

2^η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ ακαδημαϊκού έτους 2025-2026

ΑΣΚΗΣΗ 2

Θεωρούμε για τις ιδιοκαταστάσεις της θέσης ότι ισχύουν, ο ορισμός $\hat{q}|q'\rangle = q' \cdot |q'\rangle$ και ο νορμαλισμός $\langle q''|q'\rangle = \delta(q'' - q')$.

(α) Αποδείξτε ότι αν γνωρίζουμε ότι $[q, p] = i\hbar$ και $[q, S(p)] = i\hbar \cdot \frac{\partial S}{\partial p}$, τότε $\langle q''|\hat{p}|q'\rangle = -i\hbar \cdot \frac{d}{dq'} \delta(q'' - q')$.

(β) Από τον ορισμό των ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων της ορμής, $\hat{p}|p'\rangle = p'|p'\rangle$, δείξτε ότι το $\langle q'|p'\rangle$ είναι ανάλογο του $e^{i q' p' / \hbar}$. Προσοχή!, δεν θεωρείται γνωστό ότι $\hat{p} \equiv -i\hbar \frac{d}{dx}$.

ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ

Ακολουθούμε την μεθοδολογία του «κλασικού» (μεταπτυχιακού) βιβλίου Κβαντομηχανικής, Albert Messiah, *Quantum Mechanics*, volume I, (1958), σελίδες 302 -309.

(α) Έστω $|q_0\rangle$ μια ιδιοκατάσταση του τελεστή της θέσης. Από την σχέση $[q, p] = i\hbar$, γράφουμε την σχέση $i\hbar \langle q_0|q_0\rangle = \langle q_0|\hat{q}\hat{p}|q_0\rangle - \langle q_0|\hat{p}\hat{q}|q_0\rangle = q_0 \langle q_0|\hat{p}|q_0\rangle - q_0 \langle q_0|\hat{p}|q_0\rangle$, που υποδεικνύει ότι τα $\langle q_0|q_0\rangle$ (μέτρο της ιδιοκατάστασης της θέσης) και $\langle q_0|\hat{p}|q_0\rangle$ (διαγώνια στοιχεία αναπαράστασης τελεστή ορμής με τις ιδιοσυναρτήσεις θέσης) δεν είναι πεπερασμένα, αλλιώς μια και το δεξί σκέλος της ισότητας είναι ταυτοτικά μηδέν, θα είχαμε και $\langle q_0|q_0\rangle = 0$.

Σε ότι ακολουθεί υιοθετούμε τον συμβολισμό του Dirac (προσοχή!, συμβολισμό, όχι φορμαλισμό Dirac, τον φορμαλισμό σε αυτή την άσκηση τον ακολουθούμε συνεχώς), όπου οι τελεστές είναι χωρίς τόνο και οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις έχουν τόνους (δηλαδή το $\hat{p}|p'\rangle = p'|p'\rangle$, γίνεται $p|p'\rangle = p'|p'\rangle$).

Κατασκευάζουμε τον τελεστή $S(\xi) = e^{i \xi p / \hbar}$, ένας μοναδιαίος τελεστής, μια και $S^\dagger(\xi) = S(-\xi) = e^{-i \xi p / \hbar}$ που δίνει $S^\dagger S = S S^\dagger = 1$. Εφαρμόζοντας την σχέση, που δίνεται στην εκφώνηση, $[q, S(p)] = i\hbar \cdot \frac{\partial S}{\partial p}$, βρίσκουμε $[q, S] = \xi S \Rightarrow qS - Sq = \xi S \Rightarrow qS = S(q + \xi)$. Η τελευταία αυτή σχέση αποδεικνύει ότι το $S|q_0\rangle$ είναι ιδιοκατάσταση του τελεστή της θέσης με ιδιοτιμή την $q_0 + \xi$, αφού $qS|q_0\rangle = S(q + \xi)|q_0\rangle = (q_0 + \xi)S|q_0\rangle$. Μάλιστα, αφού ο $S(\xi)$ είναι

μοναδιαίος, το διάνυσμα $S|q_0\rangle$ έχει την ίδια (άπειρη νόρμα) με το διάνυσμα $|q_0\rangle$ ($\langle q_0|S^\dagger S|q_0\rangle = \langle q_0|q_0\rangle$). Αυτή η τελεστική λειτουργία του τελεστή $S(\xi)$, φαίνεται να είναι εφαρμόσιμη για οποιαδήποτε τιμή του $\xi \in (-\infty, +\infty)$. Δηλαδή με αυτόν τον μοναδιαίο τελεστή μπορούμε από την τυχαία $|q_0\rangle$ να κατασκευάσουμε τις ιδιοσυναρτήσεις θέσης σε όλο το εύρος (διάστημα $(-\infty, +\infty)$).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι (ιδιότητες που φαίνονται προφανείς, αλλά τώρα αποδείξαμε) (α) το φάσμα ιδιοτιμών της θέσης είναι **συνεχές**, (β) **χωρίς εκφυλισμούς** και (γ) **εκτείνεται σε όλο το διάστημα από $-\infty$ μέχρι $+\infty$** .

Από την σχέση $qS|q_0\rangle = |(q_0 + \xi)S|q_0\rangle$ συμπεραίνουμε ότι $S|q'\rangle = c|q' + \xi\rangle$. Υπάρχουν στέρεα επιχειρήματα (Messiah, σελίδα 305), που μας οδηγούν στην ευκολία της επιλογής για την σταθερά $c = 1$ (αλλιώς γενικά $|c| = 1$, από το γεγονός ότι ο $S(\xi)$ είναι μοναδιαίος), οπότε $|q'\rangle = S(q')|0\rangle$ και $\langle q'|S(\xi)|q''\rangle = \langle q'|q'' + \xi\rangle = \delta(q' - q'' - \xi)$.

Θεωρούμε ότι το ξ είναι πολύ μικρό, τότε $S(\xi) \sim 1 - \frac{i\xi p}{\hbar}$ και $\delta(q' - q'' - \xi) = \langle q'|S|q''\rangle \sim \delta(q' - q'') - \frac{i\xi}{\hbar} \langle q''|p|q'\rangle \Rightarrow \langle q''|p|q'\rangle = \frac{\hbar}{i} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\delta(q' - q'') - \delta(q' - q'' - \xi)}{\xi} = \frac{\hbar}{i} \delta'(q' - q'')$.

(β) Από τον ορισμό των ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων της ορμής, $p|p'\rangle = p'|p'\rangle$, πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με το bra διάνυσμα θέσης, έχουμε $p'\langle q'|p'\rangle = \langle q'|p|p'\rangle = \int \langle q'|p|q''\rangle dq'' \langle q''|p'\rangle = \frac{\hbar}{i} \int \delta'(q' - q'') \langle q''|p'\rangle dq'' = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dq'} (\langle q'|p'\rangle)$. Όπου χρησιμοποιήσαμε την τελευταία σχέση του (α) μέρους και την σχέση πληρότητας $\int |q''\rangle dq'' \langle q''| = 1$. Οπότε η προφανής λύση της $p'(\langle q'|p'\rangle) = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dq'} (\langle q'|p'\rangle)$ είναι το ζητούμενο του (β) ερωτήματος, δηλαδή $\langle q'|p'\rangle$ είναι ανάλογο του $e^{i q' p' / \hbar}$.

ΛΥΣΗ από CHATGPT

Του έδωσα την εκφώνηση και πήρα την απάντηση.

Βεβαίως. Θα λύσουμε και τα δύο ερωτήματα προσεκτικά, **χωρίς** να υποθέσουμε εκ των προτέρων ότι

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dq}.$$

Δεδομένα

Ιδιοκαταστάσεις θέσης:

$$\hat{q} |q'\rangle = q' |q'\rangle, \langle q'' | q'\rangle = \delta(q'' - q')$$

Σχέσεις μεταθετών:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar, [\hat{q}, S(\hat{p})] = i\hbar \frac{\partial S}{\partial p}$$

(α) Υπολογισμός του $\langle q'' | \hat{p} | q'\rangle$

Ξεκινάμε από τον μεταθέτη:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = \hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i\hbar$$

Παίρνουμε στοιχείο μήτρας μεταξύ $\langle q'' |$ και $| q'\rangle$:

$$\langle q'' | [\hat{q}, \hat{p}] | q'\rangle = \langle q'' | \hat{q}\hat{p} | q'\rangle - \langle q'' | \hat{p}\hat{q} | q'\rangle$$

Χρησιμοποιώντας ότι

$$\hat{q} | q'\rangle = q' | q'\rangle, \langle q'' | \hat{q} = q'' \langle q'' |$$

παίρνουμε:

$$(q'' - q') \langle q'' | \hat{p} | q'\rangle = i\hbar \delta(q'' - q') \quad (1)$$

Θέλουμε μια κατανομή $F(q'', q')$ τέτοια ώστε:

$$(q'' - q')F = i\hbar \delta(q'' - q')$$

Γνωστή ταυτότητα κατανομών:

$$(x) \delta'(x) = -\delta(x)$$

Θέτουμε:

$$\langle q'' | \hat{p} | q' \rangle = -i\hbar \frac{d}{dq'} \delta(q'' - q')$$

Πράγματι:

$$(q'' - q')(-i\hbar) \frac{d}{dq'} \delta(q'' - q') = i\hbar \delta(q'' - q')$$

✓ Αποδείχθηκε το (α)

(β) Υπολογισμός του $\langle q' | p' \rangle$

Ορίζουμε:

$$\psi_{p'}(q') \equiv \langle q' | p' \rangle$$

Από τον ορισμό της ιδιοκατάστασης ορμής:

$$\hat{p} | p' \rangle = p' | p' \rangle$$

Πολλαπλασιάζουμε αριστερά με $\langle q' |$:

$$\langle q' | \hat{p} | p' \rangle = p' \langle q' | p' \rangle$$

Εισάγουμε πληρότητα:

$$\langle q' | \hat{p} | p' \rangle = \int dq'' \langle q' | \hat{p} | q'' \rangle \langle q'' | p' \rangle$$

Χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα του (α):

$$= \int dq'' [-i\hbar \frac{d}{dq''} \delta(q' - q'')] \psi_{p'}(q'')$$

Ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$= -i\hbar \frac{d}{dq'} \psi_{p'}(q')$$

Άρα:

$$-i\hbar \frac{d}{dq'} \psi_{p'}(q') = p' \psi_{p'}(q')$$

Διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d\psi_{p'}}{dq'} = \frac{i}{\hbar} p' \psi_{p'}$$

Λύση:

$$\boxed{\langle q' | p' \rangle = C e^{\frac{i}{\hbar} q' p'}}$$

όπου C σταθερά κανονικοποίησης.

✓ Αποδείχθηκε ότι η ιδιοσυνάρτηση ορμής στη θέση είναι επίπεδο κύμα **χωρίς** να υποθέσουμε

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dq}.$$

Καλά Χριστούγεννα, Πάτρα 24/12/25 ανδρέας φ. τερζής