Κλασική Ηλεκτροδυναμική

Ενότητα 12: Συνάρτηση Green από ιδιοσυναρτήσεις

Ανδρέας Τερζής

Σχολή Θετικών Επιστημών

Τμήμα Φυσικής

Σκοποί ενότητας

- Σκοπός της ενότητας είναι να μελετήσει την συνάρτηση Green από ιδιοσυναρτήσεις και να δώσει μια εφαρμογή με μεικτές συνοριακές συνθήκες (συνδυασμό Dirichlet και Neumann).

Περιεχόμενα ενότητας

- Η Green από ιδιοσυναρτήσεις
- Εφαρμογή με μεικτές συνοριακές συνθήκες

Green σε κυλινδρικές συντεταγμένες-Σύντομη σκιαγράφηση

- Θα αναφέρουμε αρχικά λίγα λόγια για την συνάρτηση Green σε κυλινδρικές συντεταγμένες.
- Θυμίζουμε ότι για να προσδιορίσουμε την Green σε σφαιρικές συντεταγμένες, θα έπρεπε αρχικά να προσδιορίσουμε ποιο είναι το ανάπτυγμα του δυναμικού μοναδιαίου φορτίου στις σφαιρικές.
- Η ίδια φιλοσοφία ακολουθείται και στις κυλινδρικές, δηλαδή το ανάπτυγμα του δυναμικού του μοναδιαίου φορτίου σε κυλινδρικές συντεταγμένες, παίζει ρόλο στον προσδιορισμό της Green.
- Αφετηρία είναι η εξίσωση

$$\nabla_x{}^2 G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = -\frac{4\pi}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi')\delta(z-z').$$

Όπως βλέπουμε, η συνάρτηση δέλτα έχει εκφραστεί σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Γενική μορφή Green σε κυλινδρικές

- Οι συναρτήσεις δέλτα των φ, z μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει ορθοκανονικών συναρτήσεων:

$$\delta(z-z') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, e^{ik(z-z')} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} dk \cos[k(z-z')],$$

$$\delta(\varphi-\varphi') = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\varphi-\varphi')}.$$

- Άρα το γενικό ανάπτυγμα της συνάρτησης Green είναι

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} dk e^{im(\varphi-\varphi')} \cos[k(z-z')] g_m(\rho, \rho')$$

- Αντικαθιστούμε αυτήν την έκφραση της Green στην εξίσωση Poisson και βρίσκουμε μια εξίσωση που πρέπει να ικανοποιεί η $g_m(\rho, \rho')$. Η μεθοδολογία είναι παρόμοια με αυτήν των σφαιρικών συντεταγμένων.

Η έννοια της ιδιοσυνάρτησης

- Η χρήση των ιδιοσυναρτήσεων κάποιου προβλήματος είναι μια εναλλακτική τεχνική για να προσδιορίσουμε την συνάρτηση Green.
- Θα ορίσουμε τι εννοούμε με την έννοια ιδιοσυνάρτηση. Έστω η διαφορική ελλειπτική εξίσωση της μορφής
$$\nabla^2\psi(\boldsymbol{x}) + [f(\boldsymbol{x}) + \lambda]\psi(\boldsymbol{x}) = 0.$$
- Αν οι συναρτήσεις $\psi(x)$ επιβάλλεται να ικανοποιούν συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες στην επιφάνεια S ή στον όγκο V, γενικά δεν θα είναι πεπερασμένες και συνεχείς παρά μόνο για ορισμένες τιμές του λ.
- Αυτές οι τιμές του λ συμβολίζονται με λ_n και ονομάζονται ιδιοτιμές. Οι αντίστοιχες συναρτήσεις $\psi_n(x)$ καλούνται ιδιοσυναρτήσεις. Η εξίσωση ιδιοτιμών είναι λοιπόν,
$$\nabla^2\psi_n(\boldsymbol{x}) + [f(\boldsymbol{x}) + \lambda_n]\psi_n(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Διαδικασία

- Να σημειώσουμε ότι οι ιδιοκαταστάσεις είναι ορθογώνιες, δηλ. $\int \psi_m{}^*(x)\psi_n(x)d^3x = \delta_{mn}$. Οι ιδιοσυναρτήσεις θεωρούνται κανονικοποιημένες.
- Το φάσμα των ιδιοσυναρτήσεων μπορεί να είναι συνεχές, διακριτό ή και τα δύο.
- Έστω ότι θέλουμε να βρούμε την συνάρτηση Green για την εξίσωση $\nabla_x{}^2\mathrm{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') + [f(\boldsymbol{x}) + \lambda]G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = -4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$
- Εδώ λ δεν είναι οι ιδιοτιμές λ_n.

Ανάπτυγμα Green

- Θεωρούμε ότι η συνάρτηση Green μπορεί να έχει ένα ανάπτυγμα σε ιδιοσυναρτήσεις της μορφής

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}') = \sum_n a_n(\boldsymbol{x}')\psi_n(\boldsymbol{x})$$

- Αντικαθιστώντας την συνάρτηση Green στην διαφορική έχουμε:

$$\nabla_x{}^2 \sum_n a_n(\boldsymbol{x}')\psi_n(\boldsymbol{x}) + [f(\boldsymbol{x}) + \lambda] \sum_n a_n(\boldsymbol{x}')\psi_n(\boldsymbol{x}) = -4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \Rightarrow$$

$$\sum_n a_n(\boldsymbol{x}')\nabla_x{}^2\psi_n(\boldsymbol{x}) + [f(\boldsymbol{x}) + \lambda] \sum_n a_n(\boldsymbol{x}')\psi_n(\boldsymbol{x}) = -4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}').$$

- Είχαμε πει ότι ισχύει $\nabla^2\psi_n(\boldsymbol{x}) + [f(\boldsymbol{x}) + \lambda_n]\psi_n(\boldsymbol{x}) = 0 \Rightarrow$

$$\nabla^2\psi_n(\boldsymbol{x}) = -[f(\boldsymbol{x}) + \lambda_n]\psi_n(\boldsymbol{x})$$

Οι συντελεστές α_n

- Άρα
$$\sum_n a_n(\boldsymbol{x}')[-[f(\boldsymbol{x})+\lambda_n]\psi_n(\boldsymbol{x})]+[f(\boldsymbol{x})+\lambda]\sum_n a_n(\boldsymbol{x}')\psi_n(\boldsymbol{x})=-4\pi\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}').$$
- Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη και πολλαπλασιάζοντας με ${\psi_m}^*(\boldsymbol{x}')$ για να εκμεταλλευτούμε την ορθοκανονικότητα βρίσκουμε ότι $\alpha_n(\boldsymbol{x}')=4\pi\frac{{\psi_n}^*(\boldsymbol{x}')}{\lambda_n-\lambda}$.
- Επομένως το ανάπτυγμα Green σε ιδιοσυναρτήσεις είναι $G(x,x')=4\pi\sum_n\frac{{\psi_n}^*(\boldsymbol{x}')\psi_n(\boldsymbol{x})}{\lambda_n-\lambda}$.
- Για συνεχές φάσμα αντικαθιστούμε το άθροισμα με ολοκλήρωμα.
- Στην ηλεκτροστατική θεωρούμε ότι $f(x)=\lambda=0$.

Η κυματική εξίσωση

- Η κυματική εξίσωση $(\nabla^2 + k^2)\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = 0$ είναι μια υποπερίπτωση της εξίσωσης ιδιοτιμών(διαφάνεια 6).
- Οι ιδιοτιμές στο συνεχές είναι k^2 και ιδιοσυναρτήσεις $\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$.
- Η σχέση νορμαλισμού των ιδιοσυναρτήσεων είναι

$$\int \psi_{\boldsymbol{k'}}{}^*(\boldsymbol{x})\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) d^3x = \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k'})$$

- Τότε θα έχουμε ότι $\frac{1}{|x-x'|} = \frac{1}{2\pi^2}\int d^3k \frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'})}}{k^2}$.

Εφαρμογή 1

- Θέλουμε να εξάγουμε την συνάρτηση Green για πρόβλημα Dirichlet σε ορθογώνιο κουτί, που ορίζεται από έξι επίπεδα, $x = y = z = 0, x = a, y = b, z = c$.
- Το ανάπτυγμα θα γίνει συναρτήσει των ιδιοσυναρτήσεων της κυματικής εξίσωσης:
$$\left(\nabla^2 + {k_{lmn}}^2\right)\psi_{lmn}(x, y, z) = 0.$$
- Με εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών, βρίσκουμε ότι οι ιδιοσυναρτήσεις είναι

$$\psi_{lmn}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) sin\left(\frac{n\pi z}{c}\right) \text{ και}$$
$${k_{lmn}}^2 = \pi^2\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right).$$

Ανάπτυγμα Green

- Το ανάπτυγμα Green είναι επομένως

$$G(x,x') = \frac{32}{\pi abc}\sum_{l,m,n=1}^{\infty}\frac{sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right)sin\left(\frac{l\pi x'}{a}\right)sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)sin\left(\frac{m\pi y'}{b}\right)sin\left(\frac{n\pi z}{c}\right)sin\left(\frac{n\pi z'}{c}\right)}{\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)}$$

Μεικτές συνοριακές συνθήκες-Παράδειγμα

- Με τον όρο «μεικτές συνοριακές συνθήκες» εννοούμε ότι σ' ένα μέρος του συνόρου έχουμε Dirichlet συνοριακές συνθήκες (γνωρίζουμε το δυναμικό) και στο υπόλοιπο Neumann (γνωρίζουμε την κάθετη παράγωγο του δυναμικού).
- Θεωρούμε το εξής παράδειγμα: Ένα μη πεπερασμένο, αγώγιμο επίπεδο έχει μια κυκλική οπή ακτίνας α στο εσωτερικό του. Το αγώγιμο επίπεδο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι το επίπεδο $x-y$ με την αρχή των αξόνων να βρίσκεται στο κέντρο της οπής.
- Υπάρχει ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο $\vec{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_1\hat{z}$ στην κάτω μεριά της επιφάνειας και $\vec{\mathrm{E}} = \mathrm{E}_0\hat{z}$ στην πάνω. Τα πεδία έχουν φορά προς τον αρνητικό άξονα z.
- Αφού το επίπεδο είναι αγώγιμο, το δυναμικό θα είναι σταθερό για $\rho > \alpha$ ($\Phi = \mathrm{const}$). Αφού δεν υπάρχει πυκνότητα φορτίου στο εσωτερικό της οπής η συνιστώσα $\vec{\mathrm{E}}_z$ θα είναι συνεχής. Άρα έχουμε Dirichlet συνθήκες στο επίπεδο και Neumann στην οπή.

Το δυναμικό $\Phi^{(1)}(x)$

- Μπορούμε να γράψουμε το δυναμικό ως

$$\Phi(\mathrm{x,y,z}) = \begin{cases} E_0 z + \Phi^{(1)}(\boldsymbol{x}), z > 0 \\ E_1 z + \Phi^{(1)}(\boldsymbol{x}), z < 0 \end{cases}$$

όπου $\Phi^{(1)}(x)$ είναι το δυναμικό που παράγεται από την κατανομή φορτίου

στο επίπεδο.(Χωρίς την οπή το δυναμικό θα είναι $\Phi(\mathrm{x,y,z}) = \begin{cases} E_0 z, z > 0 \\ E_1 z, z < 0 \end{cases}$.

Τώρα που υπάρχει και η οπή στην περιοχή της το δυναμικό αλλάζει. Το $\Phi^{(1)}(\boldsymbol{x})$ λειτουργεί ως διόρθωση πρώτης τάξης).

- Θα εκφράσουμε το δυναμικό $\Phi^{(1)}(\boldsymbol{x})$ συναρτήσει της (άγνωστης) επιφανειακής πυκνότητας του επιπέδου. Η κατανομή φορτίου είναι πάνω στον άξονα z προκειμένου να μπορούν να παραχθούν τα ομογενή πεδία E_0, E_1.

- Άρα $\Phi^{(1)}(x) = \int \frac{\sigma^{(1)}(x',y')dx'dy'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{\frac{1}{2}}}$

Η συνοριακή συνθήκη για την παράγωγο

- Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\Phi^{(1)}(x)$ είναι άρτια ως προς z. Επομένως η παράγωγος $\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z}$ είναι μια περιττή συνάρτηση.
- Για την συνοριακή συνθήκη στο $z = 0$ θα ισχύει:

$$\mathrm{E}_0 + \left.\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z}\right|_{0^+} = E_1 + \left.\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z}\right|_{0^-}$$

- Επειδή η παράγωγος είναι περιττή,

$$\left.\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z}\right|_{0^+} = -\left.\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z}\right|_{0^-}.$$

- Αντικαθιστώντας παραπάνω προκύπτει ότι $\left.\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z}\right|_{0^+} = \frac{1}{2}(\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_0)$.

Γενική μορφή της λύσης

- Μπορούμε να επιλέξουμε το δυναμικό έτσι ώστε να είναι $\Phi^{(1)}(\rho, \varphi, z = 0) = 0$, για $\rho > \alpha$. (Είναι σαν να ορίζουμε το σημείο αναφοράς). Αυτή είναι η συνθήκη Dirichlet του προβλήματός μας.
- Η συνθήκη Neumann είναι $\left.\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z}\right|_{0^+} = \frac{1}{2}(\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_0)$ για $0 \leq \rho \leq \alpha$.
- Θα αναφέρουμε τώρα την γενική μορφή της λύσης του προβλήματος λαμβάνοντας υπ' όψη τα εξείς:

1. $\Phi^{(1)} \to 0$, όταν $z \to \pm\infty$.
2. Το δυναμικό πρέπει να είναι πεπερασμένο για $\rho = 0, \rho \to \infty$.
3. Το πρόβλημα έχει αζιμουθιακή συμμετρία, δηλ. το δυναμικό δεν εξαρτάται από την γωνία φ.

- Άρα $\Phi^{(1)} = \int_0^\infty dk A(k) J_0(k\rho) e^{-k|z|}$.

Πώς συνεχίζουμε την μελέτη

- Από τις συνοριακές συνθήκες που εξάγαμε (για $z = 0$) έχουμε ότι

$\int_0^{\infty} dkA(k)J_0(k\rho) = 0, \rho > \alpha$ και

$\int_0^{\infty} -kA(k)J_0(k\rho)dk = \frac{1}{2}(E_1 - E_0).$

- Το πρόβλημα ανάγεται τώρα στον προσδιορισμό των συντελεστών $A(k)$.

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημείωμα Αναφοράς

Σημείωμα Αδειοδότησης