1/2}} + \frac{\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}{\left(\rho^2 + (z+d)^2\right)^{1/2}}\right], z > 0 \\ \frac{q}{\varepsilon_2}\frac{1}{\left(\rho^2 + (z-d)^2\right)^{1/2}}\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, z < 0 \end{cases}$$

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης