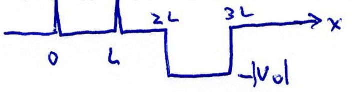
**ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι (2η ΠΡΟΟΔΟΣ)** 16 Δεκέμβρη 2019 (Διδάσκων: Αντρέας Φ. Τερζής)

**ΘΕΜΑ 1** (**1α**) Να σχεδιάσετε το δυναμικό $V(x)=|c_1|\delta(x)+|c_2|\delta(x-L)-|V_0|\Theta(x-2L)\Theta(3L-x)$ και να εξηγήσετε (**1β**) για ποι τιμές της ενέργειας έχουμε δέσμιες καταστάσεις.

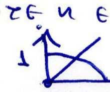



Το E είναι μικρότερο των $V(\pm\infty)=0$ και μεγαλύτερο της ελάχιστης δυναμικής ενέργεια για $-|V_0|<E<0$ (δέσμιες).

**ΘΕΜΑ 2** Να βρεθεί ο αριθμός των δέσμιων ενεργειακών καταστάσεων, σωματιδίου μάζας *m* που βρίσκεται περιορισμένο σε τετραγωνικό πηγάδι δυναμικού μήκους $2L$ και ύψους $V_0=h^2/128mL^2$.

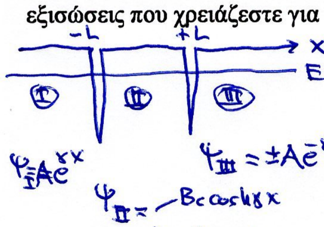
Μια μόνο, η θεμελιώδης.

$\lambda = L\sqrt{v_0} = L\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} = L\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\frac{h^2}{128mL^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{16}} = \frac{\pi}{4}$. Η ποσότητα $\frac{\pi}{2\lambda}=\frac{\pi}{2\frac{\pi}{4}}=2$. Οπότε η εξίσωση προσδιορισμού των ενεργειακών καταστάσεων γίνεται $\cos\theta=\frac{\theta}{\lambda}+n\frac{\pi}{2\lambda}=4\left(\frac{\theta}{\pi}\right)+2n$.




μόνο για $n=0$ είναι λύση $n=1$, αρχή ευθείας από το 2.

**ΘΕΜΑ 3** Ηλεκτρόνιο μάζας *m* βρίσκεται περιορισμένο σε δυναμικό $V(x)=-|c|\delta(x+L)-|c|\delta(x-L)$. (**3α**) Να γράψετε τις εξισώσεις που χρειάζεστε για την εύρεση των δέσμιων ενεργειακών καταστάσεων. (**3β**) Να δείξετε ότι πάντα υπάρχει η θεμελιώδη κατάσταση




Λόγω συμμετρίας άρτιες ή περιττές λύσεις. & Σ.Σ. μόνο στο $x=+L$.

$\psi_I = Ae^{\gamma x}$ $\quad \psi_{III}=\pm Ae^{-\gamma x}$ ($+$: άρτιες, $-$: περιττές)

$\psi_{II} = B_c\cosh\gamma x$ / $B_s\sinh\gamma x$ $\qquad \boxed{\gamma^2=\frac{-2mE}{\hbar^2}}$

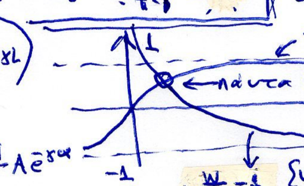
άρτιες: $B_c\cosh\gamma L = Ae^{-\gamma L}$

$-\gamma Ae^{-\gamma L} - B_c\gamma\sinh\gamma L = -\frac{2m|c|}{\hbar^2}Ae^{-\gamma L}$

περιττές: $B_s\sinh\gamma L = -Ae^{-\gamma L}$

$\gamma Ae^{-\gamma L} - \gamma B_s\cosh\gamma L = \frac{2m|c|}{\hbar^2}Ae^{-\gamma L}$

$\tanh\gamma L = \frac{2m|c|}{\hbar^2\gamma}-1$ γραφική παράσταση




**ΘΕΜΑ 4** Σε ορθογωνίου φράγματος δυναμικού, πάχους $1nm$ και ύψους $V_0$, παρατηρείται ο πρώτος συντονισμός σε ηλεκτρόνιο κινητικής ενέργειας $E\sim1.38V_0$. Να βρεθεί το ύψος $V_0$ (σε $eV$).

Συντονισμός για $E=V_0+\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2$, για $n=1$ ο πρώτος συντονισμός. Άρα $E=V_0+\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$ (για $L=1nm$) $=V_0+0.38eV$. Αλλά $E=1.38V_0=V_0+0.38eV$

$\rightarrow V_0=1eV$.

**ΘΕΜΑ 5** Να γράψετε (**5α**) τις κυματοσυναρτήσεις και (**5β**) τις συνοριακές συνθήκες για την μελέτη σκέδασης από $(+\infty\rightarrow-\infty)$ σε ορθογώνιο φράγμα δυναμικού (πάχους *L*) ηλεκτρονίου ενέργειας $E=V_0$.

Θέμα 4α, 2ης προόδου ακ. έτους 2017-2018.

Εδώ


σκέδαση $(+\infty\rightarrow-\infty)$ οπότε $\psi_I=Ae^{-ikx}$ (διερχόμενο) & $\psi_{III}=\underbrace{e^{-ikx}}_{\text{προσπίπτων}}+\underbrace{Ce^{ikx}}_{\text{ανακλώμενο}}$ ... κ.τ.λ.

**ΘΕΜΑ 6** Κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής περιγράφεται, την χρονική στιγμή $t=0$ από την κυματοσυνάρτηση, $\psi(x,t=0)=|c_0|e^{i\varphi_{01}}\psi_0+|c_1|\psi_1$. Αν $\langle E\rangle=1$ και $\langle x\rangle(t=0)=1/\sqrt{2}$ να βρεθούν (**6α**) η $\psi(x,t)$ και (**6β**) η μέση αρτιότητα $\langle P\rangle(t)$. Επίσης να βρεθεί η μέση ορμή $\langle p\rangle(t)=|c_0|^2p_{00}+|c_1|^2p_{11}+2|c_0||c_1||p_{10}|cos(\omega t+\varphi_{01}+\delta_{10})$, υπολογίζοντας τα $p_{ij}$ (**6γ₁**) χρησιμοποιώντας ολοκληρώματα και (**6γ₂**) με την αλγεβρική μέθοδο.

$\langle E\rangle=|c_0|^2\frac{1}{2}+|c_1|^2\frac{3}{2}=1$ & $|c_0|^2+|c_1|^2=1\rightarrow|c_0|=|c_1|=1/\sqrt{2}$

$\langle x\rangle(t)=|c_0|^2x_{00}+|c_1|^2x_{11}+2|c_0||c_1||x_{10}|\cos(\omega t+\varphi_{01}+\delta_{10})=|x_{10}|\cos(t+\varphi_{01}+\delta_{10})$, καθώς $\omega=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$.

Δίνεται ότι $x_{10}=\frac{1}{\sqrt{2}}=|x_{10}|e^{i\delta_{10}}\rightarrow|x_{10}|=1/\sqrt{2}$ και $\varphi_{10}=0$, Άρα $\langle x\rangle(t=0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi_{01}=\frac{1}{\sqrt{2}}\rightarrow\cos\varphi_{01}=1\rightarrow\varphi_{01}=0$.

Άρα (6α) $\psi(x,t)=\frac{\psi_1e^{-it/2}+\psi_2e^{-3it/2}}{\sqrt{2}}$.

(6β) Ο τελεστής της αρτιότητας δίνει $\hat{P}\psi_0=\psi_0$ & $\hat{P}\psi_1=-\psi_1$. Άρα $\langle P\rangle=P_0(+1)+P_1(-1)=0$ χρονοανεξάρτητος καθώς ο κ.α.τ. είναι συμμετρικό δυναμικό. Επιβεβαιώστε από $\langle P\rangle=\langle\psi|\hat{P}|\psi\rangle$.

(6γ₁) $p_{00}=\int\psi_0\left(-i\frac{d\psi_0}{dx}\right)dx=0$ (άρτια επί περιττή = περιττή) το ίδιο για $p_{11}=0$

$p_{10}=\int\psi_1\left(-i\frac{d\psi_0}{dx}\right)dx=\sqrt{\frac{4}{\pi}}\int xe^{-x^2/2}(-i)\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}(-x)e^{-x^2/2}=i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int x^2e^{-x^2}dx=i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{i}{\sqrt{2}}$

(6γ₂) $p_{00}=\langle0|\left(\frac{\hat{a}-\hat{a}^+}{i\sqrt{2}}\right)|0\rangle=\langle0|\frac{\hat{a}|0\rangle-\hat{a}^+|0\rangle}{i\sqrt{2}}\Big)\frac{\hat{a}|0\rangle=0}{\hat{a}^+|0\rangle=|1\rangle}-\frac{\langle0|1\rangle}{i\sqrt{2}}=0$, $\quad p_{11}=\langle1|\left(\frac{\hat{a}-\hat{a}^+}{i\sqrt{2}}\right)|1\rangle=\frac{\langle1|(\hat{a}|1\rangle-\hat{a}^+|1\rangle)}{i\sqrt{2}}=\frac{\overset{\to0}{\langle1|0\rangle}-\sqrt{2}\overset{\to0}{\langle1|2\rangle}}{i\sqrt{2}}$

και τέλος $p_{10}=\langle1|\left(\frac{\hat{a}-\hat{a}^+}{i\sqrt{2}}\right)|0\rangle=\frac{\langle1|(\hat{a}|0\rangle-\hat{a}^+|0\rangle)}{i\sqrt{2}}=\frac{-\langle1|1\rangle}{i\sqrt{2}}=\frac{i}{\sqrt{2}}$, $\quad p_{10}=|p_{10}|e^{i\delta_{10}}=\frac{i}{\sqrt{2}}=|p_{10}|e^{i\frac{\pi}{2}}\rightarrow |p_{10}|=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\delta_{10}=\frac{\pi}{2}$

Έτσι $\boxed{\langle p\rangle(t)}=|p_{10}|\cos(t+\varphi_{01}+\delta_{10})=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=\boxed{-\frac{\sin(t)}{\sqrt{2}}}$